Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Antonio Claudio Grioli

Propagazione di onde di accelerazione in un solido viscoelastico di Cosserat

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 64 (1981), p. 25-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__25_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 64 (1981)

Propagazione di onde di accelerazione in un solido viscoelastico di Cosserat.

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI (*)

Considero la propagazione di onde di accelerazione in un solido viscoelastico di Cosserat poco deformabile, lineare, omogeneo ed isotropo rispetto alla configurazione di riferimento, supposta di equilibrio naturale.

Trovo che sono possibili onde di accelerazione sia longitudinali che trasversali, trasportanti discontinuità delle derivate seconde degli spostamenti e (o) delle rotazioni. La velocità di propagazione è generalmente differente nei vari casi, ma sempre costante, e si ha quindi propagazione per raggi rettilinei e per onde parallele.

Nel caso longitudinale le onde di spostamento e quelle di rotazione si propagano in maniera completamente indipendente fra loro, mentre un'onda trasversale trasportante discontinuità delle derivate seconde degli spostamenti (delle rotazioni) induce discontinuità delle derivate terze delle rotazioni (degli spostamenti).

Onde trasportanti contemporaneamente discontinuità delle derivate seconde sia degli spostamenti che delle rotazioni sono possibili soltanto se le costanti costitutive che caratterizzano la parte puramente elastica dello stress e delle coppie di contatto soddisfano a certe relazioni in aggiunta a quelle di natura termodinamica solitamente ammesse.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

In tutti i casi scrivo ed integro le equazioni differenziali (o i sistemi) caratteristiche dell'evoluzione delle discontinuità; la plausibilità che i coefficienti di dissipatività producano un decadimento di tali discontinuità induce, in base ai risultati trovati, ad imporre loro delle opportune condizioni, con riflesso sulle equazioni costitutive del continuo.

Nel caso puramente elastico invece, il decadimento dell'ampiezza delle discontinuità è sempre verificato al tendere all'infinito dell'ascissa curvilinea s lungo i raggi di propagazione, senza che siano necessarie ulteriori condizioni.

Si trova inoltre che, per certi valori iniziali della curvatura media e di quella gaussiana del fronte d'onda, possono esistere dei valori al finito di s, per cui l'ampiezza delle discontinuità diverge. Ma in tale circostanza la curvatura media del fronte d'onda tende all'infinito e l'onda va sempre più concentrandosi, cosicchè tale situazione può essere interpretata col sorgere di onde d'urto.

Da mettere infine in evidenza il caso di onde trasversali trasportanti contemporaneamente discontinuità delle derivate seconde sia degli spostamenti che delle rotazioni (che è anche l'unico caso in cui ci si trova a dover integrare un sistema) in cui si trova che il decadimento dell'ampiezza delle discontinuità è sovrapposto ad un loro andamento oscillatorio il cui periodo dipende dalle costanti costitutive.

1. Premesse. Velocità di propagazione delle onde di accelerazione.

Si riferisca lo spazio ambiente ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(0x_i)$ e si denoti con la virgola la derivazione rispetto alle x_i (1).

Dette t_{kl} e ψ_{kl} le matrici che caratterizzano lo stress e le coppie di contatto in un solido viscoelastico di Cosserat C poco deformabile, omogeneo ed isotropo in una sua configurazione di riferimento

(1) È noto che nel caso linearizzato, qui considerato, la derivazione rispetto alle coordinate dello stato di riferimento si confonde con quella rispetto alle coordinate dello stato attuale e la derivata totale rispetto al tempo, con quella parziale.

di equilibrio naturale, le sue equazioni costitutive sono:

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} t_{hl} &= F_{klij}(0)\,\varepsilon_{ij} + \int_0^\infty F^{(1)}_{klij}(s)\,\varepsilon_{ij}(t-s)\,ds\,, \\ \psi_{kl} &= G_{klij}(0)\,q_{i,j} + \int_0^\infty G^{(1)}_{klij}(s)\,q_{i,j}(t-s)\,ds\,, \end{aligned}$$

dove q_i denota la rotazione del generico elemento del continuo e si è posto:

$$(1.2)\qquad \varepsilon_{ij} = u_{j,i} + e_{jim}q_m$$

dove u_j rappresenta lo spostamento e e_{jim} è il tensore di Ricci.

