STEFANO TESTA

Su un universo di dispositivi monotoni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 53-57

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__53_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Su un universo di dispositivi monotoni.

STEFANO TESTA (*)

1. Introduzione and enunciazione dei risultati.

In [3] è stato costruito un universo di dispositivi $\mathcal{M}$ in cui gli elementi di $\mathfrak{D}_\alpha$ (dispositivi su un insieme finito α di terminali), sono funzioni convesse da $\mathbf{R}^\alpha$ a $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, soggette ad opportuni assiomi. Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo (spazio hilbertiano reale di dimensione finita), è possibile generalizzare, senza difficoltà, la costruzione fatta in [3] e considerare l'universo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, in cui gli elementi di $\mathfrak{D}_\alpha$ sono funzioni convesse da $\mathcal{E}^\alpha$ a $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. In [2], è stato costruito l'universo totale di dispositivi su una coppia X, Y di gruppi abeliani. Se $X = Y = \mathcal{E}$, denoteremo tale universo $UT(\mathcal{E})$. Come già osservato in [3], i subgradienti degli elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, pur essendo dispositivi di $UT(\mathcal{E})$, non costituiscono un sottouniverso di $UT(\mathcal{E})$.

Nella presente nota si determinano, un sottouniverso di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ e un sottouniverso di $UT(\mathcal{E})$ di 0-corrispondenze ciclicamente monotone massimali, tra di loro isomorfi; precisamente dimostreremo i seguenti (1):

TEOREMA 1. Sia $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ la totalità delle funzioni f dell'universo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ per le quali $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f^*$: $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ è un sottouniverso di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

TEOREMA 2. I subgradienti degli elementi di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ sono 0-corrispondenze ciclicamente monotone massimali che costituiscono un sot-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

(1) Osserviamo che, in questo lavoro, faremo costante riferimento alla terminologia e alle notazioni usate in [3].

touniverso di $UT(\mathcal{E})$. Tale sottouniverso è isomorfo (come universo di dispositivi) ad $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, isomorfismo essendo l'operazione che ad ogni elemento di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ associa il suo subgradiente.

2. Dimostrazioni.

Nel corso delle dimostrazioni faremo uso in più punti, di alcune definizioni e risultati che ci pare opportuno richiamare.

2*a*) In ogni universo di dispositivi è definita una operazione di prodotto di dispositivi (cfr. [1], n. 3), che ad ogni coppia di dispositivi $(M, N) \in \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta$, associa il dispositivo $MN \in \mathfrak{D}_{\alpha \cup \beta}$.

In $UT(\mathcal{E})$, se $\alpha = \beta$, il dispositivo MN si identifica con la corrispondenza che nella letteratura delle mappe monotone, viene chiamata somma delle mappe M ed N; naturalmente nel seguito useremo la notazione moltiplicativa, propria della teoria dei dispositivi.

2*b*) Sia α un insieme finito, $i \in \alpha$, sia $\beta = \alpha - \{i\}$, poniamo η: $\beta \to \alpha$ l'immersione canonica; il trasduttore elementare (²) $\tilde{\eta}$, definisce l'operazione di soppressione del terminale i.

Sia $j \in \alpha$, $j \neq i$, l'applicazione π: $\alpha \to \beta$ definita da $\pi(k) = k$ se $k \in \alpha$, $k \neq i$, $\pi(i) = j$, definisce l'operazione di identificazione dei terminali i e j.

2*c*) Come già osservato in [1] (cfr. n. 7, Teorema 3), vale il seguente criterio metateorico:

Sia $(\mathfrak{D}, \sigma)$ un universo di dispositivi; la frase « soddisfare la proprietà $\mathcal{T}$ » stia per un generico predicato (relativo ai dispositivi di $(\mathfrak{D}, \sigma)$): supponiamo che, qualunque siano i dispositivi M, N di $(\mathfrak{D}, \sigma)$ e i terminali i, j, si abbia:

1) il dispositivo E_{ij} (cfr. [1], n. 3) soddisfa la proprietà $\mathcal{T}$;

2) se M ed N sono privi di terminali comuni e soddisfano $\mathcal{T}$ allora anche MN soddisfa $\mathcal{T}$ (ovvero: se $M \in \mathfrak{D}_\alpha$ ed $N \in \mathfrak{D}_\beta$ soddisfano $\mathcal{T}$ allora anche $\sigma_{\alpha,\beta}(M, N)$ soddisfa $\mathcal{T}$);

3) se M soddisfa $\mathcal{T}$ ed i è un terminale di M, anche il dispositivo ottenuto da M per soppressione di i, soddisfa $\mathcal{T}$;

(²) Cfr. [1], n. 1.

4) se M soddisfa $\mathcal{T}$ anche il dispositivo M' ottenuto da M per identificazione di due qualunque terminali di M, soddisfa $\mathcal{T}$; allora i dispositivi di $(\mathfrak{D}, \sigma)$ soddisfacenti $\mathcal{T}$ formano un sottouniverso.

