Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Walter Streb

Über einen Satz von Herstein und Nakayama

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 64 (1981), p. 159-171
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__159_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 64 (1981)

Über einen Satz von Herstein und Nakayama.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Für jeden Ring S sei $Z = Z(S)$ das Zentrum von S, $J = J(S)$ das Jacobsonradikal von S und $S[x]$ der Polynomring über S in der Unbestimmten x. Herstein [2] hat unter Verwendung eines bewertungstheoretischen Argumentes von Nakayama [6] folgenden Satz bewiesen:

Sei R ein Ring. Gibt es zu jedem $a \in R$ ein $f_a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, so daß $a - a^2 f_a(a) \in Z$, so ist R kommutativ.

Nakayama [7] hat die entsprechende Aussage für einen wesentlich allgemeineren Koeffizientenring F anstelle von $\mathbb{Z}$ und F-Algebren R gezeigt. F hat hierbei folgende Eigenschaften:

F ist kommutativer Ring mit 1. Es gibt einen Unterring K von F, so daß F als Algebra über K endlich erzeugt ist und K/P algebraisch abgeschlossener Körper ist für jedes Primideal P von R.

Neuerdings sind ähnliche Untersuchungen für Ringe mit Involution durchgeführt worden [3; pp. 110-153].

Wir werden in dieser Note die Voraussetzungen von Herstein und Nakayama stark verallgemeinern, drei interessante Sätze beweisen und weitere Untersuchungen anregen.

Im folgenden sei F ein kommutativer Ring (nicht notwendig mit 1),

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich 6 - Mathematik, Universität Essen - GHS, Universitätsstraße 3, D-4300 Essen 1, Germany-West, BRD.

$F[x, y]$ bzw. $F\langle x, y\rangle$ der Polynomring über F in den vertauschbaren bzw. nicht vertauschbaren Unbestimmten x und y, jedoch ohne konstante Polynome, und R eine F-Algebra (d.h. R Ring, nicht notwendig mit 1, $r(a+b) = ra + rb$, $(r+s)a = ra + sa$, $r(sa) = (rs)a$, $(ra)b = r(ab) = a(rb)$ für alle $r, s \in F$ und $a, b \in R$).

Definition. Sei $f(x, y) \in F\langle x, y\rangle$:

(1) $f(x, y)$ heiße (F, α)-Form, wenn alle Monome von $f(x, y)$ eine Länge $\geqslant 3$ besitzen und $f(x, y)$ Element des Kerns des kanonischen F-Algebrenmorphismuses $F\langle x, y\rangle \to F[x, y]$ ist.

(2) $f(x, y)$ heiße (F, β)-Form, wenn $f(x, y)$ (F, α)-Form ist und in allen Monomen von $f(x, y)$ die Unbestimmte x wenigstens 2-mal vorkommt.

(3) Sei $\xi \in \{\alpha, \beta\}$.

R heiße (F, ξ)-Ring, wenn es zu $a, b \in R$ stets eine (F, ξ)-Form $f_{a,b}(x, y)$ gibt, so daß $ab - ba = f_{a,b}(a, b)$.

R heiße $(F, \bar{\xi})$-Ring, wenn R (F, ξ)-Ring ist und $f_{a,b}(x, y) = f(x, y)$ für alle $a, b \in R$ (unabhängig von a und b).

(4) R heiße (F, γ)-Ring, wenn R (F, β)-Ring ist und folgendes gilt:

Es gibt einen Unterring K von F, so daß F als Algebra über K endlich erzeugt ist und der Quotientenkörper von K/P perfekt ist für jedes Primideal P von K.

Die von Herstein und Nakayama betrachteten Ringe sind (F, γ)-Ringe. Nach einigen Betrachtungen zu (F, α)-Ringen beweisen wir folgende Hauptsätze:

Hauptsatz 1. Ist R (F, β)-Ring, so gilt:

(1) R/J ist subdirektes Produkt von Schiefkörpern;

(2) $J \subset Z$ oder

(*) es gibt Ideale A und B von R, so daß $B \subset A \subset J$ und A/B einfacher nullteilerfreier (radikaler) rechts- und linksseitiger Ore-Ring [1; p. 435].

