

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. STAZI

Sul teorema di Liouville per deformazioni conformi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 64 (1981), p. 85-92

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__85_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sul teorema di Liouville per deformazioni conformi. (*)

L. STAZI (**)

Nell'ambito delle deformazioni finite, si chiamano *condizioni di congruenza* i sei legami differenziali di 2° ordine che devono essere soddisfatti da un tensore simmetrico, perchè esista uno spostamento regolare ⁽¹⁾ che lo ammetta come *tensore di deformazione*. Si tratta in sostanza delle equazioni che traducono il contenuto delle classiche condizioni di De Saint Venant, ove si completi la parte linearizzata delle caratteristiche di deformazione con i termini di 2° grado (caratteristiche complete) ⁽²⁾. Nell'ampia letteratura relativa alle condizioni di congruenza (cfr. ad es. [10], p. 272), ci limitiamo qui a ricordare una pregevole *forma vettoriale* dovuta a Signorini [8], relativa alla deformazione pura ⁽³⁾ e quella *tensoriale di Graiff* [5], riguardante direttamente il tensore di deformazione ⁽⁴⁾.

Di un certo interesse anche la *forma intrinseca* [2], relativa ai coefficienti principali e alla terna principale di deformazione.

Scopo di questo breve studio è di ritrovare direttamente, attraverso le condizioni di congruenza, con metodo geometrico, più che

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R. e del M.P.I. (art. 286 T.U.).

(**) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico «Castelnuovo» - Città Universitaria - Roma.

⁽¹⁾ Naturalmente definito a meno di un arbitrario spostamento rigido.

⁽²⁾ La parte simmetrica del gradiente di spostamento caratterizza le deformazione solo per spostamenti infinitesimi. Di qui la denominazione di « *caratteristiche linearizzate di deformazione* ».

⁽³⁾ Si vuol dire più precisamente la radice quadrata del tensore di deformazione di Green.

⁽⁴⁾ Per il caso « duale » si cfr. Pastrone [6].

analitico, e senza l'uso di coordinate speciali, il classico teorema di *Liouville* (cfr. *Bianchi* [1], pag. 373 e segg.): *ogni deformazione conforme (in tre dimensioni) equivale ad una omotetia diretta o ad una anti-inversione per raggi vettori reciproci.*

1. Premesse.

Indichiamo con C_* una *configurazione di riferimento* di un sistema continuo tridimensionale S ; una posizione cioè effettivamente occupata da S ad un determinato istante t_* ovvero, più in generale, una posizione scelta comunque tra tutte quelle di cui esse è suscettibile. Con C indicheremo invece la *configurazione attuale* di S , relativa cioè all'istante generico t che, in quanto segue, figurerà come un parametro prefissato.

Introdotta in C_* (e quindi in C) un sistema di coordinate generali $\{X^\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), nonché le relative basi associate localmente $\{\mathbf{G}_\alpha\}$ e $\mathbf{g}_\alpha\}$, la metrica sarà espressa, in C_* e in C rispettivamente, dai tensori simmetrici:

$$(1) \quad G_{\alpha\beta}(X) \equiv \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta, \quad g_{\alpha\beta}(X) \equiv \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta.$$

Con $G^{\alpha\beta}$ e $g^{\alpha\beta}$ indicheremo i coefficienti delle due metriche in forma contravariante:

$$(2) \quad G_{\alpha\varrho} G^{\varrho\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad g_{\alpha\varrho} g^{\varrho\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

È chiaro che, assegnata arbitrariamente in C_* la metrica attuale $g_{\alpha\beta}$, ovvero il tensore simmetrico (*deformazione diretta*):

$$(3) \quad E_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}),$$

non esiste, in generale, uno spostamento $\mathbf{s}(X)$ regolare, a partire da C_* , che ammetta le $E_{\alpha\beta}$ come caratteristiche di deformazione; cioè uno spostamento che verifichi, in tutto C_* , il sistema alle derivate parziali

$$(4) \quad E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \mathbf{s} \cdot \mathbf{G}_\beta + \partial_\beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{G}_\alpha) + \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathbf{s} \cdot \partial_\beta \mathbf{s} \quad \left(\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \right).$$

Perchè ciò accada, si richiede che le $E_{\alpha\beta}$ rendano soddisfatte sei condizioni di compatibilità (*condizioni di congruenza*) che, in sostanza,

traducono l'euclideanità della configurazione attuale C , e quindi l'annullarsi del tensore di curvatura $R_{\mu\alpha\varrho\beta}$ associato alla metrica $g_{\alpha\beta}$.