Dimostrazione del Teorema 1. Applichiamo il criterio enunciato in 2*c*) all'universo $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, assumendo come proprietà $\mathcal{T}$ la seguente: « f è un dispositivo di $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ tale che $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f^*$ ».

In $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, E_{ij} è la funzione e_{ij}: $\mathcal{E}^{\{i,j\}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = x_j \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} e^*_{ij} = \operatorname{ri} \{y \in \mathcal{E}_{\{i,j\}} | y_i = -y_j\}$.

Anche il punto 2) è immediato, qualora si tenga conto che

$$(\sigma_{\alpha,\beta}(f, g))^* = (f \oplus g)^* = f^* \oplus g^* , \qquad f \in \mathfrak{D}_\alpha , \ g \in \mathfrak{D}_\beta .$$

Sia η come in 2*b*), il dispositivo ottenuto da $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ per soppressione del terminale i è $(f^*\eta_\bullet)^*$. Si ha $((f^*\eta_\bullet)^*)^* = f^*\eta_\bullet$ e $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f^*\eta_\bullet$ se $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f^*$ applicando il Lemma 1 *b*) in [3].

Sia π come in 2*b*), il dispositivo ottenuto da $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ per identificazione dei terminali i e j è $f\pi^\bullet$. Si ha:

$$(f\pi^\bullet)^* = (f^{**}\pi^\bullet)^* = ((f^*)^*\pi^\bullet)^*$$

ed allora $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} (f\pi^\bullet)^*$ se $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f^*$ applicando ad f^* il seguente:

Lemma 1. Sia φ: $\alpha \to \beta$ una applicazione tra insiemi finiti; sia, in $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, $g \in \mathfrak{D}_\alpha$: definiamo per ogni $z \in \mathcal{E}^\beta$

$$\bar{g}(z) = \inf_y g(y) \qquad (y \in \mathcal{E}^\alpha, \ \varphi_\cdot(y) = z)$$

(ovviamente: se $z \notin \varphi_\bullet(\mathcal{E}^\alpha)$, allora $\bar{g}(z) = +\infty$).

Valgono le seguenti affermazioni:

a) $(g^*\varphi^\bullet)^* = \bar{g}^{**}$,

b) $\varphi_\bullet(\operatorname{ri} \operatorname{dom} g) = \operatorname{ri} \operatorname{dom} \bar{g}^{**} = \operatorname{ri} \operatorname{dom} \bar{g}$,

c) $\bar{g}^{**}(x) = \bar{g}(x)$ per ogni $x \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} \bar{g}$,

la cui dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2 in [3].

Dimostrazione del Teorema 2. Premettiamo due lemmi.

Lemma 2. In $UT(\mathcal{E})$, sia $M \in \mathfrak{D}_\alpha$, $i \in \alpha$, $A \in \mathfrak{D}_\alpha$ la o-corrispondenza definita da: $(x, y) \in A \Leftrightarrow y_i = 0$, $x_j = 0$ se $j \in \alpha$, $j \neq i$; sia η come in 2*b*), allora $\eta^{\bullet} \tilde{A}\tilde{M}\eta_{\bullet} = \eta^{\bullet} \tilde{M}\eta_{\bullet}$, inoltre se $\tilde{A} \cdot \tilde{M}$ è massimale monotona allora $\eta^{\bullet} \tilde{M}\eta_{\bullet}$ è massimale monotona.

Lemma 3. In $UT(\mathcal{E})$, sia $M \in \mathfrak{D}_\alpha$, $i, j \in \alpha$, $B \in \mathfrak{D}_\alpha$ la o-corrispondenza definita da: $(x, y) \in B \Leftrightarrow x_i = x_j$, $y_i = -y_j$, $y_k = 0$ se $k \in \alpha - \{i, j\}$, sia π come in 2*b*), allora $\pi_{\bullet} BM\pi^{\bullet} = \pi_{\bullet} M\pi^{\bullet}$, inoltre se BM è massimale monotona allora $\pi_{\bullet} M\pi^{\bullet}$ è massimale monotona.

Omettiamo le semplici verifiche di tali lemmi e passiamo alla dimostrazione del teorema.

In $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$, sia η come in 2*b*): in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ il dispositivo ottenuto da f per soppressione del terminale i è $(f^* \eta_{\bullet})^*$, in $UT(\mathcal{E})$, la o-corrispondenza ottenuta da ∂f in modo analogo è $\tilde{\eta}_{\bullet} \partial f \, \tilde{\eta}^{\bullet}$; dimostriamo che $\partial((f^* \eta_{\bullet})^*) = \tilde{\eta}_{\bullet} \partial f \, \tilde{\eta}^{\bullet}$.