Hauptsatz 2. Sei R (F, γ)-Ring und I der Durchschnitt aller Ideale A von R, für welche R/A nichtkommutativer Schiefkörper ist. (Falls keine derartigen Ideale A existieren, sei $I = R$). Dann gilt $I \subset Z$ oder (*) aus Hauptsatz 1.

Hauptsatz 3. Jeder $(F, \bar{\beta})$-Ring ist kommutativ.

Wir geben zunächst einige Erläuterungen und Beispiele:

Bemerkung 1. Die Aussage von Hauptsatz 2 ist wesentlich stärker als die Aussage von Hauptsatz 1. Etwa gilt für endliche (F, β)-Ringe nach Hauptsatz 1 lediglich $R' \subset Z$ für das von den Kommutatoren $ab - ba$, $a, b \in R$ erzeugte Ideal R' von R. Endliche (F, γ)-Ringe sind indes nach Hauptsatz 2 kommutativ.

Bemerkung 2. Die Konstruktion eines nichtkommutativen radikalen (F, β)-Ringes würde nach Hauptsatz 1 die Konstruktion eines einfachen nullteilerfreien radikalen rechts- und linksseitigen Ore-Ringes nach sich ziehen.

Die Schärfe von Hauptsatz 2 beleuchten die folgenden Beispiele:

Beispiel 1. Jeder über seinem Zentrum Z algebraische Schiefkörper D mit char $D = 0$ ist (F, γ)-Ring.

Beispiel 2. McLaughlin und Rosenberg [5; p. 207] konstruierten eine Algebra R mit 1 über einem nicht perfekten Körper F für die folgendes gilt: R ist nicht kommutativ, R/J ist Körper, also $I = R$, und $J \subset Z$. Man errechnet, daß R ein (F, β)-Ring ist. Die Voraussetzungen von Hauptsatz 2 sind demnach «scharf».

Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ sei

$$[a, b] := ab - ba \qquad \text{und} \qquad aob := ab + ba \,.$$

Die Aussage von Hauptsatz 3 gilt nicht für $(F, \bar{\alpha})$-Ringe:

Beispiel 3. Sei K ein endlicher Körper mit Primkörper F, K_2 der $2 - 2$-Matrizenring über K und j bzw. k die Ordnung der Einheitengruppe von K bzw. K_2. Dann ist K_2 $(F, \bar{\alpha})$-Ring mit

$$(*) \qquad f(x, y) = g(x, y) + \big([x, y] - g(x, y)\big)[x, y]^{2j} \,.$$

Hierbei sei

$$g(x, y) := [x, y]ox^k + [x, y]oy^k - x^k[x, y]x^k - y^k[x, y]y^k -$$
$$- \big([x, y]ox^k\big)oy^k + \big(x^k[x, y]x^k\big)oy^k + \big(y^k[x, y]y^k\big)ox^k - x^ky^k[x, y]x^ky^k \,.$$

Beispiel 4. Seien F und K Körper, $F \subset K$ und K_n der $n - n$-Matrizenring über K. Dann gilt:

(1) K_2 ist (F, α)-Ring genau dann, wenn K algebraisch über F ist;

(2) K_2 ist $(F, \bar{\alpha})$-Ring genau dann, wenn K endlich ist;

(3) K_2 ist $(\mathbb{Z}, \alpha)$-Ring genau dann, wenn char $K \neq 0$ und K algebraisch über seinem Primkörper ist;

(4) K_n ist (K, α)-Ring genau dann, wenn $n = 2$.

Es erhebt sich die Frage nach entsprechenden Begriffsbildungen für $n - n$-Matrizenringe, $n > 2$.

Bemerkung 3. Im Gegensatz zu den Voraussetzungen von Herstein und Nakayama hat das Zentrum von R bei unseren Voraussetzungen keine « ausgezeichnete Position ». Wesentliche Beweismittel gehen hierdurch verloren. So entfallen bei den Betrachtungen zu Schiefkörpern bewertungstheoretische Hilfen und reichen zur Bearbeitung einfacher radikaler Ringe S die Fakten $Z(S) = 0$ und (aus $ab = a$, $a, b \in S$ folgt $a = 0$) nicht mehr aus.

