P. C. CRAIGHERO

**Una osservazione sulla curva di Cremona di $\mathbb{P}_k^3\ \tilde{\mathcal{C}} : \{\lambda\mu^3, \lambda^3\mu, \lambda^4, \mu^4\}$**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 65 (1981), p. 177-190

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__177_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

# Una osservazione sulla curva di Cremona di $\mathbb{P}_k^3$ $\tilde{\mathscr{C}}: \{\lambda\mu^3\ \lambda^3\mu\ \lambda^4, \mu^4\}$.

P. C. CRAIGHERO (*)

SUMMARY - It is proved that the rational quartic $\tilde{\mathscr{C}}: \{x_1 = \lambda\mu^3,\ x_2 = \lambda^3\mu,\ x_3 = \lambda^4,\ x_4 = \mu^4\}$ is not set-theoretical complete intersection of any pair of surfaces of order 3 and 4, in characteristic $p \neq 2, 3$.

Lo scopo di questa nota è di provare che la curva razionale non singolare del quarto ordine di $\mathbb{P}_k^3$, $\tilde{\mathscr{C}}$: $\{x_1 = \lambda\mu^3,\ x_2 = \lambda^3\mu,\ x_3 = \lambda^4,\ x_4 = \mu^4\}$ ove $k$ è un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 2, 3$ non è sottoinsieme intersezione completa di alcuna coppia di superficie $\tilde{\mathscr{F}}$ e $\tilde{\mathfrak{G}}$ con ordine $\tilde{\mathscr{F}} \leqslant 3$ e ordine $\tilde{\mathfrak{G}} \leqslant 4$; altrimenti detto: $\tilde{\mathscr{C}}$ non è intersezione completa di due superficie se contata con molteplicità $< 4$.

È ovvio che $\tilde{\mathscr{F}}$ e $\tilde{\mathfrak{G}}$ non possono intersecarsi completamente solo in $\tilde{\mathscr{C}}$ se ordine $\tilde{\mathscr{F}}$ = ordine $\tilde{\mathfrak{G}} = 3$, per il teorema di Bézout. È anche facile escludere che $\tilde{\mathscr{F}} \cap \tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathscr{C}}$ e che $\tilde{\mathscr{F}}$ o $\tilde{\mathfrak{G}}$ possa essere un piano o una quadrica. Il primo caso è banale, poichè $\mathscr{C}$ non è piana. Nel secondo caso si osservi che $\tilde{\mathscr{C}}$ giace su di un'unica quadrica $\tilde{\mathfrak{Q}}$: $X_1X_2 - X_3X_4 = 0$ la quale coincide con la rigata delle trisecanti di $\tilde{\mathscr{C}}$. Ora, se una curva $\tilde{\mathscr{C}}'$ è intersezione completa di una superficie $\tilde{\mathfrak{K}}$ e di una quadrica $\tilde{\mathfrak{Q}}'$ non singolare, allora $\tilde{\mathscr{C}}'$ deve incontrare ogni retta $\tilde{g}'$ di $\tilde{\mathfrak{Q}}'$ in uno stesso numero $N$ di punti (ciascuno contato tante volte

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, via Belzoni 7, 35100 Padova.

quant'è la molteplicità di intersezione di $\tilde{\mathscr{C}}'$ e di $\tilde{\mathscr{G}}'$ in esso, valutata nell'ambito della quadrica): precisamente $N$ è il numero di punti comuni a $\tilde{\mathscr{G}}'$ e ad $\tilde{\mathfrak{K}}$. Ebbene, ciò non accade per $\tilde{\mathscr{C}}$ la quale incontra le generatrici di un sistema su $\tilde{\mathfrak{Q}}$ in tre punti (distinti o variamente coincidenti) e quelle dell'altro in un punto (con intersezione trasversale).

Rimane da escludere il caso in cui ordine di $\tilde{\mathscr{F}} = 3$ e ordine di $\tilde{\mathcal{G}} = 4$. Questo caso era già stato escluso da L. Godeaux (cfr. [1], pag. 53) e da D. Gallarati (cfr. [2], pag. 56 e segg.) nelle ipotesi che $\tilde{\mathscr{F}}$ fosse priva di rette singolari e che $\tilde{\mathscr{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ possedessero su $\tilde{\mathscr{C}}$ solamente punti doppi biplanari di tipo $B_3$. Per escluderlo in qualunque caso, si procederà come segue. Notiamo che, se $\tilde{\mathscr{C}}$ fosse l'intersezione di una cubica $\tilde{\mathscr{F}}$ e di una quartica $\tilde{\mathcal{G}}$, risulterebbe $\tilde{\mathscr{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 3\tilde{\mathscr{C}}$ e, se $\mathscr{F}$ e $\mathcal{G}$ denotano le superficie affini $\mathscr{F} = \tilde{\mathscr{F}} \cap \mathbb{A}_k^3$, $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}} \cap \mathbb{A}_k^3$ ove $\mathbb{A}_k^3$ è lo spazio affine su $k$ pensato immerso in $\mathbb{P}_k^3$ tramite la mappa

