

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RAFFAELE BALLI

Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema di radiazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 63 (1980), p. 69-82

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__69_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__69_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema di radiazione.

RAFFAELE BALLI (*)

SUMMARY - We study the asymptotic representation of the solution for a radiation problem connected with the scattering n -bodies problem.

1. Si considera il problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta \varphi + k^2 \varphi = f(x) \\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial |x|} - ik\varphi(x) = O(|x|^{-n/2-1/2}) \quad |x| \rightarrow +\infty \\ \varphi(x) = O(|x|^{-n/2+1/2}) \quad |x| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

in cui Δ è l'operatore di Laplace in R^n ($n \geq 3$), k una costante reale positiva, $f(x)$ una assegnata funzione di R^n con le seguenti proprietà: $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$, $f(x) = O(|x|^{-n-2})$ per $|x| \rightarrow +\infty$, $|f(x)| \leq \Phi(|x|)$ con $\Phi(|x|) \in L^1$.

Sotto queste ipotesi si determina la soluzione $\varphi(x)$ nello spazio $W^{2,n-1}(R^n)$ per $n \geq 4$ (nel caso $n = 3$ $\varphi(x) \in W_{loc}^{2,2}(R^n)$), detta soluzione, come è noto, è unica [1].

A problemi del tipo (1.1) ci si riconduce, tra l'altro, in Meccanica quantistica nello studio dello scattering da potenziale (locale e non locale) nel caso degli m -corpi, qualora si enunci detto problema nella sua forma integrale [2], [3], [4], [5].

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Perugia, 06100 Perugia.

Utilizzando la formula di Green è agevole ricavare la soluzione formale del problema (1.1)

$$(1.2) \quad \varphi(x) = S \int \frac{H_{n/2-1}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2-1}} f(y) dy$$

in cui $S = -i2^{-(n/2+1)}k^{n/2-1}\pi^{1-n/2}$, $H_\nu^1(z)$ è la funzione di Hankel e l'integrale è esteso ad R^n .

Si prova che la (1.2) è soluzione effettiva del problema e si assegna per questa e per la sua derivata radiale il comportamento asintotico troncato al primo termine. Si determina infine per la $\varphi(x)$ e per la sua derivata radiale lo sviluppo asintotico completo sotto opportune ipotesi su $f(x)$.

2. Al fine di dimostrare che $\varphi(x)$ definita da (1.2) è l'effettiva soluzione del problema (1.1) conviene utilizzare la seguente decomposizione della $\varphi(x)$ stessa:

$$(2.1) \quad \varphi(x) = s[\mu u(x) + v(x)]$$

con

$$u(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad v(x) = \int \left[\frac{H_{n/2-1}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2-1}} - \frac{\mu}{|x-y|^{n-2}} \right] f(y) dy,$$

$$\mu = -i\pi^{-1}(2/k)^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

e stabilire separatamente alcune proprietà di $u(x)$ e $v(x)$.

LEMMA 1. Se $f(x) \in L^1 \cap L^{n-1}$, $u(x)$ verifica le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \left(\int_{|x| < r} |u(x)|^{n-1} dx \right)^{1/(n-1)} \leq \\ & \leq B^{(n^3-3n+4)/n(n-1)} \left(\frac{r^n}{n} \right)^{2/n(n-1)} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n-2} \right)^{(n-2)/n} \|f\|_{L^{n-1}}^{(n-2)/n} \|f\|_{L^1}^{2/n} \end{aligned}$$

in cui si è indicata con B l'area della sfera unitaria in R^n .

$$\text{ii)} \quad u(x) \in W_{\text{loc}}^{2,n-1}(R^n).$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{B}{n} \delta_j^i (n-2) f(x) - \int f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) dy$$

quasi ovunque in R^n ; l'integrale a secondo membro è il valore principale secondo Calderon-Zygmund [6] dell'integrale singolare di convoluzione

$$f * \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot |x - y|^{2-n},$$

cioè il limite in media di ordine $n-1$ per $\lambda \rightarrow 0$ di

$$\int_{|x-y|>\lambda} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

$$\text{iv) } \Delta u(x) = -B(n-2)f(x).$$

DIM. Operando in analogia a [4] si ha:

