RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO LETIZIA

Motivi associati a successioni di coomologia relativa

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 293-299

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__293_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 65 (1819)

Motivi associati a successioni di coomologia relativa.

Maurizio Letizia (*)

Recentemente si è cercato in alcuni casi di tradurre in termini geometrici l'informazione contenuta nel fatto che i gruppi di coomologia di una varietà algebrica complessa, e anche i suoi gruppi di omotopia se essa è non singolare e semplicemente connessa ([4]), sono muniti in modo canonico di una struttura di Hodge mista. Ad esempio in [1] viene provato che se X è una curva proiettiva con singolarità ordinarie la cui normalizzazione è non iperellittica X è determinata dalla struttura di Hodge mista polarizzata di $H^1(X, \mathbf{C})$ e in [2] che la struttura di Hodge mista canonicamente definita sul $\pi_3(X)_{\mathbf{C}} = \pi_3(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ di una varietà proiettiva non singolare semplicemente connessa X di dimensione N determina la restrizione a un certo sottogruppo di cicli algebrici omologhi a zero di codimensione 2 di X della mappa di Abel-Jacobi nella Jacobiana intermedia $J_{2N-3}(X)$ di X.

L'osservazione da cui prende spunto la presente nota è che nel corso della dimostrazione di questi e altri analoghi risultati sono state fatte delle costruzioni e delle analisi che sono grosso modo riconducibili ad una stessa nozione: quella di 1-motivo associato ad una successione di coomologia relativa. Ci proponiamo di definire tale nozione e di mostrarne il significato geometrico in un caso particolare.

Cominciamo col ricordare che se $(A^\bullet, d_A)$, $(B^\bullet, d_B)$ sono due complessi di R-moduli a $u\colon A^\bullet \to B^\bullet$ è un morfismo di complessi il mapping cone di u è il complesso $B^\bullet \oplus A^{\bullet \pm 1}$ — con il $+$ se d_A e d_B aumentano i gradi di 1 e con il $-$ se li diminuiscono di 1 — il cui differenziale d_u è dato da $d_u\big((b, a)\big) = \big(d_B(b) + u(a), -d_A(a)\big)$. Si ha una evi-

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Libera Università di Trento, 38050 Povo (Trento).

dente successione esatta:

$$0 \to B^{\bullet} \to B^{\bullet} \oplus A^{\bullet \pm 1} \to A^{\bullet \pm 1} \to 0$$

che induce una successione esatta lunga di coomologia (o omologia).

Se $A^{\bullet}$ e $B^{\bullet}$ sono filtrati da $\{F^p A^{\bullet}\}_{p \in \mathbf{Z}}$ e $\{F^p B^{\bullet}\}_{p \in \mathbf{Z}}$ la filtrazione somma (delle due) sul mapping cone è definita da:

$$F^p(B^{\bullet} \oplus A^{\bullet \pm 1}) = F^p B^{\bullet} \oplus F^p A^{\bullet \pm 1}$$

e se d_A e d_B sono compatibili con le filtrazioni di $A^{\bullet}$ e $B^{\bullet}$ d_u lo è con la filtrazione somma.

Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di varietà algebriche di tipo finito su $\mathbf{C}$ e siano $C^{\bullet}(X, R)$, $C^{\bullet}(Y, R)$ i complessi delle cocatene singolari a coefficienti in R di X e Y rispettivamente. f induce un morfismo di complessi $f^*\colon C^{\bullet}(Y, R) \to C^{\bullet}(X, R)$: i gruppi di coomologia del mapping cone di f^* sono per definizione i gruppi di coomologia relativa di f a coefficienti in R; li denoteremo con $H^i(f, R)$.

Si ha dunque per definizione una successione esatta di coomologia relativa e si verifica subito che valgono per i gruppi appena definiti le stesse proprietà generali che valgono per i gruppi di coomologia di uno spazio topologico relativamente a un sottospazio.

In modo analogo si possono definire i gruppi di omologia relativa di f.

Possiamo munire in modo funtoriale gli $H^i(f, \mathbf{C})$ di una struttura di Hodge mista in modo che la successione esatta lunga di coomologia relativa sia una successione esatta di strutture di Hodge miste.