Beispiel 5. Für den Schiefkörper $\mathbb{R}(1, i, j, k)$ der Hamiltonschen Quaternionen gilt:

$$\mathbb{R}(1, i, j, k) \text{ ist kein } (\mathbb{Q}, \alpha)\text{-Ring (teste } a = i\pi \text{ und } b = j\pi) ,$$
$$\mathbb{Q}(1, i, j, k) \text{ ist kein } (\mathbb{Z}, \alpha)\text{-Ring (teste } a = i - j \text{ und } b = i + j) .$$

Es erhebt sich die interessante Frage nach der Struktur von (F, ξ)-Schiefkörpern bei « geeigneten F und ξ ».

Beweisteil. Wir beginnen mit einigen Notationen für $a, b \in R$ und $A, B \subset R$: $\langle A \rangle$ bzw. (A) sei der von A erzeugte Unterring bzw. das von A erzeugte (zweiseitige) Ideal von R. Für $\langle \{a\} \rangle$ bzw. $(\{a\})$ notieren wir auch $\langle a \rangle$ bzw. (a). A heiße nil, wenn es zu jedem $a \in A$ eine natürliche Zahl n gibt, so daß $a^n = 0$; A heiße nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $A^n = 0$. Weiterhin sei

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= ab - ba , \\
[A, B] &:= \{[a, b] | a \in A,\ b \in B\} , \\
R' &:= ([R, R]) .
\end{aligned}$$

Sei $\xi \in \{\alpha, \beta\}$. Ist R als (F, ξ)-Ring vorausgesetzt, so sei zu $a, b \in R$ (stillschweigend) stets $f_{a,b}(x, y)$ als (F, ξ)-Form gewählt.

Seien A und B Mengen und $\varphi: A \to B$ eine Abbildung. Für $C \subset A$ sei $\varphi|C$ die Einschränkung von φ auf C.

Ist R nullteilerfrei und kommutativ, so sei $Q(R)$ der Quotientenkörper von R.

R heiße F-algebraisch, wenn folgendes gilt: Zu jedem $a \in R$ gibt es $r_i \in F$, $0 < i < n$, so daß $a^n + \sum_{0<i<n} r_i a^i = 0$.

1. Beweis von Hauptsatz 1.

Man verifiziert unmittelbar

Lemma 1. Jede (F, α)-Form $f(x, y)$ besitzt eine Darstellung der Gestalt

$$(*) \qquad f(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} g_i(x, y)[x, y]h_i(x, y)$$

mit $g_i(x, y), h_i(x, y) \in F\langle x, y\rangle \cup \{e\}$, wobei e ein Symbol ist, für welches $e[x, y] = [x, y] = [x, y]e$ gilt.

Lemma 2. Sei $a \in R$, A Ideal von R und $a^2 \in A$.

(1) Ist R (F, α)-Ring und $a \in J$, so gilt $aRa \subset A$.

(2) Ist R (F, β)-Ring, so gilt $aRa \subset A$.

Beweis. Sei $r \in R$.

(1) Mit Lemma 1. $(*)$ erhält man

$$ara \equiv [a, ra] = f_{a,\,ra}(a, ra) \equiv arag(ra) \text{ modulo } A$$

mit $g(x) \in F[x]$ und $g(ar) \in J$, also $ara \in A$.

(2) Mit Lemma 1. $(*)$ erhält man

$$ara \equiv [a, ra] = f_{a,ra}(a, ra) \equiv 0 \text{ modulo } A\,.$$

Ein einfacher Induktionsschluß erbringt nun

Lemma 3. Sei A Ideal von R, $a \in R$ und $a + A/A$ nil.

(1) Ist R (F, α)-Ring und $a \in J$, so ist $(a) + A/A$ nilpotent.

(2) Ist R (F, β)-Ring, so ist $(a) + A/A$ nilpotent.