Le funzioni $F_{klij}(s)$ e $G_{klij}(s)$ sono date da [2]:

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} F_{klij}(s) &\equiv \lambda(s)\,\delta_{kl}\,\delta_{ij} + [\mu(s) + \chi(s)]\,\delta_{ki}\,\delta_{lj} + \mu(s)\,\delta_{kj}\,\delta_{li}\,, \\ G_{klij}(s) &\equiv \alpha(s)\,\delta_{kl}\,\delta_{ij} + \beta(s)\,\delta_{ki}\,\delta_{lj} + \gamma(s)\,\delta_{kj}\,\delta_{li}\,, \end{aligned}$$

e data una qualsiasi funzione $f(s)$, qui e nel seguito indicherò con $f^{(n)}(s)$ la derivata n-esima di f rispetto ad s.

Mi propongo di studiare la propagazione in C di onde di accelerazione.

Detta σ_t la superficie di equazioni parametriche:

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, t)\,,$$

di normale N_i, supposta dotata di tutte le proprietà di regolarità necessarie nel seguito, e indicando con una parentesi quadra le discontinuità attraverso σ_t, si dovrà avere:

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &[u_j] = [u_{j,i}] = [\dot u_j] = 0\,, \quad [\dot u_{j,i}] = -VU_jN_i\,, \quad [\ddot u_j] = V^2U_j\,, \\ &[q_j] = [q_{j,i}] = [\dot q_j] = 0\,, \quad [\dot q_{j,i}] = -VQ_jN_i\,, \quad [\ddot q_j] = V^2Q_j\,, \\ &U_j = [u_{j,hk}N_hN_k]\,, \qquad Q_j = [q_{j,hk}N_hN_k]\,. \end{aligned}$$

(2) Indicati con λ_0, μ_0 ecc. i valori per $s = 0$ delle funzioni $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ecc., essi caratterizzano la parte puramente elastica del continuo e debbono soddisfare alle relazioni:

$$(\circ)\qquad \begin{matrix} 3\lambda_0 + 2\mu_0 + \chi_0 > 0 & 2\mu_0 + \chi_0 > 0 & \chi_0 > 0 \\ 3\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 > 0 & -\gamma_0 < \beta_0 < \gamma_0 & \gamma_0 > 0\,. \end{matrix}$$

Nelle (1.4) col punto si è indicata derivazione parziale rispetto al tempo e V denota la velocità di avanzamento normale che, nell'ordine di approssimazione introdotto con la linearizzazione di C, può essere identificata con la velocità di propagazione dell'onda rispetto al continuo.

Le equazioni di campo di C sono ([3]):

$$(1.5)\qquad t_{kl,k}+\varrho(f_l-\ddot{u}_l)=0\,,\qquad \psi_{kl,k}+e_{lkm}t_{km}+\varrho(M_l-j\ddot{q}_l)=0$$

ove ϱ rappresenta la densità e ϱj la densità di micromomento d'inerzia, con j costante a causa della isotropia di C.

Prendendo le discontinuità delle (1.5) attraverso σ_t, e supponendo le forze e le coppie di massa continue, si ottiene:

$$(1.6)\qquad [t_{kl,k}]-\varrho[\ddot{u}_l]=0\,,\qquad [\psi_{kl,k}]+e_{lkm}[t_{km}]-\varrho j[\ddot{q}_l]=0\,.$$