Introdotta il tensore

$$(5) \quad H_{\alpha\varrho,\beta} \equiv \nabla_{\alpha} E_{\varrho\beta} + \nabla_{\varrho} E_{\beta\alpha} - \nabla_{\beta} E_{\alpha\varrho}$$

(il simbolo ∇_{α} indica derivazione covariante rispetto alle coordinate X^{α} attraverso la metrica $G_{\alpha\beta}$ di C_{*}), tali condizioni si traducono in ⁽⁵⁾

$$(6) \quad R_{\mu\alpha\varrho\beta} \equiv \nabla_{\mu} H_{\alpha\varrho,\beta} - \nabla_{\alpha} H_{\mu\varrho,\beta} - g^{\nu\sigma} (H_{\alpha\varrho,\nu} H_{\mu\beta,\sigma} - H_{\mu\varrho,\nu} H_{\alpha\beta,\sigma}) = 0$$

con l'intervento di grandezze tutte definite in C_{*} . Tra queste è da annoverare anche la metrica $g^{\alpha\beta}$, la quale si esprime mediante il tensore di deformazione ed i suoi invarianti I_k ($k = 1, 2, 3$) al modo seguente:

$$(7) \quad J g^{\alpha\beta} = (1 + 2I_1 + 4I_2) G^{\alpha\beta} - 2(1 + 2I_1) E^{\alpha\beta} + 4E^{\alpha\varrho} E_{\varrho}^{\beta},$$

essendo

$$(8) \quad J \equiv \frac{\det \|g_{\alpha\beta}\|}{\det \|G_{\alpha\beta}\|} = 1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3.$$

D'altra parte, in una varietà tridimensionale, il tensore 4-plo di *Riemann* equivale al tensore doppio $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ (cfr. ad es. [4]). Ne consegue che l'annullarsi del tensore $R_{\mu\alpha\varrho\beta}$ equivale alla condizione che sia nullo il tensore di Ricci $R_{\alpha\beta}$:

$$(9) \quad R_{\mu\alpha\varrho\beta} = 0 \Leftrightarrow R_{\alpha\beta} \equiv g^{\mu\varrho} R_{\mu\alpha\varrho\beta} = 0.$$

2. Condizioni di congruenza.

Ci proponiamo ora di dare forma esplicita alla (9)₂, nell'ipotesi che lo spostamento $C_{*} \rightarrow C$ sia conforme:

$$(10) \quad g_{\alpha\beta} = \lambda^2 G_{\alpha\beta} \sim g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda^2} G^{\alpha\beta}.$$

⁽⁵⁾ Cfr. ad esempio [5], nonché [3] pag. 178, salvo lo scambio ormai usuale, delle lettere maiuscole con quelle minuscole.

Per questo, esplicitiamo il tensore $R_{\alpha\beta}$ in termini del parametro λ . Tenuto conto del teorema di Ricci: $\nabla_\alpha G_{\rho\beta} = 0$, si ha anzitutto

$$(11) \quad R_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\lambda^2} \nabla_\mu G^{\mu\rho} H_{\alpha\rho, \beta} - \frac{1}{\lambda^2} \nabla_\alpha G^{\mu\rho} H_{\mu\rho, \beta} - \\ - \frac{1}{\lambda^4} G^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} (H_{\alpha\rho, \nu} H_{\mu\beta, \sigma} - H_{\mu\rho, \nu} H_{\alpha\beta, \sigma}) = 0 .$$

D'altra parte, nell'ipotesi (10), il tensore di deformazione (3) è del tipo

$$(12) \quad E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) G_{\alpha\beta}$$

onde risulta $H_{\alpha\rho, \beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \lambda^2 G_{\rho\beta} + \partial_\rho \lambda^2 G_{\beta\alpha} - \partial_\beta \lambda^2 G_{\alpha\rho})$, ovvero

$$(13) \quad H_{\alpha\rho, \beta} = \lambda^2 (v_\alpha G_{\rho\beta} + v_\rho G_{\beta\alpha} - v_\beta G_{\alpha\rho}) ,$$

avendo introdotto il *campo vettoriale*, di base C_* :

$$(14) \quad v_\alpha \equiv \frac{1}{\lambda} \partial_\alpha \lambda \equiv \partial_\alpha \lg \lambda .$$

Ne consegue, con un calcolo diretto,

$$\left\{ \begin{array}{l} G^{\mu\rho} H_{\alpha\rho, \beta} = \lambda^2 (v_\alpha \delta_\beta^\mu + v^\mu G_{\beta\alpha} - v_\beta \delta_\alpha^\mu) , \quad G^{\mu\rho} H_{\mu\rho, \beta} = -\lambda^2 v_\beta , \\ G^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} H_{\alpha\rho, \nu} H_{\mu\beta, \sigma} = \lambda^4 (v_\alpha v_\beta + 2v^2 G_{\alpha\beta}) , \\ G^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} H_{\mu\rho, \nu} H_{\alpha\beta, \sigma} = \lambda^4 (v^2 G_{\alpha\beta} - 2v_\alpha v_\beta) , \end{array} \right.$$

e di qui infine, ricordando la (14), l'espressione di $R_{\alpha\beta}$:

$$(15) \quad R_{\alpha\beta} = \nabla_\beta v_\alpha - v_\alpha v_\beta + (v^2 + \nabla_\mu v^\mu) G_{\alpha\beta} \quad (v^2 \equiv v_\mu v^\mu) .$$