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_{|x-y|<\lambda} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy + \int_{|x-y|>\lambda} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \right| \leq \\ &\leq |(N_{n-2,\lambda} * f)(x)| + \frac{1}{\lambda^{n-2}} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

con

$$N_{n-2,\lambda}(x) = |x|^{2-n} \quad \text{se } |x| \leq \lambda, \quad N_{n-2,\lambda}(x) = 0 \quad \text{se } |x| > \lambda.$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Young [7] sulla convoluzione

$$\|N_{n-2,\lambda} * f\|_{L^{n-1}} \leq \|N_{n-2,\lambda}\|_{L^1} \|f\|_{L^{n-1}} = B \frac{\lambda^2}{2} \|f\|_{L^{n-1}}$$

si ha:

$$\left(\int_{|x|<r} |u(x)|^{n-1} dx \right)^{1/(n-1)} \leq B \frac{\lambda^2}{2} \|f\|_{L^{n-1}} + \frac{1}{\lambda^{n-2}} \left(\frac{B r^n}{n} \right)^{1/(n-1)} \|f\|_{L^1}$$

da cui segue la proprietà i) minimizzando in λ .

Sia $\{f_n\} \in C_0^\infty(R^n)$ una successione tale che

$$\|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad \|f - f_n\|_{L^{n-1}} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

si definisce la successione degli $u_n \in C^\infty(R^n)$

$$u_n(x) = \int \frac{f_n(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = \int \frac{1}{|y|^{n-2}} f_n(x-y) dy$$

da cui

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} = \int \frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{\partial f_n(x-y)}{\partial x_i} dy = \int \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial f_n(y)}{\partial y_i} dy$$

mentre con opportune integrazioni per parti si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n(x)}{\partial x_i \partial x_j} &= \int \frac{\partial f_n(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \lambda} \frac{\partial f_n(y)}{\partial y_i} \cdot \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy = -\delta_j^i B \frac{n-2}{n} f_n(x) + \int f_n(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza i) si riconosce che $u(x)$ è il limite locale in media di ordine $n-1$ della successione $\{u_n\} \subset C^\infty(R^n)$. Posto inoltre:

$$u_{ij}(x) = -\delta_j^i \frac{n-2}{n} B f(x) + \int f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy$$

dalla disuguaglianza di Calderon-Zygmund

$$\|u_{ij}\|_{L^{n-1}} < C_{n-1} \|f\|_{L^{n-1}}$$

si ha:

$$\left\| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} - u_{ij} \right\|_{L^{n-1}} \leq C_{n-1} \|f - f_n\|_{L^{n-1}} \quad n \rightarrow \infty$$

e quindi $\{\partial^2 u_n / (\partial x_i \partial x_j)\}$ converge in media di ordine $n-1$ a $u_{ij}(x) \in L^{n-1}(R^n)$. Si conclude che $u(x) \in W_{loc}^{2,n-1}$ e $u_{ij}(x) = \partial^2 u(x) / (\partial x_i \partial x_j)$; da ciò seguono le proprietà ii), iii), iv).

LEMMA 2. Se $f(x) \in L^1 \cap L^{n-1}$, $v(x)$ ha le seguenti proprietà:

- i) $v(x), \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ sono limitate;
- ii) $v(x) \in C^2(R^n)$
- iii) $\Delta v(x) = -\frac{k^2}{S} \varphi(x)$.

Se $n \geq 4$ è possibile, utilizzando ben note decomposizioni di $H_r^1(z)$ scrivere $v(x)$ nella seguente forma:

$$v(x) = \int f(y) \frac{N(r)}{r^{n-4}} dy \quad r = |x - y|$$

con $N(r) = P(r) + r^{n-4}L(r) + r^{n-4}W(r) \lg(-ik(r/2))$, dove $P(r)$ è un polinomio in r di ordine $\leq n-5$ e quindi nullo per $n=4$, $L(r)$ è una funzione regolare e limitata, $W(r)$ è una funzione regolare e limitata se n è pari ed è identicamente nulla se n è dispari.