Si ha $\widetilde{\tilde{\eta}_{\bullet} \partial f \, \tilde{\eta}^{\bullet}} = \eta^{\bullet} \widetilde{\partial f} \, \eta_{\bullet} = \eta^{\bullet} \partial f^* \eta_{\bullet}$. Sia A come nel Lemma 2, allora $\tilde{A} \cdot (\partial f^*)$ è una o-corrispondenza monotona massimale in quanto $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} \tilde{A} \cap \operatorname{ri} \operatorname{dom} (\partial f^*)$, e quindi per il Lemma 2, $\eta^{\bullet} \partial f^* \eta_{\bullet}$ è monotona massimale.

Sia $(v', u') \in \mathcal{E}_\beta \times \mathcal{E}^\beta$ un elemento del grafico della corrispondenza $\eta^{\bullet} \partial f^* \eta_{\bullet}$, sia $x' \in \mathcal{E}^\alpha$ tale che $\eta^{\bullet}(x') = u'$ allora per ogni $v \in \mathcal{E}^\beta$ si ha

$$f^* \eta_{\bullet}(v) - f^* \eta_{\bullet}(v') \geqslant \langle \eta_{\bullet}(v) - \eta_{\bullet}(v'), x' \rangle$$

cioè $f^* \eta_{\bullet}(v) - f^* \eta_{\bullet}(v') \geqslant \langle v - v', u' \rangle$ e pertanto (v', u') sta nel grafico di $\partial(f^* \eta_{\bullet})$, ma allora $\partial(f^* \eta_{\bullet}) = \eta^{\bullet} \partial f^* \eta_{\bullet}$ per la massimalità di $\eta^{\bullet} \partial f^* \eta_{\bullet}$. Infine $\tilde{\eta}_{\bullet} \partial f \, \tilde{\eta}^{\bullet} = \widetilde{\eta^{\bullet} \partial f^* \eta_{\bullet}} = \widetilde{\partial(f^* \eta_{\bullet})} = \partial(f^* \eta_{\bullet})^*$ come si voleva.

Sia π come in 2*b*), in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ il dispositivo ottenuto da $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ per identificazione di i e j è $f\pi^{\bullet}$, mentre in $UT(\mathcal{E})$ la o-corrispondenza ottenuta da ∂f in modo analogo è $\pi_{\bullet} \partial f \, \pi^{\bullet}$.

Dimostriamo che $\pi_{\bullet} \partial f \, \pi^{\bullet} = \partial(f\pi^{\bullet})$.

Sia B come nel Lemma 3, allora $B(\partial f)$ è una corrispondenza monotona massimale in quanto $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} B \cap \operatorname{ri} \operatorname{dom} \partial f$ e quindi per il Lemma 3, $\pi_{\bullet} \partial f \, \pi^{\bullet}$ è monotona massimale.

Sia $(u', v') \in \mathcal{E}^\beta \times \mathcal{E}_\beta$ un elemento del grafico della corrispondenza $\pi_{\bullet} \partial f \, \pi^{\bullet}$, sia $y' \in \mathcal{E}_\alpha$ tale che $\pi_{\bullet}(y') = v'$, allora per ogni $u \in \mathcal{E}^\beta$ si ha $f\pi^{\bullet}(u) - f\pi^{\bullet}(u') \geqslant \langle \pi^{\bullet}(u) - \pi^{\bullet}(u'), y' \rangle$ cioè $f\pi^{\bullet}(u) - f\pi^{\bullet}(u') \geqslant \langle u - u', v' \rangle$ e pertanto (u', v') sta nel grafico di $\partial(f\pi^{\bullet})$, ma allora $\partial(f\pi^{\bullet}) = \pi_{\bullet} \partial f \, \pi^{\bullet}$ per la massimalità di $\pi_{\bullet} \partial f \, \pi^{\bullet}$, come si voleva.

Inoltre in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, E_{ij} è la funzione $e_{ij}\colon \mathcal{E}^{\{i,j\}} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = x_j \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mentre in $UT(\mathcal{E})$, E_{ij} è ∂e_{ij}.

Infine, se $f \in \mathfrak{D}_\alpha$, $g \in \mathfrak{D}_\beta$ in $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$, si ha:

$$\partial f \underset{UT(\mathcal{E})}{\oplus} \partial g = \partial\Big(f \underset{\mathcal{M}}{\oplus} g\Big).$$

Pertanto i subgradienti degli elementi di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ sono un sottouniverso di $UT(\mathcal{E})$ e l'operatore ∂ che ad ogni funzione di $\mathcal{M}_1(\mathcal{E})$ associa il suo subgradiente, un isomorfismo tra universi.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Darbo, *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, **4** (1970), pp. 303 e seg.

[2] F. Parodi, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **58** (1977).

[3] S. Testa, *Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **58** (1977).

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1980.