In definitiva, le condizioni di congruenza assumono la forma esplicita

$$(16) \quad \nabla_\beta v_\alpha - v_\alpha v_\beta + (v^2 + \nabla_\mu v^\mu) G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) .$$

Il sistema (16) implica anzitutto che il tensore $\nabla_\beta v_\alpha$ sia simmetrico: $\nabla_\beta v_\alpha = \nabla_\alpha v_\beta$, ovvero $\partial_\beta v_\alpha - \partial_\alpha v_\beta = 0$, concordemente alla (14) che assicura l'irrotazionalità del campo di vettori v_α . Esso è certamente

soddisfatto se $v_\alpha \equiv 0$, ovvero $\lambda = \text{cost.}$, nel quale caso la deformazione è congruente e la corrispondenza $C_* \rightarrow C$ si riduce ad una omotetia di parametro λ . Esclusa tale circostanza, facciamo intervenire il versore γ del vettore \mathbf{v} : $\mathbf{v} = v\gamma$, con che risulta

$$(17) \quad v_\alpha = v\gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha\gamma^\alpha = 1,$$

e la (16) diviene

$$(16') \quad v\nabla_\beta\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\partial_\beta v - v^2\gamma_\alpha\gamma_\beta + (v^2 + \gamma^\mu\partial_\mu v + v\nabla_\mu\gamma^\mu)G_{\alpha\beta} = 0.$$

Ciò posto, moltiplicando per γ^β e sommando, si trae la condizione vettoriale

$$(18) \quad v\gamma^\beta\nabla_\beta\gamma_\alpha + (2\gamma^\mu\partial_\mu v + v\nabla_\mu\gamma^\mu)\gamma_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

che equivale alle seguenti condizioni scalari ⁽⁶⁾:

$$(19) \quad C_\alpha \equiv \gamma^\beta\nabla_\beta\gamma_\alpha = 0, \quad \nabla_\mu\gamma^\mu + \frac{2}{v}\gamma^\mu\partial_\mu v = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

La (19)₁ mostra che le linee di flusso del campo di vettori v_α sono a curvatura nulla, cioè rette. Ne consegue, tenuto conto della irrotazionalità del campo di vettori \mathbf{v} , di cui alla (14):

$$(20) \quad \mathbf{v} = \text{grad } U \sim U \equiv \lg \lambda,$$

che le superfici equipotenziiali $\lambda = \text{cost.}$ sono superfici parallele. In particolare, essendo $v \equiv |\text{grad } U|$, il vettore \mathbf{v} ha modulo costante sulla generica superficie equipotenziiale.

Mostriamo ora che tali superfici sono sfere concentriche. Per questo, cominciamo con l'osservare che, in virtù della (19)₂, la (16') diviene

$$(21) \quad v\nabla_\beta\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\partial_\beta v - v^2\gamma_\alpha\gamma_\beta + (v^2 - \gamma^\mu\partial_\mu v)G_{\alpha\beta} = 0,$$

⁽⁶⁾ Il vettore $\gamma^\beta\nabla_\beta\gamma_\alpha$ è il differenziale assoluto del vettore γ secondo la generica linea di flusso del campo di vettori v_α . Pertanto esso rappresenta (localmente) il vettore di curvatura della linea di flusso ed è, come tale, ortogonale a γ .

da cui, moltiplicando per γ^α , e tenendo conto della (17)₂,

$$(22) \quad \partial_\beta v = \gamma_\beta \gamma^\mu \partial_\mu v .$$

Pertanto, la (21) non differisce da $v \nabla_\beta \gamma_\alpha + (G_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta)(v^2 - \gamma^\mu \partial_\mu v) = 0$.

Di qui, introducendo la *metrica degenera* (?)

$$(23) \quad \gamma_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta ,$$

si trae il seguente legame:

$$(24) \quad v \nabla_\beta \gamma_\alpha = \gamma_{\beta\alpha} (\gamma^\mu \partial_\mu v - v^2) .$$

La (24), oltre a confermare la (19)₁ ($\gamma^\beta \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha - \gamma_\alpha = 0$), dà luogo alla relazione $v \nabla_\beta \gamma^\beta = 2(\gamma^\mu \partial_\mu v - v^2)$, compatibile con la (19)₂ se e solo se risulta

$$(25) \quad 2\gamma^\mu \partial_\mu v = v^2 .$$

In definitiva, la (24) diviene più semplicemente

$$(26) \quad \boxed{\nabla_\beta v_\alpha = -\frac{v}{2} \gamma_{\beta\alpha}} .$$