DM.

$$\begin{aligned} (2.2) \quad |v(x)| &\leq \int |f(y)| \frac{|N(r)|}{r^{n-4}} dy \leq M_1 \int_{|r| \leq 1} \frac{|f(y)|}{r^{n-4}} dy + M_2 \|f\|_{L^1} \leq \\ &\leq M_1 \left(B \frac{n-2}{3n-4} \right)^{(n-2)/(n-1)} \|f\|_{L^{n-1}} + M_2 \|f\|_{L^1} \\ M_1 &= \max_{r \leq 1} |N(r)| \quad M_2 = \max_{r \geq 1} \frac{|N(r)|}{r^{n-4}}. \end{aligned}$$

Posto

$$v_i(x) = \int f(y) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N(r)}{r^{n-4}} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i} dy$$

e

$$v_{ij}(x) = \int f(y) \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{N(r)}{r^{n-4}} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N(r)}{r^{n-4}} \right) \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \right] dy$$

si riconosce che $v_i(x)$ e $v_{ij}(x)$ sono limitate.

Tenendo conto delle formule di derivazione di $r^{1-n/2} H_{n/2-1}^1(kr)$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{N(r)}{r^{n-4}} = \frac{\bar{P}(r) + r^{n-3} \bar{L}(r) + r^{n-3} \bar{W}(r) \lg(-ik(r/2))}{r^{n-3}} = \frac{\bar{N}(r)}{r^{n-3}}$$

in cui $\bar{P}(r)$ è un polinomio in r di ordine $\leq n-4$, $\bar{L}(r)$ e $\bar{W}(r)$ sono funzioni dello stesso tipo di $L(r)$ e $W(r)$.

Ne segue, essendo $|\partial r / \partial x_i| < 1$ ed operando in analogia a sopra

$$\begin{aligned} (2.3) \quad |v_i(x)| &\leq \int |f(y)| \frac{|\bar{N}(r)|}{r^{n-3}} dy \leq M_3 \left(B \frac{n-2}{2n-3} \right)^{(n-2)/(n-1)} \|f\|_{L^{n-1}} + M_4 \|f\|_{L^1} \\ M_3 &= \max_{r \leq 1} |\bar{N}(r)|, \quad M_4 = \max_{r \geq 1} \frac{|\bar{N}(r)|}{r^{n-3}} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $v_{ij}(x)$ si introduca in analogia $\bar{\bar{N}}(r)$; essendo $|\partial^2 r / (\partial x_i \partial x_j)| < 2/r$ si ha:

$$(2.4) \quad |v_{ij}(x)| \leq \int |f(y)| \frac{|\bar{\bar{N}}(r)|}{r^{n-2}} dy + 2 \int |f(y)| \frac{|\bar{N}(r)|}{r^{n-2}} dy \leq \\ \leq (M_5 + 2M_3) B^{(n-2)/(n-1)} \|f\|_{L^{n-1}} + (M_6 + 2M_7) \|f\|_{L^1}, \\ M_5 = \max_{r \leq 1} |\bar{\bar{N}}(r)|, \quad M_6 = \max_{r \geq 1} \frac{|\bar{\bar{N}}(r)|}{r^{n-2}}, \quad M_7 = \max_{r \geq 1} \frac{|\bar{N}(r)|}{r^{n-2}}.$$

Introdotta una successione $\{f_n\} \subset C_0^\infty(R^n)$ tale che

$$\|f - f_n\|_{L^{n-1}} \rightarrow 0 \quad \|f - f_n\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

si definiscono le funzioni $v_n \in C^\infty(R^n)$:

$$v_n(x) = \int f_n(y) \frac{N(|x-y|)}{|x-y|^{n-4}} dy = \int f_n(x-y) \frac{N(|y|)}{|y|^{n-4}} dy;$$

da queste per derivazione si ha:

$$\frac{\partial v_n(x)}{\partial x_i} = \int f_n(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{N(|x-y|)}{|x-y|^{n-4}} dy \\ \frac{\partial^2 v_n(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int f_n(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{N(|x-y|)}{|x-y|^{n-4}} dy.$$