Se X e Y sono compatte non singolari siano $A^{\bullet}(X)$ e $A^{\bullet}(Y)$ i complessi delle forme differenziali C^{∞} su X e Y muniti della filtrazione di Hodge e della filtrazione di peso standard; il morfismo $f^*\colon A^{\bullet}(Y) \to A^{\bullet}(X)$ indotto da f è un morfismo di complessi bifiltrati: se muniamo il mapping cone di f^* della filtrazione di Hodge somma e della filtrazione di peso somma, i gruppi di coomologia relativa risulteranno muniti di due filtrazioni. Se si considera la successione di coomologia relativa evidentemente tali due filtrazioni inducono su

$$\operatorname{Ker} f^*\colon H^i(Y\mathbf{C}) \to H^i(X\mathbf{C}) \quad \text{e su} \quad H^i(X\mathbf{C})/f^* H^i(Y, \mathbf{C})$$

le loro filtrazioni di Hodge e di peso standard: se ne può concludere ([5]) che esse definiscono una struttura di Hodge mista su $H^i(f, \mathbf{C})$.

Questa è dunque estensione di due strutture di Hodge pure e se con $W.$ indichiamo come d'uso la filtrazione di peso è:

$$W_i H^i(f\mathbf{C}) = H^i(f, \mathbf{C}), \quad W_{i-1}H^i(f, \mathbf{C}) =$$
$$= \operatorname{Im}\left(H^{i-1}(X\mathbf{C}) \to H^i(f, \mathbf{C})\right), \quad W_{i-2}H^i(f, \mathbf{C}) = (0).$$

(Ciò mostra come essa sia definita su $\mathbf{Q}$.)

Se più in generale X e Y sono non singolari ma non necessariamente compatte consideriamo un diagramma commutativo, certamente esistente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cap| & & \cap| \\ \bar{X} & \xrightarrow[\bar{f}]{} & \bar{Y} \end{array}$$

tale che $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ siano non singolari compatte e $D_X = \bar{X} - X$ e $D_Y = \bar{Y} - Y$ siano divisori ad attraversamenti normali.

La costruzione delle strutture di Hodge miste sugli $H^i(f, \mathbf{C})$ può essere fatta in modo del tutto analogo a quello usato nel caso compatto salvo usare $A^{\cdot}(\bar{X}, D_X)$ e $A^{\cdot}(\bar{Y}, D_Y)$ — complessi delle forme differenziali su $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ che sono C^∞ su X e Y e hanno al più un polo semplice lungo D_X e D_Y — con le loro filtrazioni peso e di Hodge standard.

Se infine X e Y sono arbitrarie di tipo finito su $\mathbf{C}$ ci si può ricondurre al caso precedente utilizzando iperricoprimenti non singolari di $f\colon X \to Y$ ([6]).

Per dualità naturalmente anche i gruppi di omologia relativa sono muniti di strutture di Hodge miste; se si vuole queste possono anche essere definite direttamente utilizzando in luogo di $A^{\cdot}(X)$ e $A^{\cdot}(Y)$ (nel caso non singolare compatto) i loro duali algebrici muniti delle filtrazioni di Hodge e di peso duali ovvero i complessi delle correnti su X e Y.

La successione esatta lunga di coomologia relativa associata a ogni morfismo $f\colon X \to Y$ può essere spezzata in successioni esatte corte.

Ora se $0 \to A \to B \to C \to 0$ è una successione esatta di strutture di Hodge miste possiamo farle corrispondere, considerando B come estensione di C tramite A, un elemento del gruppo delle classi di isomorfismo di tutte le estensioni di C tramite A. Tale gruppo può essere identificato con:

$$\frac{\mathrm{Hom}^W(C, A)}{\mathrm{Hom}^W_F(C, A) + \mathrm{Hom}^W_{\mathbf{Z}}(C, A)}$$

ove Hom^W, Hom^W_F, $\mathrm{Hom}^W_{\mathbf{Z}}$ indicano rispettivamente gli omomorfismi compatibili con la filtrazione di peso, con la filtrazione di peso e quella di Hodge, con la filtrazione di peso e il reticolo soggiacente a C ed A — e la classe di una estensione $0 \to A \to B \to C \to 0$ si ottiene prendendo la classe nel gruppo quoziente su scritto di $S_{\mathbf{Z}} - S_F$, $S_{\mathbf{Z}}$ e S_F essendo due sezioni di $B \to C$ appartenenti a $\mathrm{Hom}^W_{\mathbf{Z}}(CB)$ e $\mathrm{Hom}^W_F(CB)$ rispettivamente ([4]). La restrizione di $S_{\mathbf{Z}} - S_F$ a $C_{\mathbf{Z}} \cap F^p C - C_{\mathbf{Z}}$ è il reticolo soggiacente a C, $F^{\boldsymbol{\cdot}}$ è come al solito la filtrazione di Hodge — composta con la proiezione $A \to A/F^pA + A_{\mathbf{Z}} = J^p(A) - J^p(A)$ è per definizione la p-esima Jacobiana di A — è indipendente dalle particolari sezioni scelte per cui a ogni estensione $0 \to A \to B \to C \to 0$ è associato un ben definito omomorfismo μ: $C_{\mathbf{Z}} \cap F^p C \to J^p(A)$ che diremo p-esimo 1-motivo, dell'estensione considerata.

