

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO MALESANI

## **Tecniche per risolvere problemi di Testa e Croce**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 63 (1980), p. 247-267

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1980\\_\\_63\\_\\_247\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__247_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Tecniche per risolvere problemi di Testa e Croce.

PAOLO MALESANI (\*)

Nel capitolo 14 del volume [1] F. S. Hillier-G. J. Lieberman considerano un gioco di Testa e Croce arricchendo di pagamenti monetari il processo stocastico.

Anche B. de Finetti nel capitolo 7 del volume [2] prende in esame molte questioni legate a processi stocastici di lanci ripetuti di monete perfette.

Nel presente lavoro, partendo dalle considerazioni di questi Autori, studio due classi di giochi così definiti:

si lancia più volte una moneta perfetta. Prima di ogni lancio bisogna pagare 1 unità monetaria per partecipare al gioco. Non è permesso ritirarsi prima che termini una partita. Quando una partita termina si ricevono  $\alpha$  unità monetarie.

Le due classi di giochi ai quali farò riferimento nel seguito sono definite dalla regola secondo la quale termina una partita; più precisamente indicherò con

$\mathcal{T}_m$  quel gioco nel quale una partita termina quando  $m$  è il valore assoluto della differenza tra il numero di Teste e il numero di Croci;

$\mathcal{Q}_m$  quel gioco nel quale una partita termina quando  $m$  risultati consecutivi sono uguali (tutte Teste oppure tutte Croci).

$\mathcal{T}_3$  è il gioco di cui trattano Hillier-Lieberman, i quali lo propongono per introdurre la simulazione. In questo lavoro il gioco  $\mathcal{T}_3$  sarà studiato

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, via Belzoni 7, 35100 Padova.

secondo molteplici metodologie e tale studio servirà per introdurre le successive considerazioni.

Invece De Finetti ha affrontato questioni relative a processi stocastici simili ai giochi  $\mathcal{Q}_m$ , però distinguendo Testa (chiamata anche Successo) da Croce (chiamata Insuccesso).

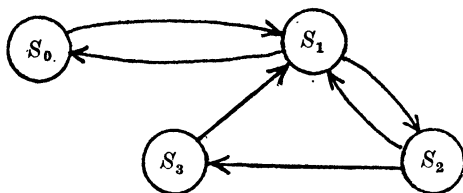
Affronterò due tipi di questioni:

- 1) per quale valore di  $\alpha$  un gioco  $\mathcal{F}_m$  o  $\mathcal{Q}_m$  è equo?
- 2) indagare quale sia la probabilità  $p_n$  che la durata di un gioco  $\mathcal{F}_m$  o  $\mathcal{Q}_m$  sia  $n$ , cioè che una partita termini dopo  $n$  lanci della moneta.

### 1. - Equità di $\mathcal{F}_3$ .

Se il gioco  $\mathcal{F}_3$  viene reiterato indefinitamente per un numero illimitato di partite, un modello matematico atto a descriverlo è una catena finita di Markov con gli stati  $S_0, S_1, S_2, S_3$ . Il sistema si trova in  $S_k$  quando, nel corso di una partita,  $k$  è il valore assoluto della differenza fra il numero di Teste e quello di Croci. Si ha una transizione ogni volta che viene lanciata la moneta.  $S_0$  è lo stato iniziale, prima dell'inizio della prima partita. La matrice di transizione  $P_3 = [p_{ij}]$  e il digrafo  $\mathcal{G}_3$  delle possibili transizioni sono:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Il digrafo  $\mathcal{G}_3$  è fortemente connesso: ne consegue che gli stati sono tutti comunicanti e la catena è irriducibile. In  $\mathcal{G}_3$  il massimo comun divisore delle lunghezze dei circuiti è 1: dunque la catena è aperiodica.