Corollar 4. Jeder prime (F, β)-Ring R ist nullteilerfrei.

Beweis. Seien $a, b \in R$ mit $ab = 0$. Für alle $r \in R$ gilt $brabra = 0$, also nach Lemma 3. (2) $bra = 0$, somit $a = 0$ oder $b = 0$.

Lemma 5. Ist R nullteilerfreier (F, α)-Ring, so ist jede F-Unteralgebra rechts- und linksseitiger Ore-Ring.

Beweis. Wir zeigen «rechtsseitig», indem wir die folgende Annahme zum Widerspruch führen:

Es gibt $a, b \in R$, mit $a \neq 0 \neq b$, so daß für die von a und b erzeugte F-Unteralgebra S von R gilt: $aS \cap bS = 0$.

Sei genauer $f_{a,b}(x, y) = -xg(x, y) + yh(x, y)$. Dann gilt

$$a(b + g(a, b)) = b(a + h(a, b)), \quad \text{also} \quad b + g(a, b) = 0 = a + h(a, b).$$

Wähle nun $f(x, y) \in F\langle x, y\rangle$ so, daß $a + f(a, b) = 0$ oder $b + f(a, b) = 0$, alle Monome von $f(x, y)$ einen Grad$\geqslant 2$ haben und möglichst wenige Monome vorkommen. Sei genauer $f(x, y) = xg_1(x, y) + yh_1(x, y)$ und o.E. $a + f(a, b) = 0$. Für $c \in \{a, b\}$ gilt

$$0 = (a + f(a, b))c = a(c + g_1(a, b)c) + bh_1(a, b)c,$$

also $c + g_1(a, b)c = 0$. Wegen der Minimalitätseigenschaft von $f(x, y)$ ist $h_1(x, y) = 0$. Also beginnt jedes Monom von $f(x, y)$ mit x.

Die analogen Überlegungen für a und $g_1(x, y)x$, b und $g_1(x, y)y$ führen auf den Widerspruch, daß jedes Monom von $g_1(x, y)$ mit x und y beginnt. Insgesamt gilt «rechtsseitig». Analog zeigt man «linksseitig».

Lemma 6. Sei $\xi \in \{\alpha, \beta\}$, R (F, ξ)-Ring und $n \in \mathbb{N}$:

Für alle $a, b \in R$ kann $f_{a,b}(x, y)$ so gewählt werden, daß n untere Schranke für die Länge der Monome von $f_{a,b}(x, y)$ ist.

Beweis. Man führt in der Darstellung Lemma 1. $(*)$ von $f_{a,b}(x, y)$ mehrmals die Substitution $f_{a,b}(x, y) \to [x, y]$ aus.

Lemma 7. Sei A Ideal von R und $B \subset A$.

(1) Ist R (F, α)-Ring und $B + A/A$ nilpotent, so gilt $[\langle B\rangle, \langle B\rangle] \subset A$.

(2) Ist R (F, α)-Ring, $B \subset J$ und $B + A/A$ nil, so gilt $[(B), (B)] \subset A$.

(3) Ist R (F, β)-Ring und $B + A/A$ nil, so gilt $[(B), (B)] \subset A$.

Beweis. (1) Erhält man unmittelbar mit Lemma 6.

(2) Seien $a, b \in B$. Nach Lemma 3. (1) sind $(a) + A/A$ und $(b) + A/A$ nilpotent. Also ist $(a) + (b) + A/A$ nilpotent. Nach Lemma 6 gilt $[(a), (b)] \subset A$. Nun folgt unmittelbar die Behauptung.

(3) Zeigt man analog mit Lemma 3. (2).

Lemma 8. Sei R linksseitig primitiver Ring.

(1) Ist R (F, α)-Ring, so ist R Schiefkörper oder $2 - 2$-Matrizenring über einem F-algebraischen Schiefkörper.

(2) Ist R (F, β)-Ring, so ist R Schiefkörper.

Beweis. R ist dichter Unterring des Ringes L aller D-linearen Abbildungen $V_D \to V_D$ eines Vektorraumes V_D über einem Schiefkörper D.