$$(X_1, X_2, X_3) \to (X_1, X_2, X_3, 1)\,,$$

si avrà ancora $\mathscr{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathscr{C}$ ove $\mathscr{C} = \tilde{\mathscr{C}} \cap \mathbb{A}_k^3$: $\{x_1 = t,\ x_2 = t^3,\ x_3 = t^4\}$. Viceversa se $\mathscr{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due superficie affini di $\mathbb{A}_k^3$ con ordine $\mathscr{F} = 3$ e ordine $\mathcal{G} = 4$ e risulta $\mathscr{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathscr{C}$, sarà (per Bézout) pure $\tilde{\mathscr{F}} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 3\tilde{\mathscr{C}}$, ove $\tilde{\mathscr{F}}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathscr{C}}$ denotano (come anche nel seguito) le chiusure proiettive di $\mathscr{F}$, $\mathcal{G}$ e $\mathscr{C}$ in $\mathbb{P}_k^3$. Pertanto ci si porrà direttamente nello spazio affine $\mathbb{A}_k^3$ il cui elemento generico sarà denotato più semplicemente $(X, Y, Z)$ per provare la seguente

PROPOSIZIONE. *Non esiste in $\mathbb{A}_k^3$, ove $k$ è un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 2, 3$, alcuna coppia di superficie $(\mathscr{F}, \mathcal{G})$ con ordine $\mathscr{F} = 3$ e ordine $\mathcal{G} = 4$ tali che sia $\mathscr{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathscr{C}$, con $\mathscr{C}$: $\{x = t,\ y = t^3,\ z = t^4\}$. Se $p = 3$ una tale coppia di superficie esiste ed è $\mathscr{F}_1$: $Y - X^3 = 0$ e $\mathcal{G}_1$: $Y^4 - Z^3 = 0$.*

OSSERVAZIONE. Più volte, durante il corso della dimostrazione che segue si incontreranno deduzioni simili a questa:

$$\{12c = 0,\ c \in k\} \Rightarrow \{c = 0\}$$

perchè la caratteristica di $k$ è $p \neq 2, 3$. Passeremo in tali casi senza altro alla conclusione, senza menzionare di volta in volta che essa segue dall'ipotesi fatta sulla caratteristica di $k$.

Dimostrazione. Si considerino due qualsiasi superficie ridotte $\mathcal{F}$ di ordine 3 e $\mathcal{G}$ di ordine 4 appartenenti rispettivamente al sistema lineare di dimensione 6 delle superficie cubiche passanti per $\mathscr{C}$ e al sistema lineare di dimensione 17 delle superficie quartiche passanti per $\mathscr{C}$. Ordinandone le equazioni secondo le potenze decrescenti di $Z$ si ottiene

$$\mathcal{F}\colon\ F = A_2 Z^2 + A_1 Z + A_0 = 0\ ; \tag{1}$$

$$\mathcal{G}\colon\ G = B_3 Z^3 + B_2 Z^2 + B_1 Z + B_0 = 0 \tag{2}$$

ove si ha

$$A_0 = a_1 Y - a_2 XY + a_5 Y^2 - a_3 X^2 Y - a_4 XY^2 - a_1 X^3 - a_7 Y^3\ ;$$

$$A_1 = a_2 + a_3 X + a_4 Y - a_6 XY - a_5 X^2\ ;$$

$$A_2 = a_6 + a_7 X\ ;$$

$$\begin{aligned} B_0 = b_1 Y + b_3 XY + b_6 Y^2 - b_4 X^2 Y + b_{10} XY^2 - b_1 X^3 + \\ + b_{14} Y^3 - (b_8 + b_7) X^2 Y^2 - (b_9 + b_6) X^3 Y - \\ - (b_{17} + b_{11}) XY^3 - (b_2 + b_3) X^4 - (b_{16} + b_{15}) Y^4\ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 = b_2 + b_4 X + b_5 Y + b_8 XY + b_9 X^2 + \\ + b_{11} Y^2 - b_{13} XY^2 - (b_{14} + b_{12}) X^2 Y - (b_{10} + b_5) X^3 + b_{18} Y^3\ ; \end{aligned}$$

$$B_2 = b_7 + b_{12} X + b_{13} Y + b_{16} XY + b_{17} X^2\ ;$$

$$B_3 = b_{15} - b_{18} X\ .$$

Consideriamo pure le espressioni delle derivate parziali di $F$ e di $G$ calcolate nel punto generico di $\mathscr{C}(t, t^3, t^4)$ ove $t$ è una trascendente su $k$.

