RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO LETIZIA

1-motivi di varietà proiettive semplicemente connesse e scoppiamenti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 107-112

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__107_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

1-motivi di varietà proiettive semplicemente connesse e scoppiamenti.

MAURIZIO LETIZIA (*)

È possibile definire sul $\pi_3(X)_{\mathbb{C}} = \pi_3(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ di una varietà proiettiva complessa non singolare e semplicemente connessa X una struttura di Hodge mista ([5]); si può inoltre costruire una successione esatta di morfismi di strutture di Hodge miste:

$$0 \to H^3(X, \mathbb{C}) \to \pi_3(X)^*_{\mathbb{C}} \to S^2H^2(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\tau} H^4(X, \mathbb{C})$$

— ove $\pi_3(X)^*_{\mathbb{C}}$ è il duale di $\pi_3(X)_{\mathbb{C}}$ munito della struttura di Hodge duale, S^2 indica il quadrato simmetrico e τ è definita da $\tau(a \times b) = a \cdot b$ il prodotto essendo preso nell'anello di coomologia $H^*(X, \mathbb{C})$ — che esibisce $\pi_3(X)^*_{\mathbb{C}}$ come estensione di $\operatorname{Ker} \tau$ munito della struttura di Hodge indotta da quella standard di $H^2(X, \mathbb{C})$ tramite $H^3(X, \mathbb{C})$ munito della struttura di Hodge standard ([2]).

L'insieme di tutte le possibili estensioni della struttura di Hodge di $\operatorname{Ker} \tau$ tramite quella di $H^3(X, \mathbb{C})$ è un gruppo che può essere agevolmente identificato con:

$$\frac{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ker} \tau, H^3(X, \mathbb{C}))}{F^0 \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ker} \tau, H^3(X, \mathbb{C})) + \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}((\operatorname{Ker} \tau)_{\mathbb{Z}}, H^3(X, \mathbb{Z}))}$$

— F^0 indicando il sottogruppo degli omomorfismi che rispettano la filtrazione di Hodge e $(\operatorname{Ker} \tau)_{\mathbb{Z}}$ essendo il reticolo soggiacente a $\operatorname{Ker} \tau$ ossia il nucleo della restrizione di τ a $S^2H^2(X, \mathbb{Z})$ ([1]).

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Libera Università di Trento, 38050 Povo (Trento).

Dunque la struttura di Hodge mista su $\pi_3(X)^*_{\mathbb{C}}$ determina un insieme di omomorfismi di Ker τ in $H^3(X, \mathbb{C})$: è immediato verificare che le restrizioni di tali omomorfismi a $S^2(H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)) \cap \operatorname{Ker} \tau$ composte con la proiezione:

$$H^3(X, \mathbb{C}) \to \frac{H^3(X, \mathbb{C})}{H^{3,0}(X) + H^{2,1}(X) + H^3(X, \mathbb{Z})} = J(X)$$

coincidono. Visto che X è semplicemente connessa possiamo identificare $H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ con $A^1(X)$ — indicheremo con $A(X) = \oplus A^i(X)$ l'anello di Chow di X per l'equivalenza razionale, con $\mathrm{cl}\colon A(X) \to H^*(X, \mathbb{Z})$ l'omomorfismo che associa ad un ciclo la sua classe di coomologia e con $B(X) = \oplus B^i(X)$ il nucleo di cl — per cui se $M(X)$ è il nucleo della mappa composta: $S^2A^1(X) \xrightarrow{\sigma} A^2(X) \to H^4(X, \mathbb{C})$ — con $\sigma(a \times b) = a \cdot b$ — la struttura di Hodge mista di $\pi_3(X)_{\mathbb{C}}$, da cui siamo partiti, determina, via quella duale, un omomorfismo μ: $M(X) \to J(X)$ di $M(X)$ nella Jacobiana intermedia (di Griffiths) di X che è detto 1-motivo di X. Il fatto fondamentale che si può provare al suo riguardo è che esso coincide con la composizione $M(X) \xrightarrow{\sigma} B^2(X) \xrightarrow{\Phi} J(X)$ Φ essendo la mappa di Abel-Jacobi. Tale mappa può essere così descritta: si identifichi, per dualità di Poincaré, $J(X)$ con

$$\frac{H^{2N-3}(X, \mathbb{C})^*}{H^{N-3,N}(X)^* + H^{N-2,N-1}(X)^* + H_{2N-3}(X, \mathbb{Z})}$$