Pertanto la catena è regolare e perciò completamente ergodica. Posto

$$(1) \quad \Pi = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3]$$

il vettore-riga delle probabilità asintotiche, queste costituiscono allora l'unica distribuzione stazionaria di probabilità sugli stati e dunque le  $\pi_k$  possono essere calcolate risolvendo il sistema

$$(2) \quad \Pi P_3 = \Pi$$

con la condizione

$$(3) \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Si trova

$$(4) \quad \Pi = [2/9 \ 4/9 \ 2/9 \ 1/9].$$

Ad ogni transizione è associato un guadagno, che è  $-1$  per tutte le transizioni fuorchè per la  $S_2 \rightarrow S_3$  alla quale compete il guadagno  $\alpha - 1$ . Associamo il guadagno  $-1$  anche alle transizioni impossibili (oppure qualunque altro valore; la cosa è irrilevante come si vedrà dalle formule che seguiranno); costruiamo così la matrice  $R$  dei guadagni associati a tutte le transizioni:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \alpha - 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [r_{ij}].$$

Diciamo  $q_k$  il guadagno atteso dalla prossima transizione, posto che prima di essa il sistema si trovi in  $S_k$ . Allora

$$(5) \quad q_k = \sum_{j=0}^3 r_{kj} p_{kj}$$

da cui

$$(6) \quad q_0 = q_1 = q_3 = -1 \quad q_2 = \alpha/2 - 1$$

e di qui immediatamente si calcola il guadagno medio  $g$  per ogni transizione

$$(7) \quad g = \sum_{k=0}^3 q_k \pi_k = (\alpha - 9)/9$$

concludendo che il gioco  $\mathcal{F}_3$  è equo se e solo se  $\alpha = 9$ . Si intuisce che 9

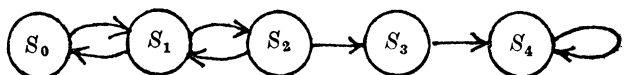
è la durata media di una partita, visto che il gioco risulta equo se alla fine di una partita ci si aspetta di ricevere quanto versato in precedenza prima di ogni lancio della moneta.

## 2. - Una partita di $\mathcal{P}_3$ : studio analitico.

Per esaminare una singola partita di  $\mathcal{P}_3$  conviene atteggiarla a catena di Markov con gli stati  $S_0, S_1, S_2, S_3$  (definiti come a paragrafo 1) ed  $S_4$ : questo ultimo è uno stato fittizio, definito come quello a cui il sistema perviene e in cui rimane indefinitamente dopo essere pervenuto in  $S_3$ , cioè dopo la fine della partita.

La matrice di transizione e il digrafo  $\bar{\mathcal{G}}_3$  delle transizioni possibili sono:

$$\bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Ci serviranno le potenze  $\bar{P}_3^n$  della matrice di transizione. Notoriamente  $(I - z\bar{P}_3)^{-1}$  è la  $Z$ -trasformata di  $\bar{P}_3$ , e con calcoli elementari si trova

$$(I - z\bar{P}_3)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - z^2/4}{1 - 3z^2/4} & \frac{z}{1 - 3z^2/4} & \frac{z^2/2}{1 - 3z^2/4} & \frac{z^3/4}{1 - 3z^2/4} & \frac{z^2/4}{(1 - z)(1 - 3z^2/4)} \\ \frac{z/2}{1 - 3z^2/4} & \frac{1}{1 - 3z^2/4} & \frac{z/2}{1 - 3z^2/4} & \frac{z^2/4}{1 - 3z^2/4} & \frac{z^3/4}{(1 - z)(1 - 3z^2/4)} \\ \frac{z^2/4}{1 - 3z^2/4} & \frac{z/2}{1 - 3z^2/4} & \frac{1 - z^2/2}{1 - 3z^2/4} & \frac{z/2 - z^3/4}{1 - 3z^2/4} & \frac{z^2/2 - z^4/4}{(1 - z)(1 - 3z^2/4)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{z}{1 - z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1 - z} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi di  $(I - z\bar{P}_3)^{-1}$  sono funzioni razionali in  $z$  i cui denominatori si possono scrivere come prodotti di polinomi di primo grado a coefficienti reali. Pertanto ogni elemento di  $(I - z\bar{P}_3)^{-1}$  può essere scritto come somma di un polinomio in  $z$  (a coefficienti razionali) e di funzioni razionali, ciascuna delle quali ha un numero reale come numeratore e un polinomio di primo grado (a coefficienti reali) come denominatore.