$$F_X(t, t^3, t^4) = a_7 t^8 - a_6 t^7 - a_4 t^6 - 2a_5 t^5 - a_3 t^4 - a_2 t^3 - 3a_1 t^2\ ,$$

$$F_Y(t, t^3, t^4) = -3a_7 t^6 - a_6 t^5 - a_4 t^4 + 2a_5 t^3 - a_3 t^2 - a_2 t + a_1\ ,$$

$$F_Z(t, t^3, t^4) = 2a_7 t^5 + a_6 t^4 + a_4 t^3 - a_5 t^2 + a_3 t + a_2\ ;$$

$$\begin{aligned} G_X(t, t^3, t^4) = -b_{18} t^{12} + b_{16} t^{11} - b_{13} t^{10} + \\ + (b_{17} - b_{11}) t^9 - (2b_{14} + b_{12}) t^8 - (b_8 + 2b_7) t^7 - \\ - (2b_{10} + 3b_5) t^6 - (b_9 + 3b_6) t^5 - b_4 t^4 - (4b_2 + 3b_3) t^3 - 3b_1 t^2\ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_Y(t, t^3, t^4) = {} & 3b_{18}t^{10} - (3b_{16} + 4b_{15})t^9 - b_{13}t^8 - \\
& - (3b_{17} + b_{11})t^7 + (2b_{14} - b_{12})t^6 - (b_8 + 2b_7)t^5 + \\
& + (b_5 + 2b_{10})t^4 + (b_6 - b_9)t^3 - b_4 t^2 + b_3 t + b_1 , \\
G_Z(t, t^3, t^4) = {} & -2b_{18}t^9 + (2b_{16} + 3b_{15})t^8 + b_{13}t^7 + (b_{11} + 2b_{17})t^6 + \\
& + (b_{12} - b_{14})t^5 + (b_8 + 2b_7)t^4 - b_{10}t^3 + b_9 t^2 + b_4 t + b_2 .
\end{aligned}
$$

Ricordiamo ora che $\mathscr{C}$ non può essere luogo di punti singolari per $\mathcal{F}$ nè per $\mathcal{G}$, quest'ultimo fatto essendo dovuto alla circostanza che $\mathscr{C}$ ammette infinite trisecanti che sono un sistema di generatrici della quadrica $\mathcal{Q}$ di cui si è parlato sopra: ognuna di tali trisecanti incontrando la $\mathcal{G}$ in almeno 6 punti, deve appartenere alla $\mathcal{G}$ la quale risulterebbe quindi riducibile in $\mathcal{Q}$ ed in un'altra quadrica che deve necessariamente coincidere con $\mathcal{Q}$. Come si vede facilmente non può aversi inoltre $F_Y(t, t^3, t^4) = 0$ o $F$ sarebbe il polinomio nullo. Quindi la molteplicità di intersezione di $\mathcal{F}$ e del cilindro $\Gamma$: $Z - X^4 = 0$ (proiettante $\mathscr{C}$ da $Y_\infty$) lungo $\mathscr{C}$ deve essere eguale ad 1: se dunque $\bar{X}$ e $\bar{Z}$ denotano le proiezioni canoniche di $X$ e di $Z$ nell'anello locale $\mathfrak{R}$ di $\mathcal{F}$ in $\mathscr{C}$ e $\mathfrak{V}_{\mathscr{C}}$ la valutazione di $\mathfrak{R}$, $u = \bar{X} - \bar{Z}^4$ è un parametro uniformizzante di $\mathfrak{R}$.

Consideriamo infine le equazioni di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ ordinate secondo le potenze decrescenti di $Y$:

$$
\mathcal{F}:\ F = C_3 Y^3 + C_2 Y^2 + C_1 Y + C_0 = 0 , \tag{3}
$$

$$
\mathcal{G}:\ G = D_4 Y^4 + D_3 Y^3 + D_2 Y^2 + D_1 Y + D_0 \tag{4}
$$

ove si ha:

$$C_3 = -a_7 ;$$

$$C_2 = a_5 - a_4 X ;$$

$$C_1 = a_1 - a_2 X + a_4 Z - a_6 XZ - a_3 X^2 ;$$

$$C_0 = a_2 Z + a_3 XZ + a_6 Z^2 - a_5 X^2 Z + a_7 XZ^2 - a_1 X^3 ;$$

$$D_4 = -(b_{16} + b_{15}) ;$$

$$D_3 = b_{14} - (b_{17} + b_{11})X + b_{18} Z ;$$

$$D_2 = b_6 + b_{10} X + b_{11} Z - b_{13} XZ - (b_8 + b_7) X^2 ;$$

$$D_1 = b_1 + b_3X + b_5Z + b_8XZ - b_4X^2 + b_{13}Z^2 + \\ + b_{16}XZ^2 - (b_{14} + b_{12})X^2Z - (b_9 + b_6)X^3 ;$$

$$D_0 = b_2Z + b_4XZ + b_7Z^2 + b_9X^2Z + b_{12}XZ^2 - b_1X^3 + b_{15}Z^3 + \\ + b_{17}X^2Z^2 - (b_{10} + b_5)X^3Z - b_{18}XZ^3 - (b_2 + b_3)X^4 .$$

Ora supponiamo che $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = 3\mathcal{C}$ e deduciamone un assurdo, col che la prima parte della proposizione risulterà provata.