3. Conclusioni.

Per chiarire il significato geometrico del legame trovato, di tipo tensoriale, disponendo della scelta delle variabili X^α , ammettiamo che queste sono *coordinate gaussiane* per la generica superficie equipotenziale σ , indicando con $\{\mathbf{E}_i\}$ ($i = 1, 2$), la base locale su σ e con $\mathbf{E}_3 \equiv \boldsymbol{\gamma}$ il versore normale, orientato a piacere. Con tale scelta, la (26) non differisce da $\partial_i \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}_k = -(v/2) \gamma_{ik}$ ($i, k = 1, 2$), da cui la seguente espressione dei coefficienti della 2^a forma quadratica fondamentali di σ :

$$(27) \quad b_{ik} = -\frac{v}{2} \gamma_{ik} .$$

(?) Si ha $\gamma^\beta \gamma_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \det \|\gamma_{\alpha\beta}\| = 0$.

D'altro canto, posto che le $\gamma_i \equiv \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}_i$ ($i = 1, 2$) sono identicamente nulle, le componenti γ_{ik} di cui alla (23), si identificano con i coefficienti della metrica di σ : $\gamma_{ik} = G_{ik}$ ($i, k = 1, 2$). Ne consegue che *le superfici equipotenziali, tra loro parallele, si riducono ad una famiglia di sfere concentriche* ⁽⁸⁾, aventi centro in un punto O e raggio

$$(28) \quad \varrho = \frac{2}{v}.$$

Pertanto, il vettore \mathbf{v} , in quanto ortogonale a σ , è suscettibile della forma

$$(29) \quad \mathbf{v} = -\frac{2}{\varrho} \text{vers. } OP$$

se si suppone la normale $\boldsymbol{\gamma}$ orientata verso l'interno. Al tempo stesso, il potenziale $U(\varrho)$ di cui alla (20), non differisce da

$$(30) \quad U = -\int \frac{2}{\varrho} d\varrho + \text{cost} = \lg \frac{k^2}{\varrho^2};$$

ciò che fornisce il valore di λ :

$$(31) \quad \lambda = \frac{k^2}{\varrho^2},$$

essendo k una costante arbitraria (così come il centro O , data la disponibilità di una traslazione arbitraria).

Una volta precisati i valori di λ che soddisfano le condizioni di congruenza ⁽⁹⁾

$$(32) \quad \lambda = \begin{cases} \text{cost} , \\ k^2/\varrho^2 , \end{cases}$$

⁽⁸⁾ Invero la proporzionalità, come dalla (27), della 2ª forma quadratica alla prima, assicura innanzitutto che il tensore b_{ik} è isotropo, in modo che, sulla generica superficie σ , i raggi di curvatura principali sono localmente uguali tra di loro. D'altra parte, il fattore di proporzionalità $v/2$ è costante su σ , ciò che assicura l'invariabilità dei raggi di curvatura suddetti.

⁽⁹⁾ Si osservi che, in virtù della (15), lo scalare di curvatura R non differisce da $R = 4\nabla_\alpha v^\alpha + 2v^2$ ed il suo annullarsi implica, in virtù della (14), la condizione differenziale ben nota (cfr. Picone [7] pag. 377): $2\lambda\Delta_2\lambda - \Delta_1\lambda = 0$.

si riconosce (cfr. [7], pag. 372 e segg., nonché [9], pag. 63) che, nel primo caso la trasformazione è una similitudine, nel secondo il prodotto di una similitudine con una inversione di polo O (teorema di Liouville).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, Spoerri, Pisa (1902).
- [2] G. FERRARESE, *Sulla formulazione intrinseca delle condizioni di congruenza per deformazioni finite*, Rend. Lincei, (8), **36** (1964), pp. 629-638.
- [3] G. FERRARESE, *Lezioni di meccanica superiore*, Veschi, Roma (1968).
- [4] G. FERRARESE, *Introduzione alla dinamica riemanniana dei sistemi continui*, vol. I, Editrice Pitagora, Bologna (1979).
- [5] F. GRAIFF, *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite*, Rend. Lincei, (8), **24** (1958), pp. 415-422.
- [6] F. PASTRONE, *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni finite*, Rend. Sem. Mat. Torino, **28** (1969), pp. 1-12.
- [7] M. PICONE, *Appunti di analisi superiore*, Rondinella, Napoli (1940).
- [8] A. SIGNORINI, *Sulle deformazioni finite dei sistemi continui*, Rend. Lincei, (6), **12** (1930), pp. 312-316.
- [9] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. Ann. Matem., IV, **22** (1943), pp. 33-143.
- [10] C. TRUESDELL - R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, Band III/I, Springer-Verlag (1960).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 dicembre 1979.