Conviene osservare che gli integrali al secondo membro, nelle (1.1), sono continui attraverso σ_t per ogni n (vedi [1]); tenuto conto delle (1.4), dalle (1.1) si trae allora:

$$(1.7)\qquad [t_{km}]=0\,,\qquad [\psi_{km}]=0\,.$$

Data una funzione $\varphi(x,t)$ continua ovunque, ma le cui derivate prime e seconde presentino discontinuità di prima specie attraverso σ_t si ha:

$$[\varphi_{,i}]=[\varphi_{,j}N_j]N_i=-\frac{1}{V}[\dot{\varphi}]N_i\,,$$

$$(1.8)\qquad [\dot{\varphi}_i]=V\left\{-[\varphi_{,kk}N_hN_k]+\frac{1}{V}\frac{\delta}{\delta t}[\varphi_{,h}N_h]\right\}N_i-$$
$$-\{V[\varphi_{,h}N_h]\}_{/\Delta}x_i^{\Delta}=\left\{-\frac{1}{V}[\ddot{\varphi}]-\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{V}[\dot{\varphi}]\right)\right\}N_i+[\dot{\varphi}]_{/\Delta}x_i^{\Delta}$$

ove con la sbarretta si è indicata derivazione rispetto alle coordinate

([3]) Nelle (1.5) si è sostituita la derivazione parziale rispetto al tempo a quella lagrangiana in base a quanto affermato nella nota (1).

sulla superficie (4) e l'operatore $\delta/\delta t$ è dato da:

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + VN_h \frac{\partial}{\partial x_h} . \tag{1.9}$$

Da $(1.8)_1$ segue:

$$[t_{kl,k}] = -\frac{1}{V}[\dot{t}_{kl}]N_k , \qquad [\psi_{kl,k}] = -\frac{1}{V}[\dot{\psi}_{kl}]N_k . \tag{1.10}$$

Derivando le (1.1) rispetto al tempo e integrando per parti si ottiene (5):

$$\begin{aligned} \dot{t}_{kl} &= F_{klij}(0)\,\dot{\varepsilon}_{ij} + F^{(1)}_{klij}(0)\,\varepsilon_{ij} + \int_0^\infty F^{(2)}_{klij}(s)\;\varepsilon_{ij}(t-s)\,ds , \\ \dot{\psi}_{kl} &= G_{klij}(0)\dot{q}_{i,j} + G^{(1)}_{klij}(0)\,q_{i,j} + \int_0^\infty G^{(2)}_{klij}(s)\,q_{i,j}(t-s)\,ds . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Tenuto conto di (1.3), (1.4), (1.7), (1.10), (1.11) e della continuità attraverso σ_t degli integrali al secondo membro delle (1.11), dalle (1.6) si trae:

$$\begin{aligned} &(\lambda_0 + \mu_0)\,U_h N_h N_l + (\mu_0 + \chi_0 - \varrho V^2)\,U_l = 0 , \\ &(\alpha_0 + \beta_0) Q_h N_h N_l + (\gamma_0 - \varrho j V^2) Q_l = 0 . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Da $(1.12)_1$ si traggono due alternative:

a) $V^2 = V_1^2 = \dfrac{\lambda_0 + 2\mu_0 + \chi_0}{\varrho}$, $\quad \boldsymbol{U} = U\boldsymbol{N}$ onde longitudinali ,

b) $V^2 = V_2^2 = \dfrac{\mu_0 + \chi_0}{\varrho}$, $\quad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N} = 0$ onde trasversali.

(4) Gli indici greci maiuscoli si riferiscono alle coordinate sulla superficie e variano da 1 a 2.

(5) Si osservi che le funzioni $F_{klij}(s)$ e $G_{klij}(s)$ sono infinitesime per s tendente ad infinito (vedi ad esempio [1]).

Analogamente da $(1.12)_2$ si traggono le alternative:

$$a')\quad V^2 = V_3^2 = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{\varrho j}, \qquad \boldsymbol{Q} = Q\boldsymbol{N} \quad \text{onde longitudinali},$$

$$b')\quad V^2 = V_4^2 = \frac{\gamma_0}{\varrho j}, \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N} = 0 \quad \text{onde trasversali}.$$

Si trovano onde di accelerazione [6] longitudinali e trasversali sia per quanto riguarda gli spostamenti che le rotazioni, propagantisi con velocità in generale differenti fra loro.