$N = \dim_{\mathbb{C}} X$; — s'intende che $\gamma \in H_i(X, \mathbb{Z})$ dà luogo a una forma lineare su $H^i(X, \mathbb{C})$ tramite $\int_\gamma$ — se c è un $N-2$-ciclo algebrico su X omologo a zero per cui è il bordo di una $2N-3$-catena α Φ associa alla classe di equivalenza razionale di c la forma lineare $\int_\alpha$ che è per l'appunto ben definita modulo elementi di $H^{N-3,N}(X)^* + H^{N-2,N-1}(X)^* + H_{2N-3}(X, \mathbb{Z})$.

In questa nota vogliamo esaminare la relazione che c'è tra l'1-motivo μ: $M(X) \to J(X)$ di X e l'1-motivo μ': $M(X') \to J(X')$ di X', X' essendo la varietà ottenuta da X scoppiandone la sottovarietà non singolare Y di codimensione $d \geqslant 2$. Sia $f\colon X \to Y$ lo scoppiamento in questione; sia $Y' = f^{-1}(Y)$; $U = X - Y$; $U' = X' - Y'$; $i\colon Y \to X$ $j\colon Y' \to X'$ le inclusioni; $g\colon Y' \to Y$ e $h\colon U' \to U$ le mappe indotte da f. Siano inoltre N e N' i fibrati normali di Y in X e di Y' in X' rispettivamente. Identificheremo come è lecito fare Y' con $\mathbb{P}(N)$, il fibrato proiettivo associato a N per cui g^*N conterrà come sottofibrato il fibrato tautologico che può a sua volta essere identificato con N'. Indicheremo con F il fibrato su Y' quoziente di g^*N per N'.

Infine y e y' indicheranno la classe di equivalenza razionale di Y e Y' in $A(X)$ e $A(X')$ rispettivamente. Cominciamo con l'esplicitare la struttura di $A^1(X')$ e $A^2(X')$ La commutatività e l'esattezza delle righe del diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} A(Y') & \rightarrow & A(X') & \rightarrow & A(U') & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ A(Y) & \rightarrow & A(X) & \rightarrow & A(U) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

(in cui le mappe sono quelle ovvie) mostrano che:

$$A(X') = f^*A(X) + j_*A(Y') .$$

Si ha inoltre che g^* è iniettiva e che:

$$\begin{aligned} A(Y') &= g^*A(Y) + g^*A(Y)c_1(N') + \ldots + g^*A(Y)c_1(N')^{d-1} = \\ &= g^*A(Y) + g^*A(Y)c_1(F) + \ldots + g^*A(Y)c_1(F)^{d-1} \end{aligned}$$

$\big([4]\big)$; l'ultima uguaglianza segue da $c_1(N') + c_1(F) = g^*\, c_1(N)$; con c_i indichiamo la i-esima classe di Chern a valori nell'anello di Chow o nell'anello di coomologia a seconda del contesto.$\big)$ La formula di autointersezione: $j^*j_*(a) = ac_1(N')$ implica che j_* è iniettiva su $g^*A(Y) + \ldots + g^*A(Y)c_1(N')^{d-2}$; in particolare su $A^0(Y') + A^1(Y') + \ldots + A^{d-2}(Y')$.