È facile convincersi che gli 1-motivi delle successioni esatte corte ottenute spezzando la successione esatta lunga di coomologia (o di omologia) di un morfismo f: $X \to Y$ possano essere interpretati geometricamente in termini di una sorta di generalizzazione delle mappe di Abel-Jacobi.

Ci limiteremo qui a trattare il caso in cui X e Y siano proiettive non singolari e l'1-motivo, sia l'i-esimo della successione esatta:

$$0 \to A \to H^{2i}(f, \mathbf{C}) \to B \to 0$$

ove

$$C = \mathrm{Ker}\, f^*: H^{2i}(Y\mathbf{C}) \to H^{2i}(X\mathbf{C}) \qquad \text{e} \qquad A = \frac{H^{2i-1}(X, \mathbf{C})}{f^* H^{2i-1}(Y, \mathbf{C})}.$$

Un elemento $\xi \in C_{\mathbf{Z}} \cap F^p C$ può venire considerato come classe di un cociclo integrale c e di una forma chiusa $\omega \in F^p A^{\boldsymbol{\cdot}}(Y)$; sia b una cocatena complessa tale che: $db = c - \omega$ (consideriamo $A^{\boldsymbol{\cdot}}(Y)$ come sottocomplesso di $C^{\boldsymbol{\cdot}}(Y, \mathbf{C})$ e questo come il duale di quello delle catene C^1) e siano E ed η una cocatena integrale e una forma di $F^p A^{\boldsymbol{\cdot}}(X)$ — certamente esistente in quanto il differenziale di $A^{\boldsymbol{\cdot}}(X)$ è stretto per la filtrazione di Hodge — tali che $f^* c = dE$ e $f^* \omega = d\eta$.

$\mu(\xi)$ è allora la classe di $E - \eta - f^* b$ in

$$J^i(A) = \frac{J^i H^{2i-1}(X, \mathbf{C})}{f^* J^i H^{2i-1}(Y, \mathbf{C})}.$$

Sia ξ la classe di un ciclo algebrico z di codimensione i che possiamo supporre in posizione trasversale a f per modo che $f^{-1}(z) = w$ sia definito nel senso della teoria dell'intersezione e sia $w = d\Gamma$ — per ipotesi w è omologo a zero. È chiaro che in qualche modo Γ è il duale di Poincaré — modulo elementi di livello di Hodge i — di $E - \eta -$ $- f^* b$ e quindi che $\mu(\xi)$ coincide con la classe di $J^i(A)$ dell'immagine di w in $J^i H 2^{i-1}(X, \mathbf{C})$ tramite la mappa di Abel-Jacobi; sfortunatamente non si dispone di un calcolo adeguato sulle catene e sulle cocatene che permette di dedurre rapidamente questo fatto. Occorre perciò servirsi di un espediente: consideriamo $A^\bullet(X)$ e $A^\bullet(Y)$ come sottocomplessi dei complessi delle correnti su X e Y rispettivamente e indichiamo con $\tilde{A}^\bullet(X)$ il complesso delle correnti su X e con $\tilde{A}^\bullet(Y)$ il complesso ottenuto aggiungendo a $A(X)$ $[z]$, corrente data dall'integrazione su z, e σ, σ essendo una qualsiasi corrente di livello di Hodge i tale che $d\sigma = [z] - \omega$.

Possiamo estendere f^*: $A(X) \to A(Y)$ a una mappa f^*: $\tilde{A}^\bullet(Y) \to$ $\to \tilde{A}^\bullet(X)$ ponendo $f^*([z]) = [w]$ — corrente data dall'integrazione su w — e $f^*\sigma = c$, c essendo una qualsiasi corrente di livello di Hodge i tale che $dc = [w] - f^*\omega$.

