RENATO ZANOVELLO

Su un integrale fondamentale di funzioni di Struve

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 65 (1981), p. 13-17

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__13_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Su un integrale fondamentale di funzioni di Struve.

RENATO ZANOVELLO (*)

SUNTO - In questa Nota, esamino, in vista soprattutto dell'analisi numerica, l'integrale (2) per $a \gtreqless b$. Le formule ottenute, unite a quelle che si trovano in un mio precedente lavoro sull'integrale (1), permettono la risoluzione di problemi di matematica applicata ove intervengono i suddetti integrali.

ABSTRACT - In this Note, I consider the integral (2) for $a \gtreqless b$, especially from the point of view of the numerical analysis. The formulas obtained, together with the formulas that appear in a previous paper I wrote about the integral (1), permitt the resolution of problems of applied mathematics where such integrals occurr.

In un mio precedente lavoro [1], ho studiato e risolto, con particolare riferimento all'analisi numerica, il problema dell'integrale:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_{\nu-1}(ax)\, \boldsymbol{H}_\nu(bx)\, dx\,, \qquad (a>0\,,\ b>0\,,\ -\tfrac{1}{2}<\nu<1)\,,$$

di interesse applicativo oltre che teorico, ove $\boldsymbol{H}_\sigma(x)$ indica la funzione di Struve d'ordine σ. Tale integrale però, pur essendo importante in questioni di matematica applicata, non risolve alcuni casi che colà si possono presentare. Da qui deriva la necessità di studiare

(*) Indirizzo dell'A.:- Istituto di Matematica, Informatica e Sistematica, Università, Viale Ungheria 43, 33100 Udine.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

l'integrale:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, \boldsymbol{H}_\nu(bx)\, dx\,, \qquad (a>0\,,\ b>0\,,\ |\mu|+|\nu|<1)\,, \tag{2}$$

che estende i risultati da me ottenuti. È ciò che svolgo nei prossimi paragrafi, supponendo dapprima $a \neq b$ e distinguendo due casi, a seconda che sia $\nu \neq \frac{1}{2}$ oppure $\nu = \frac{1}{2}$.

§ 1. Per $a \neq b$, $\nu \neq \frac{1}{2}$, posso scrivere [2, p. 227 (17)]:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, \boldsymbol{H}_\nu(bx)\, dx = \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax) \left\{ Y_\nu(bx) + \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2}\, G^{3,1}_{1,3}\left(\frac{b^2}{4}x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2} \end{matrix} \right) \right\} dx,$$

ove $Y_\nu(x)$ indica la classica funzione di Bessel di seconda specie di ordine ν e $G^{3,1}_{1,3}$ indica una particolare funzione di Meijer $G^{m,n}_{p,q}(z)$.

Osservo ora che il problema rappresentato dall'integrale:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx \tag{4}$$

è stato da me risolto, nelle presenti ipotesi, in [3]. In particolare, cito le formule (9) e (13) di [3] per $a < b$ e le formule (10), (14) sempre di [3] per $a > b$.

Inoltre, nelle mie ipotesi, tenuto conto di [4, p. 421 (12)], posso scrivere:

$$\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2} \int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, G^{3,1}_{1,3}\left(\frac{b^2}{4}x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2} \end{matrix} \right) dx = \tag{5}$$

$$= \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2 a} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{H}_\mu(2y^{\frac{1}{2}}) G^{3,1}_{1,3}\left(\frac{b^2}{a^2} y \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{matrix}\right) dy =$$

$$= \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi^2 a} G^{4,2}_{4,4}\left(\frac{b^2}{a^2} \,\middle|\, \begin{matrix} -\frac{\mu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{\mu+1}{2}, \frac{1-\mu}{2} \\ -\frac{\mu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2} \end{matrix}\right).$$

Per il calcolo numerico delle funzioni di Meijer che si presentano nelle formule sopra citate, posso esprimere le stesse mediante funzioni ipergeometriche generalizzate ${}_pF_q$ magari utilizzando, a seconda dei valori dei parametri, le formule del cap. V di [2]; dopo di che potrò valutare le ${}_pF_q$ tramite sviluppi in serie o approssimazioni razionali (v. ad es. [5]).

Quanto anzidetto, unito alla (3), permette quindi la soluzione del mio problema, beninteso nelle ipotesi del presente paragrafo.

§ 2. Per $a \neq b$, $\nu = \frac{1}{2}$, ricordo che, in virtù di [6, p. 39 (64)], certamente posso scrivere:

$$\boldsymbol{H}_{\frac{1}{2}}(bx) = \left(\frac{2}{\pi b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}}(bx). \tag{6}$$

Sostituisco (6) in (2) e considero l'integrale:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, Y_{\frac{1}{2}}(bx)\, dx\,, \tag{7}$$

per il quale valgono, nelle mie ipotesi, le formule (9), (10) di [3] con $\nu = \frac{1}{2}$.