(1) Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann besitzt V_D einen 3-dimensionalen Unterraum W. Sei

$$S := \{u \in R | u(W) \subset W\} \qquad \text{und} \qquad T := \{u|W \mid u \in S\} .$$

T ist ringisomorph zum $3 - 3$-Matrizenring über D und die Abbildung $S \to T$, $u \to u|W$ ein surjektiver Ringmorphismus. Es gibt $c, d \in T$, so daß $\langle\{c, d\}\rangle^3 = 0$ und $[c, d] \neq 0$. Für $a, b \in S$ mit $a|W = c$ und $b|W = d$ erhält man bei Beachtung von Lemma 6 den Widerspruch

$$[a, b]|W \neq 0 \qquad \text{und} \qquad f_{a,b}(a, b)|W = 0 .$$

Sei nun R $2 - 2$-Matrizenring über D mit Einselement 1.

Wegen $F1 \subset Z(D)$ sei o.E. $F \subset Z(D)$. Zu $0 \neq d \in D$ gibt es $g(x) \in \in F[x]$, so daß für $A := \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [A, B] = f_{A,B}(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & g(d)d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $g(d) = 1$.

(2) Nach Lemma 7. (3) ist R nicht $2 - 2$-Matrizenring über einem Schiefkörper. Mit (1) erhält man die Behauptung.

LEMMA 9. Sei R (F, β)-Ring und A Ideal von R.

(1) Ist $[A, A] = 0$, so gilt $A \subset Z$.

(2) Ist $[A, A] \subset Z$ und $A \subset J$, so gilt $A \subset Z$.

BEWEIS. Seien $a, b \in A$ und $r \in R$.

(1) Mit Lemma 1. $(*)$ erhält man
$[a, r] = f_{a,r}(a, r) \in \big([A, R]\big)A + A\big([A, R]\big) \subset \big([A, A]\big) = 0$.

(2) Nach Lemma 1. $(*)$ gibt es $g(x, y) \in F\langle x, y\rangle$, so daß

$$[a, b] = f_{a,b}(a, b) = g(a, b)[a, b]$$

mit $g(a, b) \in J$, also $[a, b] = 0$. Mit (1) folgt die Behauptung.

LEMMA 10. Sei R ein Ring mit folgender Eigenschaft:

Es gibt nicht Ideale A und B von R, so daß $B \subset A \subset J$ und A/B einfacher (radikaler) Ring.

(1) Ist R (F, α)-Ring, so ist $J \cap R'$ kommutativ.

(2) Ist R (F, β)-Ring, so gilt $J \subset Z$.

BEWEIS.

(1) Nach Lemma 7. (2) reicht es zu zeigen, daß $C := J \cap R'$ nil ist. Hierzu führen wir die Annahme $c \in C$ und $c^3 \neq 0$ zum Widerspruch. Nach Zorn's Lemma gibt es ein Ideal B von R, so daß $B \subset (c^3)$ und $(c^3)/B$ einfacher Ring oder $(c^3)^2 \subset B$. Nach Voraussetzung ist $(c^3)^2 \subset B$, also nach Lemma 7. (2) $[(c), (c)] \subset B$, somit $(c)^3 \subset (c)^2 R' \subset$ $\subset \big([(c), (c)]\big) \subset B$ im Widerspruch zu $c^3 \notin B$.

(2) Gilt nach (1) und Lemma 9. (2).

Hauptsatz 1 erhält man nun unmittelbar mit Lemma 8. (2), Lemma 10. (2), Corollary 4 and Lemma 5.

2. In diesem Teil sei R eine subdirekt irreduzible F-Algebra mit kleinstem F-Algebraideal U und R' kommutativ.

LEMMA 11. Es gilt (1), (2) oder (3).

(1) $(R')^2 = 0$ und $R' \cap Z = 0$;

(2) $U \subset Z$ und $RU = 0$;

(3) $U \subset Z$ und R/V Körper. Hierbei sei $V := \{a \in R \mid aU = 0\}$.

