Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Giovanni Zacher

Sul reticolo dei sottogruppi del quadrato cartesiano di un gruppo semplice

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 64 (1981), p. 235-241

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__235_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

Sul reticolo dei sottogruppi del quadrato cartesiano di un gruppo semplice.

GIOVANNI ZACHER (*)

Al Prof. Dr. W. Gaschütz in occasione del Suo 60-esimo compleanno

M. Suzuki, nel suo lavoro basilare sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito [7], dimostrò, fra l'altro, che il reticolo del quadrato cartesiano di un gruppo finito semplice non abeliano individua il gruppo.

Scopo della presente Nota sarà di provare, seguendo il metodo ideato da Suzuki, che la citata proposizione vale in generale senza l'ipotesi della finitezza sul gruppo. Deriveremo pure, usando tale metodo, un risultato recente di Schmidt ([4] Korollar 1) su tale argomento, e termineremo la Nota con una osservazione alla questione studiata in [3].

Una *proiettività* $\sigma : G \to \bar{G}$ di un gruppo G su un gruppo $\bar{G}$ è un isomorfismo del reticolo dei sottogruppi di G su quello di $\bar{G}$; in una tale situazione ogni elemento $\bar{g} \in \bar{G}$ individua una autoproiettività di G mediante la posizione $X \mapsto X^{\sigma\bar{g}\sigma^{-1}}$. Per brevità porremo $X^{\bar{g}} = X^{\sigma\bar{g}\sigma^{-1}}$ e $X_{\bar{G}} = \bigvee_{\bar{g}\in\bar{G}} X^{\bar{g}}$. Una proiettività $\sigma : G \to \bar{G}$ si dice che conserva *strettamente gli indici* se da $H \leqslant K \leqslant G$ segue $[K^\sigma : H^\sigma] = [K : H]$. La scrittura $H \underset{q}{<} G$ significa H quasinormale in G, mentre $M \lessdot G$ sta per M sottogruppo massimo di G; $\langle g \rangle$ è il sottogruppo di G generato da $g \in G$.

LEMMA 1. *Sia $\sigma : G \to \bar{G}$ una proiettività che conserva strettamente gli indici. Allora un sottogruppo H è quasinormale in G se e solo se tale è H^σ in $\bar{G}$.*

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38100 Trento.

DIM. Sia $H < G$ e $g \in G$; sarà

$$[H \vee \langle g \rangle : H] = [H\langle g \rangle : H] = [\langle g \rangle : H \wedge \langle g \rangle]$$

per cui

$$(*) \qquad [H^\sigma \vee \langle g \rangle^\sigma : H^\sigma] = [\langle g \rangle^\sigma : H^\sigma \wedge \langle g \rangle^\sigma] = [\langle g \rangle^\sigma H^\sigma : H^\sigma]$$

a) $[\langle g \rangle^\sigma : H^\sigma \wedge \langle g \rangle^\sigma] = n$, numero finito.

Posto $\langle \bar{g} \rangle = \langle g \rangle^\sigma$, per $(*)$ è $\langle g \rangle^\sigma \vee H^\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{g}^i H^\sigma$ e così $\langle g \rangle^\sigma H^\sigma$ è un gruppo.

b) $[\langle g \rangle^\sigma : H^\sigma \wedge \langle g \rangle^\sigma] = \infty$.

Risulta $H \lhd H \vee \langle g \rangle$ (cf. [6] Lemma 2.1) per cui, per ogni primo p, esiste un sottogruppo M_p tale che $H < M_p \lhd\cdot G$; per *a*) sarà $M_p^\sigma \underset{a}{\leqslant} \bar{G}$ e dunque pure $M_p^\sigma \lhd \bar{G}$ e da $H^\sigma = \bigwedge_p M_p^\sigma$ si conclude che $H^\sigma \lhd \bar{G}$. //

LEMMA 2. *Sia N un sottogruppo normale di G con G/N un gruppo abeliano elementare d'ordine p^2, p un numero primo, e $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività. Allora per ogni $\bar{g} \in \bar{G}$ è $N^{\bar{g}} \lhd G$ e $G/N_{\bar{G}}$ è un gruppo abeliano elementare d'ordine p^2 o p^3. Se $p = 2$ è $N^\sigma \lhd \bar{G}$.*

DIM. Per un $\bar{g} \in \bar{G}$ sia $N^{\bar{g}} \neq N$; se $\langle g \rangle^\sigma = \langle \bar{g} \rangle$, l'ordine di gN sarà p, per cui, posto $H_0 = \langle g, N \rangle$ si possono trovare altri due sottogruppi H_1, H_2 di G tali da aversi $H_i \wedge H_j = N$ e $H_i \vee H_j = G$ non appena $i \neq j$; ora avendosi $H_0^{\bar{g}} = H_0 \lhd G$, si deduce $N^{\bar{g}} \lhd G$ e $G/N^{\bar{g}}$ sarà un P-gruppo (cf. ad es. [8]) d'ordine p^2 o pq con $q < p$, in ogni caso un gruppo metabeliano; posto $K = N_{\bar{G}}$, si avrà dunque che G/K è un gruppo metabeliano periodico a p-sottogruppo di Sylow abeliano elementare e normale.