Si possono avere invece onde trasportanti contemporaneamente discontintuità delle derivate seconde sia degli spostamenti che delle rotazioni soltanto se le costanti costitutive che caratterizzano la parte puramente elastica dello stress e delle coppie soddisfano a certe relazioni in aggiunta a quelle di natura termodinamica solitamente ammesse. Si presentano quattro casi:

I) *Onde longitudinali.* Si ha

$$\lambda_0 + 2\mu_0 + \chi_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{j}, \qquad \boldsymbol{U} = U\boldsymbol{N}, \ \boldsymbol{Q} = Q\boldsymbol{N}. \tag{1.13}$$

II) *Onde miste.* Si ha:

$$\lambda_0 + 2\mu_0 + \chi_0 = \frac{\lambda_0}{j}, \qquad \boldsymbol{U} = U\boldsymbol{N}, \ \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{N} = 0. \tag{1.14}$$

III) *Onde miste.* Si ha:

$$\mu_0 + \chi_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{j}, \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N} = 0, \ \boldsymbol{Q} = Q\boldsymbol{N}. \tag{1.15}$$

IV) *Onde trasversali.* Si ha:

$$\mu_0 + \chi_0 = \frac{\gamma_0}{j}. \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N} = 0, \ \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{N} = 0. \tag{1.16}$$

[6] La realtà delle velocità trovate nei quattro casi è assicurata dalle condizioni (o) alla nota (2) sulle costanti strutturali.

In ogni caso, indipendentemente dalla validità delle relazioni di cui sopra, nelle ipotesi di omogeneità su C e per la supposta linearizzazione, si vede che la velocità di propagazione è costante; ciò implica propagazione per raggi rettilinei ed onde parallele.

2. Evoluzione delle discontinuità.

Stante la costanza di V, indicata con $s = Vt$ l'ascissa curvilinea della generica faccetta del fronte d'onda sul raggio di propagazione, si ha:

$$\frac{\delta}{\delta t} = V \frac{d}{ds} . \tag{2.1}$$

Valgono inoltre le $\big((1.8), [6]\big)$ e da esse si trae:

$$\begin{aligned} [\ddot{u}_{j,i}] &= V^2 U'_j N_i + V^2 U_{j/\Delta} x_i^\Delta - 2V^2 \frac{dU_j}{ds} N_i , \\ [\dddot{u}_i] &= -V^3 U'_i + 3V^3 \frac{dU_i}{ds} , \qquad U'_i = [u_{i,jhk} N_j N_h N_k] , \\ [\ddot{q}_{i,j}] &= V^2 Q'_i N_j + V^2 Q_{i/\Delta} x_j^\Delta - 2V^2 \frac{dQ_i}{ds} N_j , \\ [\dddot{q}_i] &= -V^3 Q'_i + 3V^3 \frac{dQ_i}{ds} , \qquad Q'_i = [q_{i,jhk} N_j N_h N_k] . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Derivando le (1.5) e prendendo le discontinuità attraverso σ_t, supponendo per semplicità nulle le forze e le coppie di massa e trascurando, perchè di ordine superiore la discontinuità dei prodotti $\dot{\varrho}\ddot{u}_l$ e $\dot{\varrho} j \ddot{q}_l$ (7) ottengo:

$$[\dot{t}_{kl,k}] - \varrho[\dddot{u}_l] = 0 , \qquad [\dot{\psi}_{kl,k}] + e_{lkm}[\dot{t}_{km}] - \varrho j [\dddot{q}_l] = 0 . \tag{2.3}$$

Derivando le (1.11) rispetto al tempo ed integrando per parti si

(7) Per convincersene basta osservare che $\dot{\varrho}$ è dello stesso ordine di $u_{h,h}$ (vedi equazione di continuità) da cui discende che, a causa della linearizzazione del problema dovuto alla piccola deformabilità di C, possono trascurarsi come infinitesimi di ordine superiore i termini $\dot{\varrho}\ddot{u}_l$ e $\dot{\varrho} j \ddot{q}_l$.

ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{t}_{kl} &= F_{klij}(0)\,\ddot{\varepsilon}_{ij} + F^{(1)}_{klij}(0)\,\dot{\varepsilon}_{ij} + F^{(2)}_{klij}(0)\,\varepsilon_{ij} + \int_0^\infty F^{(3)}_{klij}(s)\,\varepsilon_{ij}(t-s)\,ds\,, \\ \ddot{\psi}_{kl} &= G_{klij}(0)\,\ddot{q}_{i,j} + G^{(1)}_{klij}(0)\,\dot{q}_{i,j} + G^{(2)}_{klij}(0)\,q_{i,j} + \int_0^\infty G^{(3)}_{klij}(s)\,q_{i,j}(t-s)\,ds\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Identificando nelle $(1.8)_2$ φ con t_{kl} e successivamente con ψ_{kl} si deduce:

$$\begin{aligned} [\dot{t}_{kl,k}] &= \left\{-\frac{1}{V}[\ddot{t}_{kl}] - \frac{d}{ds}[\dot{t}_{kl}]\right\}N_k + [\dot{t}_{kl}]_{/\Delta}\,x^{\Delta}_k\,, \\ [\dot{\psi}_{kl,k}] &= \left\{-\frac{1}{V}[\ddot{\psi}_{kl}] - \frac{d}{ds}[\dot{\psi}_{kl}]\right\}N_k + [\dot{\psi}_{kl}]_{/\Delta}\,x^{\Delta}_k\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Facendo uso delle (1.2), (1.4), (1.11), (2.2), (2.4), (2.5) e della continuità attraverso σ_t degli integrali al secondo membro delle (2.4), da (2.3), dopo qualche calcolo, si trae:

$$\begin{aligned} &\left\{(\lambda_0+\mu_0)\left(U'_h N_h - \frac{dU_h}{ds}N_h + U_{h/\Delta}\,x^{\Delta}_h\right) - \frac{1}{V}(\lambda_1+\mu_1)U_h N_h\right\}N_l + \\ &+ (\mu_0+\chi_0-\varrho V^2)\,U'_l + (\lambda_0+\mu_0)(U_h N_h)_{/\Delta}\,x^{\Delta}_l - \\ &-\left\{2(\mu_0+\chi_0)K + \frac{1}{V}(\mu_1+\chi_1)\right\}U_l + (3\varrho V^2-\mu_0-\chi_0)\frac{dU_l}{ds} + \\ &\qquad\qquad + \chi_0\, e_{lhm} N_h Q_m = 0\,, \\ &\left\{(\alpha_0+\beta_0)\left(Q'_h N_h - \frac{dQ_h}{ds}N_h + Q_{h/\Delta}\,x^{\Delta}_h\right) - \frac{1}{V}(\alpha_1+\beta_1)Q_h N_h\right\}N_l + \\ &+ (\gamma_0-\varrho j V^2)Q'_l + (\alpha_0+\beta_0)(Q_h N_h)_{/\Delta}\,x^{\Delta}_l - \left(2\gamma_0 K + \frac{1}{V}\gamma_1\right)Q_l + \\ &\qquad\qquad + (3\varrho j V^2-\gamma_0)\frac{dQ_l}{ds} + \chi_0\, e_{lkm} N_h U_m = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ove con λ_1, μ_1 ecc. si sono indicati i valori per $s=0$ delle funzioni $\lambda^{(1)}(s)$, $\mu^{(1)}(s)$ ecc. Con K si è indicata la curvatura media del fronte d'onda σ_t, definita da:

$$K = \tfrac{1}{2} a^{\Gamma\Delta} b_{\Gamma\Delta}$$

dove $a^{\Gamma\Delta}$ è il tensore metrico sulla superficie e $b_{\Gamma\Delta}$ il tensore della seconda forma fondamentale su σ_t.