Beweis. Zunächst ist $(R')^2 \subset Z$, also $(R')^2 = 0$ oder $U \subset Z$.

Falls $(R')^2 = 0$, ist $R' \cap Z$ Ideal von R, also $R' \cap Z = 0$ oder $U \subset Z$. Sei nun $U \subset Z$ und $V \neq R$. Wir zeigen, daß R/V Körper ist.

Zunächst ist $R'D = 0$, also $R' \subset V$. Somit ist R/V kommutativ.

Für $a, b \in R \setminus V$ gilt: Es gibt $u \in U$, sodaß $au \neq 0$, demnach $Rau = U$. Folglich gibt es $c \in R$, so daß $cau = u$, also $bcau = bu$, somit $(bca - b)u = 0$, demnach $bca - b \in V$.

Insgesamt ist R/V Körper.

Lemma 12. Sei R (F, α)-Ring.

Ist $a, b \in V$ und $[a, b] \in Z$, so gilt $[a, b] = 0$.

Beweis. Wir führen die Annahme $[a, b] \neq 0$ mit $a, b \in V$ zum Widerspruch. Mit Lemma 1. (∗) erhält man

$$[a, b] = f_{a,b}(a, b) \in V[a, b] .$$

Also gibt es $c \in V$, so daß $d = cd$ für alle $d \in ([a, b]) \supset D$; Widerspruch.

Lemma 13. Ist R nicht kommutativer (F, β)-Ring, so ist $V \subset Z$ und R/V Körper.

Beweis. Nach Lemma 9. (1) ist $R' \subset Z$, insbesondere $R' \cap Z \neq 0$.

Lemma 12 erbringt $[V, V] = 0$. Mit Lemma 9. (1) erhält man nun $V \subset Z$, insbesondere $V \neq R$. Die Behauptung ist jetzt eine Konsequenz von Lemma 11.

Bis zum Ende von Teil II sei $V \subset Z$, R/V Körper und $e \in R$, so daß $e + V$ Einselement von R/V. Für $a \in R$ sei $\bar{a} := a + V$.

Lemma 14. Ist R (F, γ)-Ring, als F-Algebra endlich erzeugt und $K\bar{e} \neq 0$, so gilt:

(1) R/V ist algebraisch über $Q(K\bar{e})$;

(2) $e \in Z$;

(3) R ist kommutativ.

Beweis. (1) Gilt nach [4; Corollar 1, p. 255].

(2) Wir führen die Annahme $[e, a] \neq 0$ mit $a \in R$ zum Widerspruch. Sei $g(x) \in K[x]$ so gewählt, daß $\bar{e}g(x)$ Minimalpolynom von $\bar{a}$ über $Q(K\bar{e})$ ist. Für die formale Ableitung $g'(x)$ von $g(x)$ nach x gilt $0 = [eg(a), e] = eg'(a)[a, e]$, also $\bar{e}g'(\bar{a}) = 0$, somit $\bar{e}g'(x) = 0$. Im Widerspruch hierzu ist $Q(K\bar{e})$ perfekt.

(3) Wir führen die Annahme $[a, b] \neq 0$ mit $a, b \in R$ zum Widerspruch. Sei $g(x) \in K[x]$ so gewählt, daß $\bar{e}g(x)$ Minimalpolynom von $\bar{a}$ über $Q(K\bar{e})$ ist. Wegen (2) gilt $0 = [eg(a), b] = eg'(a)[a, b]$, also $\bar{e}g'(\bar{a}) = 0$, somit $\bar{e}g'(x) = 0$. Im Widerspruch hierzu ist $Q(K\bar{e})$ perfekt.

Lemma 15. Ist R (F, γ)-Ring, als F-Algebra endlich erzeugt und $K\bar{e} = 0$, so ist R kommutativ.

Beweis. Nach [4; Corollar 1, p. 255] ist R/V algebraisch über seinem Primkörper. Weiter schließt man wie im Beweis von Lemma 14.

Lemma 16. Ist R $(F, \bar{\beta})$-Ring, so ist R kommutativ.