Si ottiene così:

$$(9) \quad (I - z\bar{P}_3)^{-1} = zA + B + \frac{1}{1-z}C + \frac{1}{1+\sqrt{3}z/2}D + \frac{1}{1-\sqrt{3}z/2}E$$

con le matrici  $A, B, C, D, E$  definite come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/\sqrt{3} & 1/3 & -1/(3\sqrt{3}) & -2/3 + 4/(3\sqrt{3}) \\ -1/(2\sqrt{3}) & 1/2 & -1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & -2/3 + 1/\sqrt{3} \\ 1/6 & -1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & -1/(6\sqrt{3}) & -1/3 + 2/(3\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{3} & 1/3 & 1/(3\sqrt{3}) & -2/3 - 4/(3\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) & 1/2 & 1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & -2/3 - 1/\sqrt{3} \\ 1/6 & 1/(2\sqrt{3}) & 1/6 & 1/(6\sqrt{3}) & -1/3 - 2/(3\sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Invertendo la trasformazione  $Z$  e utilizzando gli indici  $\delta_{ij}$  di Kronecker si ha

$$(10) \quad \bar{P}_3^n = \delta_{1n}A + \delta_{0n}B + C + (-1)^n(\sqrt{3}/2)^n D + (\sqrt{3}/2)^n E = [p_{ij}^n]$$

Poichè  $S_0$  è lo stato iniziale, la probabilità  $p_n$  che  $n$  sia la durata della partita è

$$(11) \quad p_n = p_{03}^n = -\delta_{1n}/3 - (-1)^n(\sqrt{3}/2)^n/(3\sqrt{3}) + (\sqrt{3}/2)^n/(3\sqrt{3})$$

e si conclude allora che  $p_1 = 0$  e

$$(12) \quad \begin{cases} p_{2r} = 0 \\ p_{2r+1} = (1/4)(3/4)^{r-1} \end{cases} \quad [r = 1, 2, 3, \dots].$$

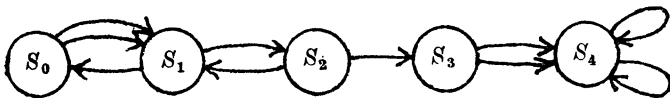
Abbiamo così provato che le possibili durate di una partita del gioco  $\mathfrak{F}_3$  sono  $2r + 1$  [ $r = 1, 2, 3, \dots$ ] e che la durata di una partita è una variabile aleatoria a distribuzione geometrica con parametro  $1/4$ .

Notoriamente, allora, 9 è la media di tale variabile aleatoria. Se una partita dura  $2r + 1$  lanci,  $\alpha - (2r + 1)$  è il guadagno; anch'esso è una variabile aleatoria a distribuzione geometrica con media  $\alpha - 9$ . Si conferma così che  $(\alpha - 9)/9$  è il guadagno medio per ogni transizione.

### 3. - Una partita di $\mathfrak{F}_3$ : studio mediante grafi.

Poichè ad ogni lancio di moneta sono possibili due risultati, costruiamo un multidigrafo  $\mathfrak{G}_3^*$ , analogo a  $\mathfrak{G}_3$  tranne che gli archi a cui in  $\mathfrak{G}_3$  era associata la probabilità 1 verranno ora rappresentati da una coppia di archi. La matrice associata a  $\mathfrak{G}_3^*$  e lo stesso  $\mathfrak{G}_3^*$  sono:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$



Indichiamo con  $x_i^k$  il numero dei cammini di  $\mathcal{G}_3^*$  che hanno lunghezza  $k$ , origine in  $S_0$  e termine in  $S_i$ . Posto.