Dalle (2.2), (2.3), (2.4) si ottiene che $\{v_n(x)\}$, $\{\partial v_n(x)/\partial x_i\}$, $\{\partial^2 v_n(x)/\partial x_i \partial x_j\}$ sono successioni di funzioni continue uniformemente convergenti a $v(x)$, $v_i(x)$, $v_{ij}(x)$ rispettivamente. Si conclude così che $v(x) \in C^2(R^n)$ e che $v_i = \partial v / \partial x_i$, $v_{ij} = \partial^2 v / (\partial x_i \partial x_j)$ e quindi restano dimostrate le proprietà i) ed ii). La proprietà iii) si deduce dalla

$$\Delta v(x) = \int f(y) \Delta \left[\frac{H_{n/2-1}^1(kr)}{r^{n/2-1}} - \frac{\mu}{r^{n-2}} \right] dy$$

tenuto conto che

$$\Delta \left[\frac{H_{n/2-1}^1(kr)}{r^{n/2-1}} - \frac{\mu}{r^{n-2}} \right] = -k^2 \frac{H_{n/2-1}^1(kr)}{r^{n/2-1}}.$$

Nel caso $n = 3$ è $N(r) = \exp [ikr] - 1$ e le proprietà si dimostrano in maniera analoga [4].

Dai Lemmi 1 e 2 e dalla (2.1) segue:

TEOREMA 1. Se $f(x) \in L^1 \cap L^{n-1}$ la $\varphi(x)$ definita dalla (1.2) verifica l'equazione $\Delta \varphi + k^2 \varphi = f(x)$ ed appartiene a $W_{\text{loc}}^{2,n-1}(R^n)$.

3. TEOREMA 2. Se $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$, $f(x) = o(|x|^{-n/2-2M+1} \exp [-k|x|/2])$ lo sviluppo asintotico della (1.2) troncato all'ordine M è dato da:

$$(3.1) \quad \varphi(x) = \bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp [ik|x|] \sum_{h=0}^{M-1} (-2ik|x|)^{-h} \frac{(-1)^{h+1}}{h!} \cdot \\ \cdot \sum_{j=0}^h \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2(h-j)}} \{h, h-j\} \int |y|^{-(n/2-1)} f(y) \nabla_0^j (\exp [-ik|y| \cos \theta] |y|^{n/2-1}) dy + \\ + O(|x|^{-n/2-M+1/2})$$

dove

$$\bar{S} = S \left(\frac{\pi k}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) - i \frac{\pi}{4} \right], \quad \cos \theta = (x, y)/|x||y|, \\ \{h, h-j\} = \sum_{\substack{a_1, a_2, \dots, a_{h-j}=1 \\ a_1 < a_2 < \dots < a_{h-j}}} (2a_1 - 1)^2 (2a_2 - 1)^2 \dots (2a_{h-j} - 1)^2 \\ \{h, 0\} = \{0, 0\} = 1,$$

∇_0^j è la potenza j -esima dell'operatore di Bessel di ordine 0

$$\nabla_0 = |y|^2 \frac{d^2}{d|y|^2} + |y| \frac{d}{d|y|} + k^2 |y|^2.$$

DIM. Tenendo conto del teorema di addizione per le funzioni cilindriche [8]:

$$w^{-\nu} H_{\nu}^1(kw) = 2^{\nu} k^{-\nu} \Gamma(\nu) (r\rho)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) C_m^{\nu}(\cos \theta) J_{\nu+m}(k\rho) H_{\nu+m}^1(kr)$$

con

$$w = (\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \quad 0 < \rho < r$$

e del comportamento asintotico di $H_{\nu}^1(z)$ [9]:

$$H_{\nu}^1(z) = \left(\frac{\pi z}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[i \left(z - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[\sum_{m=0}^{M-1} (\nu, m) (-2iz)^{-m} + R_{\nu, M}(z) \right]$$