Riferendoci alle equazioni (1) e (2) di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ cominciamo con l'osservare che dovrà essere

$$\text{(5)} \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_7 \\ b_{15} & -b_{18} \end{vmatrix} = 0 .$$

La (5) è evidente se $Z_\infty(0, 0, 1, 0) \in \tilde{\mathcal{C}}$ è doppio per $\tilde{\mathcal{F}}$ o $\tilde{\mathcal{G}}$; se è semplice per entrambe, essendo anche $\tilde{\mathcal{F}}\cdot\tilde{\mathcal{G}} = 3\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ devono avere lo stesso piano tangente in $Z_\infty$. Poichè i piani tangenti in $Z_\infty$ ad $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ sono rispettivamente quelli di equazioni omogene $a_6X_4 + a_7X = 0$, e $b_{15}X_4 - b_{18}X = 0$, la (5) ne segue ancora.

Supponiamo allora che $Z_\infty$ sia punto doppio per $\tilde{\mathcal{F}}$ e cioè che

$$\boxed{a_6 = a_7 = 0} \, .$$

Poichè, se $a_7 = 0$, la forma di grado massimo di $F$ è

$$X(-a_6YZ - a_5XZ - a_3XY - a_4Y^2 - a_1X^2) ,$$

ciò comporta che $\tilde{\mathcal{F}} \cap \{X_4 = 0\} \supset \widetilde{\{X = 0\}} \cap \{X_4 = 0\}$; quindi si ha che $\tilde{\mathcal{G}} \not\ni Y_\infty \in \tilde{\mathcal{F}}$ perchè $\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{C}}$ e $\tilde{\mathcal{C}} \cap \{X_4 = 0\} = \{Z_\infty\}$. $Y_\infty \notin \tilde{\mathcal{G}}$ implica che $D_4 = -(b_{16} + b_{15}) \neq 0$. D'altra parte dalla $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G} = 3\mathcal{C}$ discende in particolare che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ hanno in ogni loro punto $P \in \mathcal{C}$, semplice per entrambe, lo stesso piano tangente: questo comporta in particolare

$$\text{(6)} \qquad \begin{vmatrix} F_X(t, t^3, t^4) & G_X(t, t^3, t^4) \\ F_Y(t, t^3, t^4) & G_Y(t, t^3, t^4) \end{vmatrix} = 0 .$$

Da (6) discende subito che $b_{18} = 0$ o $F$ sarebbe di nuovo il polinomio nullo. Per brevità il determinante in (6) sarà indicato con $D(t)$. Se fosse allora $a_4 \neq 0$ si troverebbe

$$0 = D(t) = 4a_4(b_{16} + b_{15})t^{15} + H_1(t)$$

ove $H_1(t)$, se non è nullo, è un polinomio di grado inferiore a 15: assurdo. Quindi

$$\boxed{a_4 = 0}\,.$$

Ora, poichè $Y_\infty \notin \tilde{\mathcal{G}}$ e $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathscr{C}$, il risultante di $F$ e $G$ rispetto a $Y$, che denoteremo con $\mathrm{Res}_Y(F, G)$, deve coincidere, a meno di una costante $c \in k - \{0\}$, con una potenza di $Z - X^4$, primo membro dell'equazione di $\Gamma$, cilindro proiettante $\mathscr{C}$ da $Y_\infty$. D'altra parte è noto che esistono opportuni polinomi $A$ e $B$ tali che

$$\mathrm{Res}_Y(F, G) = AF + BG = c(Z - X^4)^r\,, \tag{7}$$

$$(A, B \in k[X, Y, Z[;\ c \in k - \{0\})\,.$$

Passando alle proiezioni canoniche nell'anello locale $\mathfrak{R}$ di $\mathcal{F}$ in $\mathscr{C}$, la (7) dà luogo alla

$$\bar{B}\bar{G} = c(\bar{Z} - \bar{X}^4)^r\,. \tag{8}$$

Valutando secondo $\mathfrak{V}_{\mathscr{C}}$ entrambi i membri di (8) e ricordando quanto sopra detto per $u = \bar{Z} - \bar{X}^4$, cioè che $u$ è un parametro uniformizzante per $\mathfrak{R}$, si trova che

$$3 \leqslant \mathfrak{V}_{\mathscr{C}}(\bar{B}) + \mathfrak{V}_{\mathscr{C}}(\bar{G}) = \mathfrak{V}_{\mathscr{C}}(c) + \mathfrak{V}_{\mathscr{C}}(u^r) = 0 + r = r\,.$$

Non è d'altro canto difficile rendersi conto col calcolo diretto che il polinomio $\mathrm{Res}_Y(F, G)$ non può in nessun caso avere un grado $> 12$ e pertanto si conclude che $r = 3$.