$$(13) \quad X^k = [x_0^k \ x_1^k \ x_2^k \ x_3^k \ x_4^k]$$

è evidentemente

$$(14) \quad X^{k+1} = X^k M$$

cioè in forma scalare

$$(15) \quad \begin{cases} x_0^{k+1} = x_1^k \\ x_1^{k+1} = 2x_0^k + x_2^k \\ x_2^{k+1} = x_1^k \\ x_3^{k+1} = x_2^k \\ x_4^{k+1} = 2x_3^k + 2x_4^k \end{cases}$$

In  $n$  lanci della moneta sono possibili  $2^n$  sequenze di risultati, a ciascuna delle quali corrisponde in  $\mathcal{G}_3^*$  un cammino di origine  $S_0$  e lunghezza  $n$ . Ma anche viceversa: ogni siffatto cammino identifica una ben determinata sequenza di risultati di  $n$  lanci.

La partita termina in  $n$  lanci se e solo se quel cammino di lunghezza  $n$  ha termine in  $S_3$ . Risulta dunque, indicando anche con  $A_n$  il numero dei cammini di lunghezza  $n$  con origine in  $S_0$  e termine in  $S_3$ ,

$$(16) \quad P_n = x_3^n / 2^n = A_n / 2^n$$

Applicando ripetutamente le (15) e le loro inverse si ottiene

$$(17) \quad \begin{aligned} x_3^n &= x_2^{n-1} = x_1^{n-2} = 2x_0^{n-3} + x_2^{n-3} = 2x_1^{n-4} + x_2^{n-3} = \\ &= 2x_2^{n-5} + x_2^{n-3} = 3x_2^{n-3} = 3x_3^{n-2} \end{aligned}$$

cioè

$$(18) \quad A_n = 3A_{n-2}$$

La (18) insieme con le ovvie condizioni iniziali

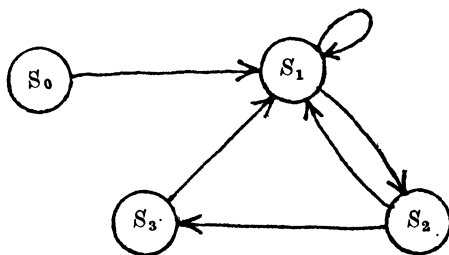
$$(19) \quad A_1 = A_2 = 0 \quad A_3 = 2$$

permette di calcolare la successione  $\{A_n\}$  da cui, per la (16), le probabilità delle possibili durate della partita, riottenendo i risultati di paragrafo 2.

#### 4. - Equità di $Q_3$ .

Analogamente a quanto fatto a paragrafo 1, ci riferiamo alla catena di Markov con la matrice di transizione  $Q_3$  e il digrafo  $\mathcal{K}_3$  delle possibili transizioni:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Il digrafo  $\mathcal{K}_3$  non è fortemente connesso, ma i suoi nodi  $S_1, S_2, S_3$  costituiscono una classe fortemente connessa che è l'unica classe finale: dunque la catena di Markov è irriducibile con i tre stati nominati che sono persistenti mentre  $S_0$  è transitorio. In  $\mathcal{K}_3$  il massimo comune divisore delle lunghezze dei circuiti è 1: dunque la catena è aperiodica.

Essa è allora regolare e perciò completamente ergodica. Procedendo come a paragrafo 1 si trovano le probabilità asintotiche

$$(20) \quad \Pi = [0 \quad 4/7 \quad 2/7 \quad 1/7]$$

e, definita esattamente come un paragrafo 1 la matrice  $R$  dei guadagni, si trovano anche i guadagni attesi dalla prossima transizione che sono gli stessi della (6). Ne consegue, dalla prima uguaglianza contenuta nella (7) e dalla (20), che

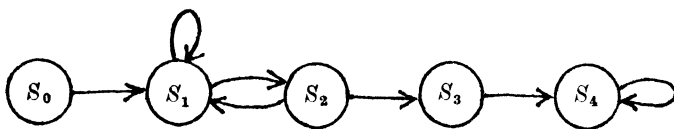
$$(21) \quad g = \sum_{k=0}^3 q_k \pi_k = (\alpha - 7)/7.$$

Dunque  $Q_3$  è equo se e solo se  $\alpha = 7$ .