Affermiamo che si ha $A^1(X') = f^*A^1(X) \oplus \mathbb{Z}y'$ e $A^2(X') = f^*A^2(X) \oplus j_*g^*A^1(Y) \oplus \mathbb{Z}j_*c_1(N')$ se $d > 3$ mentre si ha $A^2(X') = f^*A^2(X) \oplus j_*g^*A^1(Y)$ se $d = 2$ e che $j_*g^*\colon A^1(Y) \rightarrow A^2(X')$ è iniettiva in entrambi i casi. Quanto alla verifica che le somme scritte sono dirette si osservi che f_*f^* è l'identità — ciò segue dalla formula di proiezione per f: $f_*\big(f^*(a)\cdot b\big) = af_*(b)$ ponendo $b = 1$ e tenendo conto che per definizione $f_*(1) = 1$ — che $g_*g^* = 0$ — per la formula di proiezione per g: per definizione $g_*(1) = 0$ — che $f_*(y') = 0$ — per definizione — che $f_*j_* = i_*g_*$ e infine che se $d \geqslant 3$ $f_*j_*c_1(N') = i_*g_*c_1(N') = 0$ — dato che $g_*A^1(Y') = 0$ —.

Le asserzioni relative al caso $d = 2$ seguono da

$$g_*j^*j_*g^*(a) = g_*\big(g^*(a)c_1(N')\big) = ag_*\big(c_1(N')\big) = -a$$

— si è usata la formula di autointersezione: $j^* j_*(b) = bc_1(N')$, valida peraltro per qualsiasi d —, da $g_*(c_1(N')) = -1$ — N' è il fibrato tautologico su Y' — e dalla cosiddetta formula chiave che nel caso specifico assume la forma $f^* i_*(a) = j_*(g^*(a)\, c_1(F))$.

Qualunque sia d abbiamo poi le formule:

$$f^*(a)\, y' = f^*(a)\, j_*(1) = j_* j^* f^*(a) = j_* g^* i^*(a)$$

e

$$j_*(b)\, y' = j_*(b)\, j_*(1) = j_* j^* j_*(b) = j_*(bc_1(N'))\ .$$

Quest'ultima per $b = 1$ da:

$$y'^2 = j_*(c_1(N')) = j_* g^*(c_1(N)) - j_*(c_1 F))\ .$$

Se $d = 2$, usando la formula chiave si ottiene:

$$y'^2 = j_* g^* c_1(N) - f^* y\ .$$

Un procedimento analogo a quello che abbiamo usato per descrivere $A^1(X')$ e $A^2(X')$ — salvo usare successioni di coomologia relative o di Mayer-Vietoris in luogo del diagramma $(*)$ — permette di stabilire che

$$H^4(X', \mathbb{Z}) = f^* H^4(X, \mathbb{Z}) \oplus j_* g^* H^2(Y, \mathbb{Z})$$

se $d = 2$ e

$$H^4(X', \mathbb{Z}) = f^* H^4(X, \mathbb{Z}) \oplus j_* g^* H^2(Y, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} j_* c_1(N')$$

se $d \geqslant 3$ e che, qualunque sia d, $J(X') = f^* J(X) \oplus j_* g^* J^0(Y)$ ove $J^0(Y)$ è l'ordinaria varietà di Picard di Y; inoltre i vari omomorfismi $j_* g^*$ considerati sono in ogni caso iniettivi.

Ricordiamo infine che la mappa di Abel-Jacobi è una trasformazione di funtori; in particolare i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} B^1(Y) & \rightarrow & J^0(Y) \\ {\scriptstyle j_* g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_* g^*} \\ B^2(X') & \rightarrow & J(X') \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{ccc} B^2(X) & \rightarrow & J(X) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ B^2(X') & \rightarrow & J(X') \end{array}$$

in cui le frecce orizzontali sono mappe di Abel-Jacobi, sono commutativi.

Tenuto conto di ciò identificheremo nel seguito $f^* A^1(X)$ con $A^1(X)$,

$j_* g^* A^1(Y)$ con $A^1(Y)$, $j_* g^* H^2(Y, \mathbb{Z})$ con $H^2(Y, \mathbb{Z})$, $f^* J(X)$ con $J(X)$ e $j_* g^* J^0(Y)$ con $J^0(Y)$.