Le inclusioni $A^\bullet(X) \to \tilde{A}^\bullet(X)$, $A^\bullet(Y) \to \tilde{A}^\bullet(Y)$ inducono un isomorfismo di strutture di Hodge in coomologia per cui possiamo sostituire

$$\tilde{A}^\bullet(X) \text{ a } A^\bullet(X) \quad \text{e} \quad \tilde{A}^\bullet(Y) \text{ a } A^\bullet(Y)$$

e prendere $\omega = c = [z]$, $E = [\Gamma]$ per cui $\mu(\xi) = [\Gamma] - \eta$.

Tenuto conto che $\eta \in F^i \tilde{A}^\bullet(X)$ e che $J^i H^{2i-1}(X\mathbf{C})$ può essere identificato con il duale di $F^{N-p+1} H^{2N-i+1}(X\mathbf{C})$ $(N = \dim_{\mathbf{C}} X)$ abbiamo in definitiva come asserito che $\mu(d(z)) = \overline{\Phi(f^{-1}(z))}$ ove $d(z)$ indica la classe in coomologia di z, Φ indica la mappa di Abel-Jacobi e la sbarra indica la classe nel quoziente

$$\frac{J^i H^{2i-1}(X, \mathbf{C})}{f^* J^i H^{2i-1}(Y, \mathbf{C})}.$$

Concludiamo esplicitando le relazioni tra quanto detto e i due teoremi menzionati all'inizio.

Per quanto riguarda il primo ciò può farsi considerando una desingolarizzazione π: $\tilde{X} \to X$ di X. La successione esatta di omologia relativa associata a π da:

$$0 \to H_1(\tilde{X}, \mathbb{C}) \to H_1(X, \mathbb{C}) \to H_1(f, \mathbb{C}) \to 0$$

e l'immagine per l'1-motivo associato a tale successione della classe in $H_1(f, \mathbb{C})$ di un 1-ciclo integrale c di X è la classe nella Jacobiana di $\tilde{X}$ del bordo del sollevamento di c a $\tilde{X}$. È chiaro a questo punto che l'1-motivo determina in qualche modo le fibre singolari di π e quindi X.

L'1-motivo che interviene in questo caso non rientra nella classe di quelli da noi considerati poco fa; è perciò un ulteriore conferma dell'ipotesi generale che abbiamo formulato.

Per quanto riguarda il secondo teorema sia X una varietà proiettiva non singolare semplicemente connessa tale che $h^{2,0}(X) = 0$ e il rango di $A^1(X)$ ($=$ gruppo dei divisori di X modulo divisori principali) sia $\geqslant 2$. Possiamo trovare una base di $A^1(X)$ composta da divisori molto ampi (scriviamo un divisore ampio come combinazione lineare degli elementi di una base qualsiasi, dividiamolo per il massimo comune divisore dei coefficienti ottenendo un divisore ampio che può essere preso come elemento di una base di $A^1(X)$ sommando multipli opportuni di tale divisore agli altri elementi della base possiamo far sì che questi siano molto ampi etc.). A tale base è associato un morfismo

$$f\colon X \to \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_k} = Y$$

che per costruzione induce un isomorfismo

$$f^* H_2(Y, \mathbb{Z}) \to H_2(X, \mathbb{Z})$$

da ciò, per il teorema di Hurewicz, segue che il duale di $\pi_3(X)_{\mathbb{C}}$ è isomorfo a $H^4(f, \mathbb{C})$.

La successione di coomologia relativa di f da:

$$0 \to H^3(X, \mathbb{C}) \to H^4(f, \mathbb{C}) \to C \to 0$$

ove $C = \operatorname{Ker} f^*\colon H^4(Y, \mathbb{C}) \to H^4(X, \mathbb{C})$.

Se si interpreta il secondo 1-motivo di tale successione secondo quanto detto si ottiene il teorema che è in [2] (il caso in cui il rango di $A^1(X)$ sia 1 può essere trattato agevolmente in modo analogo)

Ringrazio i proff. J. Carlson e H. Clemens con i quali ho discusso questo argomento.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. CARLSON, *Extensions of mixed Hodge structures*, Journées de Geometrie Algebrique d'Angers, A. Beauville Ed.

[2] J. CARLSON - H. CLEMENS, - J. MORGAN, *On the one-motif associated to π_3 of a simply connected complex projective manifold*, preprint della University of Utah.

[3] J. KING, *Global residues and intersections on a complex manifold*, Trans. A.M.S., **192**.

[4] J. MORGAN, *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S., **48**.

[5] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge - II*, Publ. Math. I.H.E.S., **40**.

[6] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge - III*, Publ. Math. I.H.E.S., **44**.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 febbraio 1981.