Dato che σ induce una proiettività di $G/N_{\bar{G}}$ su $\bar{G}/\bar{N}_{\bar{G}}$, la conclusione del teorema segue subito se $G/N_{\bar{G}}$ è abeliano elementare, tenendo presente la struttura di un P-gruppo.

Ammettiamo ora che G/K non sia abeliano; sarà per un $\bar{g} \in \bar{G}$, $G/N_{\bar{g}}$ non abeliano per cui $\bar{g}$ induce su G/K una autoproiettività singolare a p. Esiste così un $\langle a \rangle \leqslant G/K$ d'ordine p, mentre $\langle a \rangle^{\bar{g}}$ è d'ordine $q \neq p$. Consideriamo in G/K una famiglia $\{A_i\}_i$ di gruppi finiti che ricopre G/K e con $\langle a \rangle \leqslant A_i$; sarà $\bar{g}$ singolare su un A_j [8]. Sia $\bar{g}$ singolare di prima specie su A_j: allora necessariamente A_j si spezza nel prodotto diretto del suo p-sottogruppo di Sylow per il suo complemento e dunque $\bar{g}$ sarà di prima specie su ogni gruppo finito che contiene A_j; ma allora $G/K = S/K \times C/K$ con S/K il p-sottogruppo di Sylow di G/K; da $N \geqslant C$ e $C^\sigma \lhd \bar{G}$ si conclude che $C = K$, ossia G/K è p-abeliano elementare, una contraddizione. Sia dunque $\bar{g}$ singolare di seconda specie su tutti gli A_i per cui $G/K = P/K \times C/K$ con P/K un P-gruppo non abeliano e gli ordini degli elementi di C/K relativamente primi a quelli di P/K per cui di nuovo, come sopra, $C = K$. Ora da $K < N \lhd G$ e G/N abeliano non può che essere anche G/K un P-gruppo abeliano, una contraddizione. //

LEMMA 3. *Sia $G = S_1 \times S_2$ con S_1 gruppo isomorfo ad S_2 e sia $\sigma: G \to \bar{G}$ una proiettività tale che $\bar{G} = S_2^\sigma \times S_2^\sigma$: Allora σ induce su S_i una proiettività che conserva strettamente gli indici.*

DIM. Per ragioni di simmetria basterà fissare l'attenzione su S_1, ed osserviamo che σ conserva gli indici su S_1 se per qualunque sottogruppo A, B di S_1 da $A \lhd B \leqslant S_1$ e $[B:A] = p$ segue $[B^\sigma : A^\sigma] = p$. Infatti sia $[K:H] < \infty$; posto $N = H_K$, sarà H/N finito. Sia $N = N_0 \lhd \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_n = H$ una serie di composizione da N ad H. Considerato N_i/N_{i-1}, esso sarà semplice finito e quindi se è abeliano sarà