### 5. - Una partita di $Q_3$ : studio analitico.

Procedendo come a paragrafo 2, ma per il gioco  $Q_3$ , si hanno la matrice di transizione  $\bar{Q}_3$  e il digrafo  $\bar{\mathcal{K}}_3$ :

$$\bar{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Si calcola quindi, senza difficoltà,

$$(22) \quad (I - z\bar{Q}_3)^{-1} = zA + B + \frac{1}{1-z}C + \\ + \frac{1}{1 + (\sqrt{5}-1)z/4}D + \frac{1}{1 - (\sqrt{5}+1)z/4}E$$

con le matrici  $A, B, C, D, E$  ora definite:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2/\sqrt{5} & (\sqrt{5}+1)/\sqrt{5} & -(\sqrt{5}+3)/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 0 & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) & -1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}+1)/(2\sqrt{5}) & (1-\sqrt{5})/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}+1)/(2\sqrt{5}) & -(\sqrt{5}+3)/(2\sqrt{5}) & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & (\sqrt{5}-1)/\sqrt{5} & (3-\sqrt{5})/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \\ 0 & (1+\sqrt{5})/(2\sqrt{5}) & 1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) & -(1+\sqrt{5})/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) & (3-\sqrt{5})/(2\sqrt{5}) & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di qui, invertendo la trasformazione  $Z$ ,

$$(23) \quad \bar{Q}_3^n = \delta_{1n}A + \delta_{0n}B + C + \\ + (-1)^n \left( (\sqrt{5}-1)/4 \right)^n D + \left( (\sqrt{5}+1/4) \right)^n E$$

e, infine, la probabilità  $p_n$  che  $n$  sia la durata della partita:

$$(24) \quad p_n = -\delta_{1n} + 2\delta_{0n} - (-1)^n \left( (\sqrt{5}-1)/4 \right)^n (\sqrt{5}+3)/\sqrt{5} + \\ + \left( (\sqrt{5}+1)/4 \right)^n (3-\sqrt{5})/\sqrt{5}$$

In particolare si ottiene

$$p_1 = p_2 = 0 \quad p_3 = 1/(2^2) \quad p_4 = 1/(2^3) \quad p_5 = 2/(2^4) \quad p_6 = 3/(2^5) \\ p_7 = 5/(2^6) \quad p_8 = 8/(2^7) \quad p_9 = 13/(2^8) \text{ ecc.}$$

Si intuisce che le probabilità  $p_n$  sono rapporti con denominatori le successive potenze di 2 e i cui numeratori sono gli elementi di una successione di Fibonacci:

$$(25) \quad p_n = a_{n-3}/2^{n-1} \quad [n = 3, 4, 5, \dots]$$

dove appunto

$$(26) \quad \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad [n = 2, 3, 4, \dots].$$

Questa intuizione è facilmente verificabile, attese le (24), in quanto sussiste la

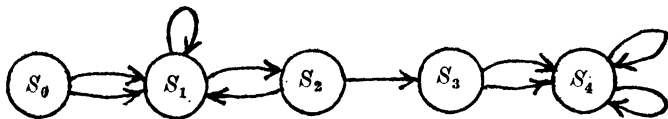
$$(27) \quad 4p_{n+3} = 2p_{n+2} + p_{n+1}$$

ma può essere messa meglio in evidenza mediante considerazioni sulla numerosità di certi cammini in un multigrafo, come vedremo al successivo paragrafo.