Supponiamo ora che $a_5 \neq 0$. Posto $\mathrm{Res}_Y(F, G) = R(X, Z)$, calcolando $R(0, Z)$ si trova, tenuto conto di (8),

$$R(0, Z) = b_{15}^2 a_5^4 Z^6 + \Phi_1$$

ove $\Phi_1$, se non è nullo, è un polinomio in $Z$ di grado minore di 6: si ha dunque $b_{15} = 0$. Ora, dalla (6) si trova

$$0 = D(t) = 4a_5 b_{16} t^{14} + H_2(t)$$

ove $H_2(t)$, se non è nullo, è un polinomio in $t$ di grado minore di 14: perciò $b_{16} = 0$. Ma allora $D_4 = -(b_{16} + b_{15}) = 0$, contro quanto sopra riconosciuto. Si conclude che l'ipotesi $a_5 \neq 0$ è impossibile. È quindi

$$\boxed{a_5 = 0}\,.$$

Dalla (6) troviamo allora

$$0 = D(t) = 4a_3(b_{16} + b_{15})t^{13} + 4a_2(b_{16} + b_{15})t^{12} + H_3(t)$$

dove $H_3(t)$, se non è nullo, è un polinomio di grado minore di 12. Ne segue

$$\boxed{a_2 = a_3 = 0}\,.$$

A questo punto è $\mathcal{F}$: $F = a_1(Y - X^3) = 0$ con $a_1 \in k - \{0\}$. Si ha allora

$$\mathrm{Res}_Y(F, G) = dG(X, X^3, Z) = c(Z - X^4)^3\,, \qquad d \in k - \{0\}\,.$$

Come si può subito vedere però, $G(X, X^3, Z)$ ha il coefficiente di $X^8Z$ che è nullo, mentre $(Z - X^4)^3$, se la caratteristica è $p \neq 3$, ha codesto coefficiente non nullo. Questa contraddizione riduce all'assurdo l'ipotesi che $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ abbia $Z_\infty$ come punto doppio.

Passiamo allora a considerare il caso in cui $Z_\infty$ è punto semplice per $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ e quindi (cfr. (1)) $(a_6, a_7) \neq (0, 0)$. Per la (5) è allora

$$(b_{15}, -b_{18}) = (\varrho a_6, \varrho a_7) \qquad \text{con } \varrho \in k\,.$$

Sia allora $\mathcal{G}'$: $G' = G - \varrho ZF = 0$. Il divisore definito su $\mathcal{F}$ dal polinomio $G'$ è ancora $3\mathscr{C}$. Questo significa che $\mathcal{G}'$ è una superficie irriducibile del quarto ordine, che $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}' = 3\mathscr{C}$ e che $\tilde{\mathcal{G}}'$, come si deduce subito da (2) e dalla definizione di $G'$, ha un punto almeno doppio in $Z_\infty$. Per comodità notativa indicheremo la nuova quartica ancora con $\mathcal{G}$, la sua equazione essendo la (2), dove attualmente si ha

$$\boxed{b_{15} = b_{18} = 0}\,.$$

Supponiamo ora che sia $a_7 = 0$, e dunque $a_6 \neq 0$. Come in precedenza si conclude allora che $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} \supset \widetilde{\{X = 0\}} \cap \{X_4 = 0\} \ni Y_\infty$, donde $\tilde{\mathcal{G}} \not\ni Y_\infty$ e quindi $b_{16} \neq 0$. Troviamo, nelle ipotesi attuali, e sussistendo sempre la (6),

$$0 = D(t) = 4a_6 b_{16} t^{16} + H_3(t) \tag{10}$$

ove $H_3(t)$, se non è nullo, è un polinomio in $t$ di grado minore di 16. Ma la (10) è assurda, essendo attualmente $4a_6 b_{16} \neq 0$. Dunque si ha

$$\boxed{a_7 \neq 0}\,.$$

In tale situazione $Y_\infty \notin \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$: con considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza, si conclude che anche ora il $\mathrm{Res}_Y(F, G)$ deve coincidere a meno di una costante non nulla $c \in k$ con il polinomio $(Z - X^4)^3$. Si consideri allora la superficie

$$\mathcal{G}'' \colon G'' = G + \frac{1}{a_7}[b_{14} - (b_{17} + b_{11})X - b_{16}Y]F = 0\,.$$