Poichè si è stabilito al par. 1 che la propagazione avviene per onde parallele, il valore di K lungo il generico raggio di propagazione è dato da:

$$K = \frac{K_0 - H_0 s}{1 - 2K_0 s + H_0 s^2} \tag{2.7}$$

dove K_0 e H_0 sono i valori iniziali della curvatura media e di quella gaussiana.

L'integrazione del sistema (2.6) è particolarmente semplice nei casi I, II e III; posto:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1 + \chi_1}{2V_1(\lambda_0 + 2\mu_0 + \chi_0)}, & b &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}{2V_3(\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0)}, \\ a' &= \frac{\mu_1 + \chi_1}{2V_2(\mu_0 + \chi_0)}, & b' &= \frac{\gamma_1}{2V_4\gamma_0}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

da (2.6), per proiezione sulla normale a σ_t e sul piano tangente, dopo qualche calcolo, si trova nei vari casi.

Caso I:

$$\frac{dU}{ds} - (K + \alpha)U = 0 , \qquad U_i' x_{i/\Delta} = U_{/\Delta} , \tag{2.9}$$

$$\frac{dQ}{ds} - (K + b)Q = 0 , \qquad Q_i' x_{i/\Delta} = Q_{/\Delta} . \tag{2.10}$$

Le (2.9), (2.10) integrate porgono:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{|1 - 2K_0 s + H_0 s^2|}} e^{as} , \quad Q = \frac{Q_0}{\sqrt{1|1 - 2K_0 s + H_0 s^2|}} e^{bs} , \tag{2.11}$$

ove con U_0 e Q_0 si sono indicati i valori iniziali di U e Q.

Caso II:

$$\frac{dU}{ds}-(K+a)U=0\,,\qquad U'_l x_{l\Delta}=U_{/\Delta}+\frac{\chi_0}{\lambda_0+\mu_0}e_{lkm}N_k Q_m x_{l\Delta}\,, \tag{2.12}$$

$$\frac{dQ_l}{ds}-(K+b')Q_l=0\,,\qquad Q'_l N_l=-Q_{l/\Delta}x_l^\Delta\,, \tag{2.13}$$

$(2.12)_1$ è identica a $(2.9)_1$, mentre, indicando con Q_l^0 il valore iniziale di Q_l da (2.13) si trae.

$$Q_l=\frac{Q_l^0}{\sqrt{|1-2K_0 s+H_0 s^2|}}e^{b's}\,. \tag{2.14}$$

Caso III:

$$\frac{dU_l}{ds}-(K+a')U_l=0\,,\qquad U'_l N_l=-U_{l/\Delta}x_l^\Delta\,, \tag{2.15}$$

$$\frac{dQ}{ds}-(K+b)Q=0\,,\qquad Q'_l x_{l\Delta}=Q_{/\Delta}+\frac{\chi_0}{\alpha_0+\beta_0}e_{lkm}N_k U_m x_{l\Delta}\,, \tag{2.16}$$

$(2.16)_1$ è identica a $(2.10)_1$, mentre, indicando con U_l^0 il valore iniziale di U_l, da $(2.15)_1$ si trae:

$$U_l=\frac{U_l^0}{\sqrt{|1-2K_0 s+H_0 s^2|}}e^{a's}\,. \tag{2.17}$$

Il *caso IV* è il più complesso. Posto:

$$c_1=\frac{\chi_0}{2(\mu_0+\chi_0)}\,,\qquad c_2=\frac{\chi_0}{2\gamma_0}\,, \tag{2.18}$$

dalle (2.6) si trae:

$$\frac{d\boldsymbol{U}}{ds}-(K+a')\boldsymbol{U}+c_1\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Q}=0\,,\qquad U'_l N_l=-U_{l/\Delta}x_l^\Delta\,, \tag{2.19}$$