Inoltre è [4, p. 158 (4)]:

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{H}_\mu(ax) dx = \frac{\operatorname{tg}[(\pi/2)(\mu+\frac{1}{2})]}{2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4}+\mu/2)}{\Gamma(\frac{3}{4}+\mu/2)}. \tag{8}$$

Quanto sopraddetto porta a concludere che per $\nu = \frac{1}{2}$, valgono le seguenti formule:

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\,\boldsymbol{H}_{\frac12}(bx)\,dx = \frac{\operatorname{tg}[(\pi/2)(\mu+\frac12)]}{\pi^{\frac12}a^{\frac12}b^{\frac12}}\,\frac{\Gamma(\frac14+\mu/2)}{\Gamma(\frac34+\mu/2)}+ \tag{9}$$

$$+\frac{a^\mu b^{-\mu-1}}{\Gamma(\mu+1)}\,\frac{\Gamma(\mu/2+\frac34)}{\Gamma(\frac34-\mu/2)}\,F\left(\frac34+\frac{\mu}{2},\;\frac{\mu}{2}+\frac14;\;\mu+1;\;\frac{a^2}{b^2}\right)+$$

$$+\frac{\sin[(\pi/2)(\mu+\frac12)]}{\pi^2}\,a^\mu b^{-\mu-1}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac34\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac14\right)\Gamma\left(\frac34-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac14-\frac{\mu}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac34+\frac{\mu}{2},\;\frac{\mu}{2}+\frac14;\;1;\;1-\frac{a^2}{b^2}\right)+$$

$$+\frac{\cos(\mu\pi)}{b\pi^2}\,G^{3,3}_{4,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\left|\begin{matrix}\frac14, & \frac34, & \frac{\mu+1}{2}, & \frac54\\ \frac{\mu+1}{2}, & \frac{\mu}{2}, & -\frac{\mu}{2}, & \frac54\end{matrix}\right.\right), \qquad \left(0<a<b,\;|\mu|<\frac12\right),$$

e

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\,\boldsymbol{H}_{\frac12}(bx)\,dx = \frac{\operatorname{tg}[(\pi/2)(\mu+\frac12)]}{\pi^{\frac12}a^{\frac12}b^{\frac12}}\,\frac{\Gamma(\frac14+\mu/2)}{\Gamma(\frac34+\mu/2)}+ \tag{10}$$

$$+\frac{b^{\frac12}\Gamma(\mu/2+\frac34)}{a^{\frac32}\Gamma(\frac32)\Gamma(\mu/2+\frac14)}\,F\left(\frac{\mu}{2}+\frac34,\;\frac34-\frac{\mu}{2};\;\frac32;\;\frac{b^2}{a^2}\right)+$$

$$+\frac{\sin[\pi/2))(\mu+\frac12)]}{\pi^2}\cdot\frac{b^{\frac12}}{a^{\frac32}}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac34\right)\Gamma\left(\frac34-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac14\right)\Gamma\left(\frac14-\frac{\mu}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{\mu}{2}+\frac34,\;\frac34-\frac{\mu}{2};\;1;\;1-\frac{b^2}{a^2}\right)+$$

$$+\frac{\cos(\mu\pi)}{b\pi^2}\,G^{3,3}_{4,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\left|\begin{matrix}\frac14, & \frac34, & \frac{\mu+1}{2}, & \frac54\\ \frac{\mu+1}{2}, & \frac{\mu}{2}, & -\frac{\mu}{2}, & \frac54\end{matrix}\right.\right), \qquad \left(0<b<a,\;|\mu|<\frac12\right).$$

§ 3. Rimane da esaminare il caso $a=b$, cominciando da $\nu\neq\frac12$. A tal fine, è noto che l'integrale (4) diverge [3]; ciò porta ad affermare, ferma restando la (5) e tenuto conto anche della (3), ancora valida, che l'integrale (2) è divergente.

Per $\nu = \frac{1}{2}$, avendo presenti le (6), (8), nonchè il fatto che l'integrale (7) diverge in questo caso [3], posso dire che l'integrale (2) è ancora divergente.

In conclusione, per $a = b$, l'integrale (2) diverge sempre.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ZANOVELLO, *Su un integrale definito del prodotto di due funzioni di Struve*, Atti Acc. Scienze, Torino, **112**, I-II (1978), pp. 63-81.

[2] Y. L. LUKE, *The Special Functions and Their Approximations*, Vol. I, Academic Press, 1969.

[3] R. ZANOVELLO, *Su un integrale definito del prodotto di funzioni di Bessel e di Struve*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **64** (1981).

[4] A. ERDELYI - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, Mac Graw-Hill, 1954.

[5] Y. L. LUKE, *Algorithms for the Computation of Mathematical Functions*, Academic Press, 1977.

[6] A. ERDELYI, - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, Mac Graw-Hill, 1953.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 giugno 1980.