Il divisore definito su $\mathcal{F}$ dal polinomio $G''$ è ancora $3\mathscr{C}$, dunque $\mathcal{G}''$ è una superficie quartica irriducibile, con $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}'' = 3\mathscr{C}$; $\tilde{\mathcal{G}}''$ ha inoltre un punto almeno doppio in $Z_\infty$ e un altro punto almeno doppio in $Y_\infty$. Procediamo come sopra e chiamiamo $\mathcal{G}''$ ancora $\mathcal{G}$: la sua equazione sia ancora la (2), o la (4), ove si ha attualmente

$$\boxed{b_{15} = b_{18} = b_{16} = b_{14} = b_{17} + b_{11} = 0}\,.$$

In tale situazione la (6) fornisce

$$\begin{aligned} 0 = D(t) &= (-4a_7 b_{13})\, t^{16} + (-4a_{7\,11})\, t^{15} + \\ &+ (-4a_7 b_{12} + 4a_6 b_{17})\, t^{14} + [-4a_7(b_8 + 2b_7) + 4(a_4 b_{17} + a_5 b_{13})]\, t^{13} + H_4(t) \end{aligned} \tag{11}$$

ove $H_4(t)$, se non è nullo, ha grado inferiore a 13. Dalla (11) si ricava

$$\boxed{b_{11} = b_{13} = 0}$$

e, dalla $b_{17} + b_{11} = 0$, deduciamo anche

$$\boxed{b_{17} = 0} ;$$

dalla (11), ora, si trae

$$\boxed{b_{12} = b_8 + 2b_7 = 0} .$$

Supponiamo, a questo punto, che sia $b_8 + b_7 \neq 0$, quindi (cfr. (4)) $D_2 \neq 0$.

L'equazione di $\mathcal{G}$ risulta dunque attualmente di grado 2 rispetto a $Y$, mentre quella di $\mathcal{F}$ è di grado 3. La matrice risultante di $F$ e $G$ rispetto a $Y$ è ora una matrice $5 \times 5$ e il suo determinante, $\mathrm{Res}_Y(F, G)$, deve essere, come visto in precedenza, $(Z - X^4)^3$ a meno di una costante non nulla di $k$, che chiameremo ancora $c$: posto ancora $\mathrm{Res}_Y(F, G) = R(X, Z)$, calcolando si trova

$$R(0, Z) = c(Z - 0^4)^3 = cZ^3 = a_7^2 b_7^3 Z^6 + \Phi_2 \tag{12}$$

ove $\Phi_2$ è un polinomio in $Z$ che, se non è nullo, ha ordine minore di 6. Dalla (12) si trae $b_7 = 0$. Dalla $b_8 + 2b_7 = 0$ si deduce allora che $b_8 = 0$. Dunque si conclude che $b_8 + b_7 = 0$, contro l'assunto iniziale. Questa contraddizione prova che $b_8 + b_7 = 0$. Questa eguaglianza, assieme alla $b_8 + 2b_7 = 0$, dedotta in precedenza, implica

$$\boxed{b_7 = b_8 = 0} .$$

Supponiamo ora che sia $(b_{10}, b_6) \neq (0, 0)$.

Calcolando $\mathrm{Res}_Y(F, G)$ si trova

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_Y(F, G) = \\ &= \alpha X^{12} + \beta X^{11} Z + \gamma X^{10} Z^2 + \delta X^9 Z^3 + \Psi = c(Z - X^4)^3 \end{aligned} \tag{13}$$

ove si ha

$$\alpha = a_1 a_7 (b_9 + b_6)^3 + a_4 a_7 (b_2 + b_3)^2 (b_9 + b_6) -$$
$$- a_7^2 (b_2 + b_3)^3 - a_3 a_7 (b_2 + b_3)(b_9 + b_6)^2 ;$$

$$\beta = a_7 a_5 (b_9 + b_6)^3 + 2 a_7 a_4 (b_{10} + b_5)(b_9 + b_6)(b_2 + b_3) -$$
$$- 3 a_7^2 (b_{10} + b_5)(b_2 + b_3)^2 - a_7 a_6 (b_2 + b_3)(b_9 + b_6)^2 - a_7 a_3 (b_{10} + b_5)(b_9 + b_6)^2 ;$$

$$\gamma = - a_7^2 (b_9 + b_6)^3 + a_4 a_7 (b_{10} + b_5)^2 (b_9 + b_6) -$$
$$- 3 a_7^2 (b_{10} + b_5)^2 (b_2 + b_3) - a_7 a_6 (b_{10} + b_5)(b_9 + b_6)^2 ;$$

$$\delta = - a_7^2 (b_{10} + b_5)^3 ;$$

e $\Psi$ è un polinomio di $k[X, Z]$ che non contiene alcun monomio a coefficiente non nullo in $X^{12}$, $X^{11}Z$, $X^{10}Z^2$, $X^9Z^3$. Dalla (13), poichè il polinomio $c(Z - X^4)^3$ ha i coefficienti di $X^9Z^3$ e $X^{10}Z^2$ nulli, si deduce allora che $\gamma = \delta = 0$. Ma

$$\{\delta = 0\} \Rightarrow \{b_{10} + b_5 = 0\} \Rightarrow \{- a_7^2 (b_9 + b_6) = \gamma = 0\} \Rightarrow \{b_9 + b_6 = 0\} .$$

Dalla (6) si trae quindi

$$0 = D(t) = - 4 a_7 (b_{10} + 2 b_5) t^{12} - \tag{14}$$
$$- 4 [a_7 (b_9 + 2 b_6) + a_6 (b_5 + b_{10})] t^{11} + H_5(t)$$

ove $H_5(t)$ è un polinomio che, se non è nullo, ha ordine minore di 11.