Beweis. Sei $S := \{u \in R \mid [u, e] = 0\}$. Dann ist $\bar{S} := S/V$ Körper und $F\bar{e} \subset \bar{S}$. Für alle $a \in R \setminus S$ gilt

$$[a, e] = f(a, e) = g(a, e)[a, e] \quad \text{mit} \quad g(x, y) \in F[x, y]\,,$$

also $g(\bar{a}, \bar{e}) - \bar{e} = 0$ mit $g(x, \bar{e}) - \bar{e} \in \bar{S}[x]$. Somit ist $R = S$ oder R/V endlich, also $e \in Z$ oder $R' = 0$.

Sei nun $e \in Z$, $b \in R$ und $T := \{u \in R \mid [u, b] = 0\}$.

Dann ist $\bar{T} := T/V$ Körper und $F\bar{b} \subset \bar{T}$. Für alle $a \in R \setminus T$ gilt

$$[a, b] = f(a, b) = g(a, b)[a, b] \quad \text{mit} \quad g(x, y) \in F[x, y]\,,$$

also $g(\bar{a}, \bar{b}) - \bar{e} = 0$ mit $g(x, \bar{b}) - \bar{e} \in \bar{T}[x]$. Somit ist $R = T$ oder R/V endlich, also $b \in Z$ oder $R' = 0$.

Insgesamt ist R kommutativ.

3. Beweis von Hauptsatz 2 und 3.

Beweis von Hauptsatz 2. Sei $(*)$ aus Hauptsatz 1 nicht gegeben. Nach Hauptsatz 1 und Lemma 10. (2) ist $([I, I]) \subset J \subset Z$.

Für $a, b \in I$ sei S die von a und b erzeugte F-Unteralgebra von R. Anwendung von Lemma 13-15 auf die subdirekt irreduziblen Bilder von S erbringt $[a, b] = 0$.

Insgesamt ist $[I, I] = 0$, also $I \subset Z$ nach Lemma 9. (1).

Beweis von Hauptsatz 3.

(a) Sei zunächst R primer Ring. Für alle $a, b \in R$ und $z \in Z$

gilt

$$z[a, b] = [za, b] = f(za, b) .$$

Ist Z nicht endlich, so erhält man durch Homogenisierung $[a, b] = 0$ für alle $a, b \in R$. Ist Z endlich, also Z Körper, so sei o.E. $F \subset Z$ wegen $F1 \subset Z$. Nach [1; Theorem 6, p. 455 und Theorem 7, p. 464] ist R endlicher einfacher Ring. Nach Lemma 8. (2) ist R Körper.

(b) Ist R halbprim, so ist $R' = 0$ nach (a).

(c) Für einen beliebigen Ring gilt $R' \subset Z$ nach (b), Lemma 7. (3) und Lemma 9. (1). Anwendung von Lemma 16 auf die subdirekt irreduziblen Bilder von R erbringt $R' = 0$.

4. Beweis zu Beispiel 3.

Seien $u, v \in R$. Ist $\det [u, v] \neq 0$, so gilt $[u, v]^{2j} = 1$, also Beispiel 3. (∗) für $x = u$ und $y = v$. O.E. sei deshalb $\det [u, v] = 0$, somit $[u, v]^2 = 0$.

Es reicht zu zeigen:

(a) $[u, v] = g(u, v)$.

Ist $\det (u) \neq 0$ oder $\det (v) \neq 0$, so gilt $u^k = 1$ oder $v^k = 1$, also (a). O.E. sei deshalb zusätzlich $\det (u) = 0 = \det (v)$.

Zunächst bemerken wir:

(b) Mit $[u, v] = g(u, v)$ gilt $[ru, sv] = g(ru, sv)$ für alle $r, s \in K$.

Aus

(c) $\{u^k[u, v],\ [u, v]u^k,\ v^k[u, v],\ [u, v]v^k\} = \{0, [u, v]\}$

folgt (a). Es reicht deshalb (c) zu zeigen:

Ist genauer $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, so gilt:

(d) $u^2 = (a + d)u$ und $v^2 = (e + h)v$.