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{ds}-(K+b')\boldsymbol{Q}+c_2\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{U}=0\,,\qquad Q'_l N_l=-Q_{l/\Delta}x_l^\Delta\,. \tag{2.20}$$

Dopo aver posto:

$$
\text{(2.21)} \qquad
\begin{aligned}
&L = b' - a' \,, \qquad && M = \sqrt{L^2 - 4c_1c_2} \,, \\
&z_1 = \tfrac{1}{2}(-M + a' + b') \,, \qquad && z_2 = \tfrac{1}{2}(M + a' + b') \,,
\end{aligned}
$$

si trova che l'integrazione del sistema $(2.19)_1$, $(2.20)_1$ porge:

$$
\text{(2.22)} \qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{U} &= \frac{\left(\dfrac{M+L}{2}\,\boldsymbol{U}_0 + c_1\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Q}_0\right)e^{z_1 s} + \left(\dfrac{M-L}{2}\,\boldsymbol{U}_0 - c_1\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Q}_0\right)e}{M\sqrt{|1-2K_0 s + H_0 s^2|}} \,, \\
\boldsymbol{Q} &= \frac{\left(\dfrac{M-L}{2}\,\boldsymbol{Q}_0 + c_2\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{U}_0\right)e^{z_1 s} + \left(\dfrac{M+L}{2}\,\boldsymbol{Q}_0 - c_2\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{U}_0\right)e^{z_2 s}}{M\sqrt{|1-2K_0 s + H_0 s^2|}} \,,
\end{aligned}
$$

se è $M \neq 0$, mentre se è $M = 0$ si trova:

$$
\text{(2.23)} \qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{U} &= \frac{\boldsymbol{U}_0 - \left((L/2)\,\boldsymbol{U}_0 + c_1\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Q}_0\right)s}{\sqrt{|1-2K_0 s + H_0 s^2|}} \exp\left[\frac{a'+b'}{2}\,s\right] , \\
\boldsymbol{Q} &= \frac{\boldsymbol{Q}_0 - \left(-(L/2)\,\boldsymbol{Q}_0 + c_2\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{U}_0\right)s}{\sqrt{|1-2K_0 s + H_0 s^2|}} \exp\left[\frac{a'+b'}{2}\,s\right] ,
\end{aligned}
$$

Nel caso generale in cui non è verificata nessuna delle $(1.13)_1$, $(1.14)_1$, $(1.15)_1$, $(1.16)_1$ non sono possibili onde trasportanti contemporaneamente discontinuità delle derivate seconde sia degli spostamenti che delle rotazioni.

Per quanto riguarda le onde longitudinali, esse si propagano in maniera del tutto indipendente le une dalle altre, con evoluzione delle discontinuità date dalle $(2.11)_1$ e $(2.9)_2$ oppure $(2.11)_2$ e $(2.10)_2$.

Per quanto riguarda le onde trasversali invece, si vede dalle $(2.12)_2$ e $(2.16)_2$, che un'onda trasversale trasportante discontinuità delle derivate seconde degli spostamenti induce discontinuità delle derivate terze delle rotazioni, mentre un'onda trasversale trasportante discontinuità delle derivate seconde delle rotazioni, induce discontinuità delle derivate terze degli spostamenti. Nel primo caso l'evoluzione di tali discontinuità è dato dalle (2.17), $(2.15)_2$ e $(2.16)_2$ (per $Q = 0$) mentre nel secondo dalle (2.14), $(2.13)_2$ e $(2.12)_2$ (per $U = 0$).

Ne segue che se è data una perturbazione iniziale con discontinuità trasversali non nulle delle derivate seconde sia degli spostamenti che delle rotazioni, in generale si generano due onde propagantisi con differenti velocità ognuna delle quali però induce discontinuità sulle derivate di ordine superiore al secondo, sia degli spostamenti che delle rotazioni.

3. Qualche considerazione sui risultati trovati.

L'esame delle soluzioni trovate nei vari casi porta a dover ritenere non positive le costanti a, b, a' e b'; se cosí non fosse infatti, l'ampiezza delle discontinuità divergerebbe al tendere all'infinito dell'onda, cosa fisicamente non accettabile.