Dalla (14) segue che $b_{10} + 2b_5 = 0$ che, assieme alla $b_{10} + b_5 = 0$, implica

$$b_5 = b_{10} = 0 .$$

Dalla (14) segue ora $b_9 + 2b_6 = 0$ che, assieme alla $b_9 + b_6 = 0$, implica

$$b_6 = b_9 = 0 .$$

In particolare si è ottenuto che

$$(b_{10}, b_6) = (0, 0)$$

che è una contraddizione rispetto all'ipotesi di partenza $(b_{10}, b_6) \neq$ $\neq (0,0)$. Questa è dunque impossibile e dunque necessariamente si ha

$$\boxed{b_6 = b_{10} = 0}\,.$$

Torniamo ora alla (6): tenendo presente l'attuale situazione si trova, calcolando,

$$(15) \qquad 0 = D(t) = -8a_7 b_5 t^{12} - 4(a_7 b_9 + a_6 b_5)\, t^{11} -$$
$$- 4(a_7 b_4 + a_4 b_5)\, t^{10} + H_6(t)$$

ove $H_6(t)$ è un polinomio in $t$ che, se non è nullo, ha grado minore di 10. Dalla (15) si ricava che

$$\boxed{b_5 = b_9 = b_4 = 0}\,.$$

Supponiamo ora che sia $(b_1, b_3) \neq (0, 0)\cdot \mathrm{Res}_Y(F, G)$ è ora il determinante di una matrice $4\times 4$ e, calcolando, si trova

$$(16) \qquad \mathrm{Res}_Y(F, G) =$$
$$= -a_7(b_2 + b_3)^3 X^{12} - 3a_7 b_1(b_2 + b_3)^2 X^{11} + \Phi_3 = c(Z - X^4)^3$$

ove $\Phi_3$ è un polinomio in $X$ e $Z$ che non contiene alcun monomio a coefficiente non nullo in $X^{12}$ e $X^{11}$. Dalla (16) si deduce che deve essere

$$b_2 + b_3 \neq 0$$

e quindi che

$$b_1 = 0\,;$$

allora $b_3 \neq 0$. Calcolando di nuovo ora $\mathrm{Res}_Y(F, G)$ troviamo

$$(17) \qquad \mathrm{Res}_Y(F, G) = -a_7(b_2 + b_3)^3 X^{12} - b_3 a_4(b_2 + b_3)^2 X^{10} +$$
$$+ b_3 a_5(b_2 + b_3)^2 X^9 + \Phi_4 = c(Z - X^4)^3\,,$$

ove $\Phi_4$ è un polinomio in $X$ e $Z$ che non contiene alcun monomio a coefficiente non nullo in $X^{12}$, $X^{10}$ e $X^9$. Da (17) segue dunque

$$a_4 = a_5 = 0 .$$

Ricalcolando ancora $\operatorname{Res}_Y(F, G)$ tenendo conto di queste ultime eguaglianze troviamo

$$\begin{aligned}(18) \qquad \operatorname{Res}_Y(F, G) = & -a_7(b_2 + b_3)^3 X^{12} + \\ & + 3a_7 b_2 (b_2 + b_3)^2 X^8 Z - b_3^2 a_3 (b_2 + b_3) X^8 - \\ & - b_3^2 a_6 (b_2 + b_3) X^7 Z - b_3^2 a_2 (b_2 + b_3) X^7 + \Phi_5 = c(X - Z^4)^3\end{aligned}$$

ove $\Phi_5$ è un polinomio che, se non è nullo, ha grado minore di 7. Da (18) discende allora che

$$a_2 = a_3 = a_6 = 0$$

mentre deve essere $b_2 \neq 0$.