$$[N_i^\sigma : N_{i-1}^\sigma] = [N_i : N_{i-1}] ,$$

altrimenti per 3.3 in [5] sarà $N_{i-1}^\sigma \lhd N_i^\sigma$ e da qui per [8] è $[N_i^\sigma : N_{i-1}^\sigma] = [N_i : N_{i-1}]$. Avendosi $[H:K] = [H:N]/[K:N]$, da quanto ora detto, ne segue che $[H^\sigma : K^\sigma] = [H:K]$. Ciò premesso, sia dunque $K_1 \lhd H_1 \leqslant S_1$ e $[H_1 : K_1] = p$; esiste $K_2 \lhd H_2 \leqslant S_2$ con $[H_2 : K_2] = p$. Abbiamo allora che H_1H_2/K_1K_2 è abeliano elementare d'ordine p^2 e dunque, posto $G = H_1H_2$, $N = K_1K_2$, $\bar{G}_1 = G_i^\sigma$, per il Lemma 2 è $T = N_{\bar{G}_1} \lhd G_1$ e $G_1/N_{\bar{G}_1}$ abeliano elementare d'ordine p^2 o p^3. Ora TH_i/T è p-abeliano elementare non identico, $TH_1 \vee TH_2/T = H_1H_2/T$ e il mutuo commutatore $[TH_1, TH_2] \leqslant T$. Da $\bar{G} = S^\sigma \times S_2^\sigma$ segue che pure $[T^\sigma H^\sigma, T^\sigma H_2^\sigma] \leqslant T^\sigma$ e poichè $H_1^\sigma T^\sigma/T^\sigma \vee H_2^\sigma T^\sigma/T^\sigma = H_1^\sigma H_2^\sigma/T^\sigma$ è un P-gruppo, sarà $H_1^\sigma H_2^\sigma/T^\sigma$ abeliano elementare d'ordine p^2, per cui $T^\sigma = N^\sigma = K_1^\sigma K_2^\sigma$ e da $H_i^\sigma/H_i^\sigma \wedge N^\sigma \simeq H_i^\sigma N^\sigma/N^\sigma \leqslant H_1^\sigma H_2^\sigma/N^\sigma$ e $H_1^\sigma \wedge N^\sigma = K_1^\sigma$ segue che $[H_1^\sigma : K_1^\sigma] = p = [H_1 : K_1]$. //

Infine passiamo ad enunciare esplicitamente un lemma dovuto a Suzuki [7] e che fornisce il metodo dimostrativo dell'enunciato teorema. All'uopo, se $G = G_1 \times G_2$ è un prodotto diretto di due gruppi, detto $P(G)$ il gruppo delle autoproiettività di G, poniamo (cf. [5])

$$P(G_1, G_2) = \{\sigma \in P(G) | G_1^\sigma = G_1 \text{ e } X^\sigma = X \text{ per ogni } X \leqslant G_2\}$$

ed

$$S(G_1, G_2) = \{\sigma \in P(G) | X^\sigma = X \text{ per ogni } X \leqslant G_1 \text{ o } X \leqslant G_2\};$$

risulta evidentemente $S(G_1, G_2) \lhd P(G_1, G_2) \leqslant P(G)$. Ora ad ogni elemento $\alpha \in \operatorname{Aut} G_1$, il gruppo degli automorfismi di G_1, resta associato in un modo naturale un elemento $\alpha^* \in P(G_1, G_2)$, e tale associazione $\alpha \mapsto \alpha^*$ dà luogo ad un omomorfismo φ di $\operatorname{Aut} G_1$ in $P(G_1, G_2)$ il cui nucleo è $\operatorname{Pot} G$, il gruppo degli automorfismi potenza di G, e sarà pure $\operatorname{Ker} \varphi\pi = \operatorname{Pot} G$, se π: $P(G_1, G_2) \to P(G_1, G_2)/S(G_1, G_2)$ è l'omomorfismo canonico.

Lemma 4 (Suzuki [7]). *Sia $G = G_1 \times G_2$ un prodotto diretto in cui il gruppo G_1 sia isomorfo a quello G_2: Allora $P(G_1, G_2) = S(G_1, G_2) \operatorname{Im} \varphi$ e dunque anche $P(G_1, G_2)/S(G_1, G_2) \simeq \operatorname{Aut} G_1/\operatorname{Pot} G_1 \simeq PA(G_1)$, questo ultimo essendo il sottogruppo delle autoproiettività di G indotte dagli elementi di* $\operatorname{Aut} G_1$.

Teorema. *Sia S un gruppo semplice non abeliano, $G = S \times S$ il suo quadrato cartesiano e σ una proiettività di G su un gruppo $\bar{G}$. Allora si ha S^σ isomorfo ad S e $\bar{G} = S^\sigma \times S^\sigma$.*

Dim. Posto $S_1 \simeq S \simeq S_2$, si ha $\sigma: S_1 \times S_2 \to \bar{G}$. Da $Z(G) = \{1\}$ e Hilfssatz 2.5 in [3] segue $\bar{G} = S_1^\sigma \times S_2^\sigma$. Se ora D è un gruppo diagonale di G: $S_1 D = G$, $S_i \wedge D = \{1\}$ sarà $S_i^\sigma D^\sigma = \bar{G}$, $S_i \wedge D^\sigma = \{1\}$ per cui pure $S_i^\sigma \simeq D^\sigma \simeq S_2^\sigma . S_1^\sigma$, che evidentemente non è d'ordine primo, è un gruppo semplice: sia, all'uopo $\{1\} \neq N^\sigma \lhd G$. In virtù del Lemma 3 applicato a σ^{-1}, σ^{-1} conserva strettamente gli indici su S_1^σ per cui $N = (N^\sigma)^{\sigma^{-1}}$ è quasinormale in S_1 e dunque $N = S_1$ in virtù di [4], corollary C2, e del fatto che S_1 è semplice. Il Lemma 4 applicato al gruppo $G = S_1 \times S_2$, tenuto presente che in gruppo a centro identico è $\operatorname{Pot} G = \{1\}$ [1], dà luogo alla seguente catena di isomorfismi:

$$\operatorname{Aut} S_1 \simeq P(S_1, S_2)/S(S_1, S_2) \simeq P(S_1^\sigma, S_2^\sigma)/S(S_1^\sigma, S_2^\sigma) \simeq \operatorname{Aut} S_1^\sigma$$

e da qui e dalla semplicità di S_1 e di S_1^σ segue $S_1^\sigma \simeq S_1$. //

Usando il lemma di Suzuki vogliamo derivare una dimostrazione del seguente teorema dovuto a Schmidt (cf. [4] Korollar 1)

Sia $G = S_1 \times S_2$ un prodotto diretto di due gruppi isomorfi a centro identico e generati da involuzioni. Se $\sigma : G \to \bar{G}$ è una proiettività allora $\bar{G} = S_1^\sigma \times S_2^\sigma$ ed i gruppi S_1, S_1^σ ed S_2^σ sono a due a due isomorfi.

Dim. Visto che S è generato da involuzioni e tenuto presente che il gruppo quadrinomio è invariante per proiettività, si ricava facilmente da un lato che $\bar{G} = S_1^\sigma \times S_2^\sigma$, dall'altro che $Z(S_1^\sigma) = \{1\}$ se tale è $Z(S_1)$ tenendo presente che σ su S_i conserva gli ordini dei sottogruppi (Lemma 3). Essendo S_1 e S_1^σ generati da involuzioni, i loro gruppi di automorfismi potenza sono identici [1], per cui applicando il Lemma 4 avremo la seguente sequenza di omomorfismi:

$$\operatorname{Aut} S_1 \xrightarrow{\varphi} P(S_1, S_2)/S(S_1, S_2) \xrightarrow{\psi} P(S_1^\sigma, S^\sigma)/S(S_1^\sigma, S_2^\sigma) \xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} \operatorname{Aut} S_1^\sigma$$

con φ e $\bar{\varphi}^{-1}$ isomorfismi e ψ isomorfismo dato da $\pi S(S_1, S_2) \mapsto \mapsto \sigma^{-1}\pi\sigma S(S_1, S_2)$, dove a loro volta i gruppi S_1 ed S_1^σ sono immersi rispettivamente in Aut S_1 ed Aut S_1^σ quali gruppi degli automorfismi interni $I(S_1)$ di S_1 e $I(S_1^\sigma)$ di S_1^σ. Posto $\lambda = \varphi\psi\bar{\varphi}^{-1}$, proviamo che $(I(S_1))^\lambda = = I(S_1^\sigma)$: poichè $I(S_1)$ e $I(S_1^\sigma)$ sono generati da involuzioni, basterà provare che λ muta le involuzioni di $I(S_1)$ su quelle di $I(S_1^\sigma)$. Sia $1 \neq a$ una involuzione, $a \in I(S_1)$ il relativo automorfismo interno; sarà $\gamma = (a)^\lambda \in \operatorname{Aut} S_1^\sigma$ un suo elemento d'ordine 2; d'altra parte se $\langle a \rangle^\sigma = = \langle \bar{g} \rangle$, $\bar{g}$ è una involuzione univocamente individuata da a e σ e che per semplicità denoteremo con $\bar{g} = a^\sigma$. Detto poi β l'automorfismo interno di S_1^σ individuato da a^σ, $\beta = \underline{a}^\sigma$, proviamo che $\beta = \gamma$. All'uopo, visto che S_1^σ è generato da involuzioni, basterà far vedere che β e γ operano allo stesso modo sull involuzioni di S_1^σ. Incominciamo da a^σ; è chiaro che $(a^\sigma)^\beta = a^\sigma$ e vediamo chi è $(a^\sigma)^\gamma$: è $\gamma = (a)^\lambda \in \operatorname{Aut} S_1^\sigma$, che induce sul reticolo dei sottogruppi di S_1^σ l'autoproiettività $\sigma^{-1} a \sigma$ per cui si ha

$$(\langle a \rangle^\sigma)^\gamma = \langle a^\sigma \rangle^{\sigma^{-1} a \sigma} = \langle a \rangle^{a\sigma} = \langle a \rangle^\sigma = \langle a^\sigma \rangle ,$$

per cui $(a^\sigma)^\gamma = a^\sigma$. Sia ora b^σ una involuzione di S_1^σ diversa da a^σ. Sul gruppo diedrale $\langle a, b \rangle$, σ dà luogo ad una proiettività indotta da un isomorfismo α [3]. Pertanto

$$(*) \qquad (b^\sigma)^\beta = (a^\sigma)^{-1} b^\sigma a^\sigma = (a^\alpha)^{-1} b^\alpha a^\alpha = (a^{-1} b a)^\alpha = (a^{-1} b a)^\sigma .$$