e delle disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
 & \left| R_{n/2-1+m, M}(k|y|) \right| \leq \frac{1}{M!} (2k)^{-M} \left| \frac{3}{2} - \frac{n}{2} - m \right|_M \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} + m \right)_M |y|^{-M}; \\
 & |C_m^{n/2-1}(\cos \theta)| \leq \binom{m+n-3}{m}; |J_{n/2-1+m}(k|x|)| \leq \left(\frac{k|x|}{2} \right)^{n/2-1+m} / \Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right), \\
 & \text{indicato con } \varphi_M(x) \text{ la somma dei primi } M \text{ termini di (3.1) si ha:} \\
 & |\varphi(x) - \varphi_M(x)| = \left| S 2^{n/2-1} k^{-(n/2-1)} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) |x|^{-(n/2-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(k\pi \frac{|x|}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \cdot \exp \left[i \left[k|x| - \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 + m \right) - \frac{\pi}{4} \right] \right] R_{n/2-1+m, M} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1 + m \right) \cdot \\
 & \quad \cdot \int f(y) |y|^{-(n/2-1)} C_m^{n/2-1}(\cos \theta) J_{n/2-1+m}(k|y|) dy \leq \\
 & \quad \leq \frac{|S 2^{n/2-1} k^{-(n/2-1)} \Gamma(n/2 - 1)|}{|x|^{n/2-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\pi k}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2} - 1 + m \right) \cdot \\
 & \quad \cdot |R_{n/2-1+m, M}| \int |f(y)| |y|^{-(n/2-1)} |C_m^{n/2-1}(\cos \theta)| |J_{n/2-1+m}(k|y|)| dy \leq \\
 & \quad \leq \frac{|S \Gamma(n/2 - 1)|}{|x|^{n/2-\frac{1}{2}+M}} \left(\frac{\pi k}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(2k)^{-M}}{M!} \sum_{m=0}^{\infty} \cdot \\
 & \quad \cdot \left(\frac{n}{2} - 1 + m \right) \left| \frac{3}{2} - \frac{n}{2} - m \right|_M \frac{(n/2 - \frac{1}{2} + m)_M}{\Gamma(n/2 + m)} \cdot \\
 & \quad \cdot \binom{m+n-3}{m} \int |f(y)| \left(\frac{k|y|}{2} \right)^m dy.
 \end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2} - 1 + m \right) \left| \frac{3}{2} - \frac{n}{2} - m \right|_M \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} + m \right)_M \binom{m+n-3}{m} \cdot \\
 & \quad \cdot \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right) \right]^{-1} \left(\frac{k|y|}{2} \right)^m = \\
 & = \begin{cases} \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2} \right)_M \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right)_M \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \right]^{-1} \cdot \\ \quad \cdot {}_3F_3 \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2} + M, \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + M, n-2; \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - \frac{3}{2}, \frac{n}{2} - \frac{1}{2}; \frac{k|y|}{2} \right). \\ \hspace{15em} \text{se } n > 3 \\ \frac{k|y|}{2} \Gamma(M+1) \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right]^{-1} (2)_{M+2} F_2 \left(M+1, M+2; 2, \frac{3}{2}; \frac{k|y|}{2} \right). \\ \hspace{15em} \text{se } n = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

il teorema risulta provato stante l'andamento della funzione ipergeometrica generalizzata ${}_pF_p(z)$ [10].

TEOREMA 3. Se $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$ $f(x) = o(|x|^{-(n/2)-2M} \exp[-k|x|/2])$ lo sviluppo asintotico della derivata radiale di (1.2) troncato all'ordine M è dato da:

$$(3.2) \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial |x|} = ik\bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp[ik|x|] \int f(y) \exp[-ik|y| \cos \theta] dy + \\ - ik\bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp[ik|x|] \sum_{h=0}^{M-1} (-2ik|x|)^{-(h+1)} \frac{(-1)^{h+1}}{(h+1)!} \cdot \\ \cdot \left\{ \sum_{j=0}^h \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2(h-j)}} \int |y|^{-n/2} f(y) \nabla_0^j (\exp[-ik|y| \cos \theta]) |y|^{n/2} \cdot \right. \\ \cdot \left[\frac{\{h+1, h+1-j\}}{2^2} + (h+1)\{h, h-j\}|y| \cos \theta \right] dy + \\ \left. + (-1)^h \int |y|^{-n/2} f(y) \nabla_0^{h+1} (\exp[-ik|y| \cos \theta]) |y|^{n/2} dy \right\} + O(|x|^{-n/2+\frac{1}{2}-M}).$$