Poichè sono certamente positive le quantità al denominatore delle (2.8) (8) ciò porta ad imporre che i coefficienti dissipativi debbano soddisfare alle relazioni:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + 2\mu_1 + \chi_1 \leqslant 0\,, \qquad \mu_1 + \chi_1 \leqslant 0\,, \\ &\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \leqslant 0\,, \qquad \gamma_1 \leqslant 0\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Soddisfatte le (2.24) le ampiezze delle discontinuità tendono a zero al tendere di s all'infinito.

Il caso puramente elastico si ha quando si annullano tutti i coefficienti di dissipatività λ_1, μ_1 ecc. In tale circostanza le (2.24) sono soddisfatte come uguaglianze e le ampiezze delle discontinuità tendono ancora a zero, anche se meno rapidamente, al tendere di s all'infinito.

Il caso di onde trasversali trasportanti contemporaneamente discontinuità delle derivate seconde sia degli spostamenti che delle rotazioni (caso IV) merita una discussione a parte. L'evoluzione di tali discontinuità è data dalle (2.22) o dalle (2.23), a secondo che sia $M \neq 0$ o $M = 0$. In ogni caso se M è reale (anche nullo) le (2.24) assicurano l'estinzione delle discontinuità al tendere di s all'infinito. Se invece M è immaginario ($L^2 - 4c_1c_2 < 0$), applicando le formule di Eulero alle (2.22) si vede che l'ampiezza delle discontinuità tende ancora a zero al tendere all'infinito di s (naturalmente nell'ipotesi che valgono le

(8) Vedi le (o) della nota (2).

(2.24)), ma con andamento oscillatorio di periodo:

$$P = \frac{4\Pi}{\sqrt{4c_1 c_2 - L^2}}.$$

Tale circostanza si presenta ad esempio nel caso puramente elastico ($L = 0$).

C'è da notare infine che ogni qualvolta s tende ad uno zero del polinomio sotto radice (9) in una qualsiasi delle (2.11), (2.14), (2.17), (2.22), (2.23) l'ampiezza delle discontinuità diverge. Ma tale circostanza può verificarsi soltanto se la curvatura media K tende all'infinito e l'onda tende a concentrarsi; tale fatto può allora essere interpretato pensando che le onde di accelerazione tendano a trasformarsi in onde d'urto, ma certamente la linearizzazione del problema non appare in tal caso legittima.

(9) Ciò è vero naturalmente soltanto se si tratta di zeri reali positivi, per cui tale circostanza non potrà mai verificarsi se si ha $K_0^2 - H_0 < 0$ oppure se è $K_0 \leqslant 0$ e $H_0 \geqslant 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. J. Leitman - G. M. Fischer, *The linear theory of viscoelasticity*, Handbuch der Physik, Band VI a/3.

[2] B. D. Coleman - M. E. Gurtin - I. Herrera, *The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves*, Archive for Rat. Mech. and Anal., **19** (1965).

[3] B. D. Coleman - M. E. Gurtin, *On the growth and decay of one-dimensional acceleration waves*, Archive for Rat. Mech. and Anal., **19** (1965).

[4] B. D. Coleman - J. M. Greenberg - M. E. Gurtin, *On the amplitude of acceleration waves and mild discontinuities*, Arch. for Rat. Mech. and Anal., **22** (1966).

[5] M. F. Mc Carthy - A. C. Eringen, *Micropolar Viscoelastic Waves*, Pergamon Press, 1969.

[6] A. C. Grioli, *Sulla propagazione di onde di accelerazione in un continuo di Cosserat con rotazioni vincolate*, in corso di stampa su: Rend. Sem. Mat. Università di Padova.

[7] B. D. Coleman - W. Noll, *Foundations of linear viscoelasticity*, Reviews of Modern Physics, **33** (1961).

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 dicembre 1979.