È poi $\langle b^\sigma \rangle^\gamma = \langle b^\sigma \rangle^{\sigma^{-1} a \sigma} = \langle b \rangle^{a\sigma} = \langle a^{-1} b a \rangle^\sigma$ per cui

$$(**) \qquad (b^\sigma)^\gamma = (a^{-1} b a^\sigma) .$$

Confrontando (*) con (**) concludiamo che $\beta = \gamma$. Ne consegue facilmente the $(I(S_1)^\lambda = I(S_1^\sigma)$ e poichè λ è un isomorfismo, sarà $I(S_1^\sigma) \simeq \simeq I(S_1)$; da qui $S_1 \simeq I(S_1) \simeq I(S_1^\sigma) \simeq S_1^\sigma$. //

Terminiamo con un'osservazione relativa al problema trattato da Schmidt in [3]. Ivi si dimostra che se H è un assegnato gruppo finito, esiste sempre un gruppo finito K (risolubile, nilpotente se tale è H) tale che il prodotto diretto $H \times K$ è individuato dal reticolo dei suoi sottogruppi. Vogliamo qui far vedere come ad una tale risposta si può pervenire anche nel caso che H sia infinito. Se H è abeliano, basta immergere H in un gruppo abeliano con 2 elementi aperiodici indipendenti, per concludere, in virtù di un teorema di Baer (cf. [8] II th. 3). Se H non è abeliano e se X è un suo sistema di generatori, si consideri il gruppo libero K su X (il gruppo risolubile libero K su X con lunghezza della serie derivata uguale a quella di H, il gruppo libero nilpotente K su X con classe di nilpotenza uguale a quella di H); tenendo presente il già citato teorema di Baer, il fatto che K è residualmente nilpotente senza torsione e che σ su K è una proiettività indotta da un isomorfismo [2] non è difficile vedere che da $G = H \times K$ segue $\bar{G} = H^\sigma \times K^\sigma$. Ora $H \simeq K/N$ per un conveniente $N \lhd K$; ne segue che da $\sigma{:}HN/N \times K/N \to H^\sigma N^\sigma/N^\sigma$ e $HN/N \simeq K/N$ si desume $H^\sigma N^\sigma/N^\sigma \simeq K^\sigma/N^\sigma$; ma K^σ/N^σ è isomorfo a $K/N \simeq H$ per cui $H \simeq \simeq H^\sigma N^\sigma/N^\sigma \simeq H^\sigma$ e infine $G = H \times K$ isomorfo ad $H^\sigma \times K^\sigma$. Un'altra possibile soluzione è di immergere H nel gruppo simmetrico S_H su H ed osservare che da $\sigma{:}H \times S_H \to \bar{G}$ segue $\bar{G} = H^\sigma \times S_H^\sigma$ dato che S_H è generato da gruppi quadrinomi per l'ordine di H non inferiore a 4; σ poi ristretta a S_H è indotto da un isomorfismo [9] per cui la conclusione consegue come sopra.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ch. D. H. Cooper, *Power automorphisms of a group*, Math. Z., **107** (1968) pp. 424-427.

[2] L. Sadovskii, *An approximation theorem and structural isomorphisms*, Soviet Math. Doklady, **161** (1962), pp. 424-427.

[3] R. Schmidt, *Projektivitäten direkter Produkte endlicher Gruppen*, Arch. der Math., **35** (1980), pp. 79-84.

[4] R. Schmidt, *Untergruppenverbände direkter Produkte von Gruppen*, Arch. der Math., **30** (1980), pp. 229-235.

[5] R. SCHMIDT, *Lecture Notes*, Perugia, 1976.
[6] S. STONEHEWER, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.
[7] M. SUZUKI, *On the lattice of sugroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), pp. 345-371.
[8] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer Verlag, Berlin, 1956.
[9] G. ZACHER, *Sul reticolo dei sottogruppi del gruppo simmetrico*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, **9** (1977), pp. 122-126.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° ottobre 1980.