DIM. Tenuto conto che

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial |x|} = -kS|x| \int \frac{H_{n/2}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} f(y) dy + kS \int \frac{H_{n/2}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} \cdot |y| \cos \theta f(y) dy$$

la dimostrazione discende con calcoli elementari dal comportamento asintotico di:

$$\psi(x) = S \int \frac{H_{n/2}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} f(y) dy = -i\bar{S}|x|^{-n/2-1/2} \exp[ik|x|] \cdot \\ \cdot \sum_{h=0}^{M-1} (-2ik|x|)^{-h} \frac{(-1)^{h+1}}{h!} \sum_{j=0}^h \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2(h-j)}} \{h, h-j\} \int |y|^{-n/2} f(y) \cdot \\ \cdot \nabla_0^j (\exp[-ik|y| \cos \theta]) |y|^{n/2} dy + O(|x|^{-n/2-\frac{1}{2}-M})$$

che si riconosce valido operando come al teorema 2.

OSSERVAZIONE I. Tenuto conto del comportamento delle ${}_pF_p(z)$ sull'asse reale, la (3.1) e la (3.2) rappresentano lo sviluppo asintotico di $\varphi(x)$ e di $\partial \varphi(x)/\partial |x|$ se $f(x) \in C_0^\infty(R^n)$

OSSERVAZIONE II. Se $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$ e $f(x) = O(\exp[-k|x|])$ la (3.1) e la (3.2) forniscono lo sviluppo asintotico di $\varphi(x)$ e di $\partial\varphi(x)/\partial(x)$.

4. TEOREMA 4. Se posto

$$\Phi(r) = \sup \{|f(y)| : |y| = r\}$$

è

$$\int_{R^n} |x|^\alpha \Phi(|x|) dx < +\infty \quad \alpha = 0, 1, 2$$

si ha

$$(4.1) \quad \text{i) } \varphi(x) = \bar{S} \frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}} \int f(y) \exp[-ik|y| \cos \theta] dy + O(|x|^{-n/2-1/2})$$

$$(4.2) \quad \text{ii) } \frac{\partial \varphi(x)}{\partial |x|} = ik \bar{S} \frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}} \int f(y) \exp[-ik|y| \cos \theta] dy + O(|x|^{-n/2-1/2}).$$

È utile premettere alla dimostrazione di questo teorema il seguente lemma:

LEMMA 3. Se $\Phi(|x|)$, di cui al teorema 4, è sommabile in R^n

$$\int \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy = O(|x|^{-\lambda}); \quad 1 \leq \lambda \leq \max_{n \geq 4} \left\{ n-2, \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\}; \quad |x| \rightarrow +\infty$$

Se $1 \leq \lambda \leq n-2$, premesso che

$$(|y|^2 - 2|x||y| \cos \theta + |x|^2)^{-\lambda/2} = \begin{cases} |y|^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) (|x|/|y|)^m & |x| < |y| \\ |x|^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) (|y|/|x|)^m & |x| > |y|, \end{cases}$$

con opportuna scelta di coordinate si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy &\leq \int \frac{\Phi(|y|)}{|x-y|^\lambda} dy = \\ &= C \int_0^\infty \Phi(|y|) |y|^{n-1} d|y| \int_0^\pi \frac{\sin^{n-2} \theta}{(|y|^2 - 2|x||y| \cos \theta + |x|^2)^{\lambda/2}} d\theta \leq \\ &\leq C \int_0^\infty \Phi(|y|) |y|^{n-1} d|y| \int_0^\pi \frac{\sin^\lambda \theta}{(|y|^2 - 2|x||y| \cos \theta + |x|^2)^{\lambda/2}} d\theta = \end{aligned}$$

$$= C \left\{ \int_0^\pi \int_0^{|x|} \Phi(|y|) |y|^{n-1} |x|^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) (|y|/|x|)^m \sin^\lambda \theta \, d\theta \, d|y| + \right. \\ \left. + \int_0^\pi \int_{|x|}^{+\infty} \Phi(|y|) |y|^{n-1-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) (|x|/|y|)^m \sin^\lambda \theta \, d\theta \, d|y| \right\}$$

avendo indicato con

$$C = 2\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-3} \, d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-3}.$$