Una verifica diretta fa riconoscere che in $\operatorname{Res}_Y(F, G)$ il coefficiente di $X^2 Z$ è uguale a $-b_3^2 b_2 a_1$. Poichè $b_2$ e $b_3$ sono diversi da 0, attualmente, si dovrà avere anche

$$a_1 = 0 .$$

Calcoliamo infine ancora una volta $\operatorname{Res}_Y(F, G)$: troviamo

$$\begin{aligned}(19) \qquad & \operatorname{Res}_Y(F, G) = \\ & = a_7[b_2^3 Z^3 + (b_3^3 - 3b_2^3 - 3b_2^2 b_3) X^4 Z^2 + 3b_2(b_2^2 + 2b_2 b_3 + b_3^2) X^8 Z - \\ & - (b_2 + b_3)^3 X^{12}] = c(Z - X^4)^3 = c(Z^3 - 3X^4 Z^2 + 3X^8 Z - X^{12}) .\end{aligned}$$

Da (19) segue che deve essere

$$\operatorname{rango} \begin{Vmatrix} b_2^3 & b_3^3 - 3b_2^3 - 3b_2^2 b_3 & 3b_2(b_2^2 + 2b_2 b_3 + b_3^2) & -(b_2 + b_3)^3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{Vmatrix} = 1$$

Quest'ultima condizione implica in particolare

$$0 = \begin{vmatrix} b_2^3 & 3b_2(b_2^2 + 2b_2 b_3 + b_3^2) \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3b_2 b_3(2b_2 + b_3) = 0 ;$$

essendo nele attuali ipotesi, $b_2 b_3 \neq 0$ ciò implica $2b_2 + b_3 = 0$. Ora consideriamo che, dalla (6), si ottiene

$$0 = D(t) = -4a_7(2b_3 + 3b_2)t^9 + H_7(t) \tag{20}$$

ove $H_7$ è un polinomio in $t$ che, se non è nullo, ha un grado inferiore a 9. Da (20) si trae $2b_3 + 3b_2 = 0$ che, assieme alla $2b_2 + b_3 = 0$, implica, in particolare, $b_2 = 0$ e ciò è in contrasto con quanto stabilito più sopra. Dunque l'ipotesi $(b_1, b_3) \neq (0, 0)$ è assurda. Nel polinomio $G$ si ha dunque necessariamente

$$\boxed{b_1 = b_3 = 0}\,.$$

Dalla (6) si deduce allora

$$0 = D(t) = -12a_7b_2t^9 \tag{21}$$

il che implica

$$\boxed{b_2 = 0}\,;$$

ma con ciò $G$ sarebbe il polinomio nullo. Questa conclusione assurda mostra che l'ipotesi iniziale $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = 3\mathscr{C}$ non può essere vera e termina così la prova della prima parte dell'enunciato.

Quanto alla seconda, si osservi che $\mathscr{C} \in \mathcal{F}_1$, che $\mathscr{C} \in \mathcal{G}_1$ e che $\tilde{\mathcal{F}}_1$ e $\tilde{\mathcal{G}}_1$ hanno in comune, sul piano $X_4 = 0$, soltanto il punto $Z_\infty (\in \tilde{\mathscr{C}})$; ora, se $(x', y', z')$ è un punto di $\mathbf{A}_k^3$ comune ad $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{G}_1$, risulta $y' = x'^3$ e $y'^4 = (x'^3)^4 = x'^{12} = z'^3$; essendo la caratteristica di $k$ $p = 3$, ne deriva che $x'^{12} - z'^3 = (x'^4 - z')^3 = 0$, cioè $z' = x'^4$. Il punto $(x', y', z')$ è dunque il punto $(x', x'^3, x'^4) \in \mathscr{C}$. Con ciò è provato che $\tilde{\mathcal{F}}_1 \cap \tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathscr{C}}$ e, per il teorema di Bézout, che $\tilde{\mathcal{F}}_1 \cdot \tilde{\mathcal{G}}_1 = 3\tilde{\mathscr{C}}$ e che, naturalmente, anche $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{G}_1 = 3\mathscr{C}$.

Osservazione. R. Hartshorne in [3] ha dimostrato, in particolare, che la quartica razionale $\tilde{\mathscr{C}}$ di cui qui si tratta, è sottoinsieme intersezione completa di due superficie $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ in caratteristica $p$, qualunque sia $p > 0$. Gli ordini di $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$, però, dipendono da $p$ e sono in ogni caso entrambi $> 4$. Inoltre che in caratteristica 3 $\mathscr{\tilde{C}}$ fosse sottoinsieme intersezione completa di una cubica e di una quartica era noto: cfr. [4].

## BIBLIOGRAFIA

[1] L. Godeaux, *Sur le contact de surfaces le long de courbes*, Bulletin de la Societé royale des Sciences de Liège, 2, pp. 46-58.

[2] D. Gallarati, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Genova, N. 88.

[3] R. Hartshorne, *Complete intersections in characteristic p*, American J. Math., **101** (1979), pp. 380-383.

[4] E. Stagnaro, *Su quintiche di Vahlen ed altre curve razionali che sono sottoinsieme intersezione completa di $P_k^3$ in caratteristica positiva*, Bollettino dell'Unione matematica italiana, (5) **17**-B (1980), pp. 278-285.

[5] K. Kendig, *Elementary Algebraic Geometry*, Springer Verlag.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 novembre 1980.