(e) Für $a = 1 = e$ oder $d = 1 = h$ gilt

$$0 = \det [u, v] = (1 + bg)(1 + cf)(b - f)(c - g) .$$

Für $a = 1 = e$ oder $d = 1 = h$ ermöglicht (*e*) eine Fallunterscheidung mit der man bei Beachtung von (*d*) leicht (*c*) verifiziert.

Gemäß (*b*) sei deshalb o.E. $ae = 0 = dh$. Ist

$$b = 0 = f \quad \text{oder} \quad c = 0 = g\,,$$

so zeigt man unmittelbar (*c*).

Gemäß (*b*) sei deshalb o.E. ($b = 1$ oder $f = 1$) und ($c = 1$ oder $g = 1$). Nun folgt leicht (*c*).

Übrigens gilt im Ring der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in K$ sogar die Identität $[x, y] = (x^j + y^j - x^j y^j)[x, y]$.

Beweis zu Beispiel 4.

(1) « $\Rightarrow$ » gilt nach Lemma 8. (1).

« $\Leftarrow$ »: Zunächst ist K_2 algebraisch über F. Seien $u, v \in K_2$:

Ist $\det(u) \neq 0$, so gibt es $f(x) \in F[x]$, so daß $u = u^2 f(u)$, also $[u, v] = [u^2 f(u), v]$. O.E. sei deshalb $\det(u) = 0$ und analog $\det(v) = 0$.

Ist $\det[u, v] \neq 0$, so gibt es $f(x) \in F[x]$, so daß $[u, v] = [u, v]^2 f([u, v])$. O.E. sei deshalb $\det[u, v] = 0$.

Sei nun genauer $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Ist $a + d \neq 0$, so gibt es $f(x) \in F[x]$, so daß $(a + d) f(a + d) = 1$, also $u^2 f(u) = u(a + d) f(a + d) = u$, somit $[u, v] = [u^2 f(u), v]$. O.E. sei deshalb $a + d = 0$ und analog $e + h = 0$.

Für $a \neq 0 \neq e$ ist $u = a\begin{pmatrix} 1 & r \\ -r^{-1} & -1 \end{pmatrix}$ und $v = e\begin{pmatrix} 1 & s \\ -s^{-1} & -1 \end{pmatrix}$, also

$$0 = \det[u, v] = (ae)^2(1 - rs^{-1})(1 - r^{-1}s)(r - s)(s^{-1} - r^{-1})\,,$$

somit $r = s$, demnach $[u, v] = 0$.

O.E. sei $a = 0$ oder $e = 0$. Jetzt erhält man leicht die Behauptung.

(2) « $\Rightarrow$ »: Die Annahme, K sei nicht endlich, führt analog Beweis von Hauptsatz 3, Schritt (*a*), auf den Widerspruch $[K_2, K_2] = 0$.

« $\Leftarrow$ » gilt nach Beispiel 3.

(3) « $\Rightarrow$ »: Nach Lemma 8. (1) ist K $\mathbb{Z}$-algebraisch, also char $K \neq 0$. Weiter schließt man mit (1).

« $\Leftarrow$ » gilt nach (1).

(4) gilt nach Lemma 8. (1) und (1).

LITERATUR

[1] P. M. COHN, *Algebra*, vol. 2, John Wiley & Sons, London - New York - Sydney - Toronto, 1977.

[2] I.N. HERSTEIN, *The structure of a certain class of rings*, Amer. J. Math., **75** (1953), pp. 864-871.

[3] I. N. HERSTEIN, *Rings with Involution*, University of Chicago Press, Chicago, 1976.

[4] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts - Menlo Park, California - London - Sydney - Manila, 1971.

[5] J. E. MCLAUGHLIN - A. ROSENBERG, *Zero divisors and commutativity of rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), pp. 203-211.

[6] T. NAKAYAMA, *On the commutativity of certain division rings*, Cand. J. Math., **5** (1953), pp. 242-244.

[7] T. NAKAYAMA, *A remark on the commutativity of algebraic rings*, Nagoya Mat. J. **14** (1959), pp. 39-44.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 febbraio 1980.