È agevole verificare che la serie $\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) z^m$ converge uniformemente in θ se $|z| < 1$ essendo maggiorata dalla serie convergente $\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+h-1}{m} |z|^m$; ne segue:

$$\int_0^\pi \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) |z|^m \sin^\lambda \theta \, d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} |z|^m \int_\pi^0 C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) \sin^{\lambda-1} \theta \, d \cos \theta.$$

Tenuto conto della relazione di ortogonalità per i polinomi di Gegenbauer [8] è:

$$\int_\pi^0 C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) \sin^{\lambda-1} \theta \, d \cos \theta = \int_{-1}^1 C_m^{\lambda/2}(x) C_0^{\lambda/2}(x) (1-x^2)^{\lambda/2-1/2} \, dx = \\ = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 0 \\ \pi 2^{2-\lambda} \Gamma(\lambda) \lambda^{-1} [\Gamma(\lambda/2)]^{-2} & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\int_0^\pi \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos \theta) |z|^m \sin^\lambda \theta \, d\theta = \pi 2^{2-\lambda} \Gamma(\lambda) \lambda^{-1} [\Gamma(\lambda/2)]^{-2} \quad \text{se } |z| < 1.$$

È dunque, posto $\bar{C} = C \pi 2^{2-\lambda} \Gamma(\lambda) \lambda^{-1} [\Gamma(\lambda/2)]^{-2}$

$$\int \frac{|f(y)|}{|x-y|^\lambda} \, dy \leq \bar{C} \left\{ |x|^{-\lambda} \int_0^{|x|} \Phi(|y|) |y|^{n-1} \, d|y| + \int_{|x|}^{+\infty} \Phi(|y|) |y|^{n-1-\lambda} \, d|y| \right\} \leq \\ \leq \frac{\bar{C}}{B} |x|^{-\lambda} \|\Phi\|_{L_1}$$

onde l'asserto.

Se $n = 4$, $1 \leq \lambda \leq n/2 + 1/2$, premesso che [8]:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 - 2|z| \cos \theta + |z|^2)^{\lambda/2}} d\theta = \\ = \pi \left\{ {}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}; 1; |z|^2\right) - z^2 \frac{\Gamma(2 + \lambda/2)}{2\Gamma(\lambda/2)} {}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 2, 3, |z|^2\right) \right\} = \psi(z) \end{aligned}$$

se $|z| \leq 1$

si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy \leq \int \frac{\Phi(|y|)}{|x-y|^\lambda} dy = C \int_0^\infty \Phi(|y|) |y|^3 d|y|. \\ \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(|y|^2 - 2|x||y| \cos \theta + |x|^2)^{\lambda/2}} d\theta \leq \frac{1}{|x|^\lambda} \int_0^{|x|} \Phi(|y|) |y|^3 \psi\left(\frac{|y|}{|x|}\right) d|y| + \\ + \frac{1}{|x|^\lambda} \int_{|x|}^{+\infty} \Phi(|y|) |y|^3 \psi\left(\frac{|x|}{|y|}\right) d|y| \leq M |x|^{-\lambda} \|\Phi\|_{L_1}, \quad M = \max_{z \in [0,1]} \psi(z), \end{aligned}$$

onde l'asserto.

DIM. TEOREMA 4. Nel caso $n = 3$ si procede in analogia a [4].
Sia $n \geq 4$:

La proprietà i) discende da

$$\begin{aligned} (4.3) \quad |\varphi(x) - \bar{S} \frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}} \int f(y) \exp[-ik|y| \cos \theta] dy| = \\ = \left| S \left(\frac{2}{k\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n/2-1/2}} \exp i \left[k|x-y| - \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \right. \\ \cdot (1 + R_{n/2-1,1}(k|x-y|)) dy - \bar{S} \frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}} \int f(y) \exp[-ik|y| \cos \theta] dy \Big| \leq \\ \leq |\bar{S}| \int |f(y)| \left| \frac{\exp[ik(|x-y| - |x| + |y| \cos \theta)]}{|x-y|^{n/2-1/2}} - \frac{1}{|x|^{n/2-1/2}} \right| dy + \\ + |\bar{S}| \int \frac{|f(y)| A}{|x-y|^{n/2+1/2}} dy \end{aligned}$$

essendo $|R_{n/2-1,1}(k|x-y|)| < A/|x-y|$. Con passaggi elementari si

ottiene:

$$\frac{1}{|x|^{n/2-1/2}|x-y|^{n/2-1/2}} \left| \exp [ik(|x-y|-|x|+|y|\cos\theta)] |x|^{n/2-1/2} - \right. \\ \left. - |x-y|^{n/2-1/2} \right| \leq \frac{(n/2+7/2)|y|+2k|y|^2}{|x||x-y|^{n/2-1/2}} + \left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right) \frac{|y|}{|x|^{n/2-1/2}|x-y|}.$$

Il secondo membro della (4.3) è quindi maggiorato da:

$$\frac{|\bar{S}|}{|x|} \int \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n/2-1/2}} \left[\left(\frac{n}{2}+\frac{7}{2}\right)|y|+2k|y|^2 \right] dy + |\bar{S}| \frac{(n/2-\frac{1}{2})}{|x|^{n/2-1/2}} \int \frac{|f(y)||y|}{|x-y|} dy + \\ + |\bar{S}| A \int \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n/2+1/2}} dy = O(|x|^{-n/2-1/2}) \quad \text{per il lemma 3.}$$

Per quanto riguarda la proprietà ii) si ha, sempre utilizzando il lemma 3:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial |x|} - ik\bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp [ik|x|] \int [f(y) \exp [-ik|y|\cos\theta]] dy \right| \leq \left| - \right. \\ \left. - kS|x| \int \frac{H_{n/2}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} f(y) dy + kS \int \frac{H_{n/2}^1(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} |y| f(y) \cos\theta dy + \right. \\ \left. + k\bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp [ik|x|] \int f(y) \exp [-ik|y|\cos\theta] dy \right| \leq \\ \leq k|\bar{S}||x| \int |f(y)| \left| \frac{\exp [ik|x-y|]}{|x-y|^{n/2+1/2}} - \frac{\exp [ik(|x|-|y|\cos\theta)]}{|x|^{n/2+1/2}} \right| dy + \\ + \tilde{A} \int \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n/2+1/2}} dy = O(|x|^{-n/2-1/2}).$$

5. È agevole verificare che nelle ipotesi in cui sono validi gli sviluppi asintotici di $\varphi(x)$ e di $\partial\varphi(x)/\partial|x|$ si ha:

$$\varphi(x) = O(|x|^{-n/2+1/2}), \quad \frac{\partial\varphi(x)}{\partial|x|} - ik\varphi(x) = O(|x|^{-n/2-1/2}) \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Sotto dette ipotesi dunque il problema (1.1) ha come unica soluzione (1.2) e detta soluzione appartiene a $W^{2,n-1}(R^n)$ ($W_{\text{loc}}^{2,2}(R^n)$ se $n=3$).

Se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema 2 il suo andamento asintotico troncato all' M -esimo termine è dato dalla (3.1).

Se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema 4 il suo andamento asintotico, troncato al primo termine, è dato dalla (4.1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience (1962).
- [2] P. M. MORSE - H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).
- [3] A. MESSIAH, *Quantum Mechanics*, North Holland (1962).
- [4] M. BERTERO - G. TALENTI - G. A. VIANO, *Eigenfunctions expansions associated with Schrödinger two-particle operators*, Nuovo Cimento, **62**, A, n. 1 (1969).
- [5] B. LIPPMAN - J. SCHWINGER, *Variational principles for scattering processes - I*, Phys. Rev., **79** (1950).
- [6] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, vol. II, Interscience (1964).
- [7] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1965).
- [8] W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - R. SONI, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag (1966).
- [9] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press (1958).
- [10] E. M. WRIGHT, *The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function*, Proc. Lond. Math. Soc., Serie II, **46** (1940).

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 luglio 1979.