Passiamo ora a esplicitare $\mu' \colon M(X') \to J(X')$. Possiamo scrivere $A^1(X') = A^1(X) \oplus \mathbb{Z} y'$ e $S^2 A^1(X') = S^2 A^1(X) \oplus A^1(X) \times y' \oplus \mathbb{Z} y' \times y'$; sia $\sigma' \colon S^2 A^1(X') \to A^2(X')$ data da $\sigma'(a \times b) = a \cdot b$. Se $d \geqslant 3$ cl σ' rispetta la decomposizione in somma diretta di $S^2 A^1(X')$ e $H^4(X', \mathbb{Z})$ e si ha evidentemente:

$$M(X') = M(X) \oplus \{a \in A^1(X) |\ \mathrm{cl}\, i^* a = 0\} \times y' ;$$

μ' coincide con μ sul primo addendo e con la composizione di i^* con la mappa di Abel-Japobi di $B^1(Y)$ in $J^0(Y)$ sul secondo addendo.

Se invece $d = 2$ e $z + a \times y' + n y' \times y' \in S^2 A^1(X')$ possiamo scrivere $\mathrm{cl}\, \sigma'(z + a \times y' + n y' \times y') = \mathrm{cl}\big(\sigma(z) - n y\big) + \mathrm{cl}\big(n c_1(N) + i^* a\big)$.

Occorre ora distinguere due casi a seconda che esistano o meno uno $z_1 \in S^2 A^1(X)$ e un $a_1 \in A^1(X)$ tali che $\mathrm{cl}\,(z_1) = n_1\, \mathrm{cl}\,(y)$ e $\mathrm{cl}\,(i^* a_1) = - n_2\, \mathrm{cl}\big(c_1(N)\big)$ con n_1, n_2 interi diversi da zero.

Se non esistono si ha evidentemente:

$$M(X') = M(X) \oplus \{a \in A^1(X) |\ \mathrm{cl}\, i^* a = 0\} \times y'$$

e μ' è come nel caso $d \geqslant 3$.

Se invece z_1 ed a_1 esistono supporremo che n_1 ed n_2 siano i più piccoli interi positivi con la proprietà specificata e indicheremo con n_0 il minimo comune multiplo di n_1 ed n_2. Sia $n_0 = h n_1$ $n_0 = k n_2$ e poniamo $z_0 = h z_1$ $a_0 = k a_1$, $w_0 = z_0 + a_0 \times y' + n_0 y' \times y'$.

Si ha ora: $M(X') = M(X) \oplus \{a \in A^1(X) | \mathrm{cl}\, i^* a = 0\} \times y' \oplus \mathbb{Z} w_0$. La restrizione di μ' al secondo addendo può essere descritta come nei casi precedenti mentre $\mu'(w_0) = \Phi\big(\sigma(z_0) - n_0 y\big) + \Phi^0_Y\big(i^* a_0 + n_0 c_1(N)\big)$ $\big(\Phi^0_Y\colon B^1(Y) \to J^0(Y)$ è la mappa di Abel-Jacobi$\big)$.

La nostra analisi è così terminata: per applicazioni dei risultati ottenuti il lettore interessato è rinviato a [2]. Ringrazio il Prof. H. Clemens con il quale ho discusso questa ricerca.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Carlson, *Extensions of mixed Hodge structures*, Journées de Geometrie Algebriques d'Angers (1979, A. Beauville Ed.).

[2] J. Carlson - C. H. Clemens - J. Morgan, *On the one-motif associated to π_3 of a simply connected complex projective manifold* (Preprint, University of Utah).

[3] C. H. CLEMENS - P. A. GRIFFITHS, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math., (2) **95** (1972).

[4] J. P. JOUANOLOU, *Cohomologie de quelques schémas classiques et théorie cohomologique des classes de Chern*, S.G.A. 5 VII Lectures Notes in Mathematics.

[5] J. MORGAN, *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*, I.H.E.S. Pub. 48.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 gennaio 1981.