## 6. - Una partita di $Q_3$ : studio mediante grafi.

Analogamente a quanto esposto a paragrafo 3, la matrice associata al multidigrafo  $\mathcal{H}_3^*$  e il multidigrafo stesso sono:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$



Sia ancora  $x_i^k$  il numero dei cammini che in  $\mathcal{K}_3^*$  hanno lunghezza  $k$ , origine in  $S_0$  e termine in  $S_i$ ; allora sussistono le (14) che in forma scalare si scrivono

$$(28) \quad \begin{cases} x_0^{k+1} = 0 \\ x_1^{k+1} = 2x_0^k + x_1^k + x_2^k \\ x_2^{k+1} = x_1^k \\ x_3^{k+1} = x_2^k \\ x_4^{k+1} = 2x_3^k + 2x_4^k. \end{cases}$$

Applicando ripetutamente le (28) e le loro inverse si ottiene

$$(29) \quad x_3^n = x_2^{n-1} = x_1^{n-2} = 2x_0^{n-3} + x_1^{n-3} + x_2^{n-3} = \\ = x_2^{n-2} + x_3^{n-2} = x_3^{n-1} + x_3^{n-2}$$

cioè, posto ancora  $A_n = x_3^n$ ,

$$(30) \quad A_n = A_{n-1} + A_{n-2}.$$

La (30) con le ovvie condizioni iniziali

$$(31) \quad A_1 = A_2 = 0$$

permette di calcolare la successione  $\{A_n\}$  da cui, essendo

$$(32) \quad p_n = A_n/2^n$$

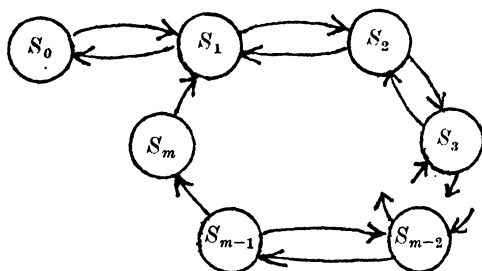
si conclude come a paragrafo precedente.

## 7. - Equità di $\mathcal{G}_m$ .

La matrice di transizione  $P_m = [p_{ij}]$  ha nulli tutti gli elementi ad eccezione di quelli qui sotto indicati, e il digrafo  $\mathcal{G}_m$  ha l'aspetto qui

raffigurato:

$$\begin{cases} p_{01} = p_{m1} = 1 \\ p_{k,k-1} = p_{k,k+1} = 1/2 \quad [k = 1, 2, \dots, m-1] \end{cases}$$



Il digrafo è fortemente connesso: la catena è irriducibile e i suoi stati sono tutti persistenti. Però il massimo comun divisore delle lunghezze dei circuiti di  $\mathcal{G}_m$  è 1 se e solo se  $m$  è dispari, altrimenti è 2; nel primo caso la catena è aperiodica e dunque regolare, nel secondo caso è periodica di periodo 2.

Il sistema

$$(33) \quad \Pi = \Pi P_m$$

con la condizione

$$(34) \quad \sum_{i=0}^m \pi_i = 1$$

ammette sempre l'unica soluzione

$$(35) \quad \begin{cases} \pi_0 = \frac{m-1}{m^2} \\ \pi_k = \frac{2(m-k)}{m^2} \\ \pi_m = \frac{1}{m^2} \end{cases} \quad [k = 1, 2, \dots, m-1]$$

che dunque è, per la (33), l'unica distribuzione stazionaria di probabilità sugli stati, ma essa è anche la distribuzione asintotica solo se  $m$  è dispari. In questo ultimo caso, dopo aver osservato che la matrice

$R = [r_{ij}]$  ha tutti gli elementi uguali a  $-1$  fuorchè  $r_{m-1,m}$  che ha il valore  $(\alpha/2) - 1$ , e che pertanto i guadagni  $q_k$  attesi dalla prossima transizione se essa avviene a partire dallo stato  $S_k$  sono definiti dalle

$$(36) \quad q_k = \begin{cases} -1 & [k \neq m-1] \\ (\alpha/2) - 1 & [k = m-1] \end{cases}$$

è certamente corretto calcolare il guadagno medio per ogni transizione con la

$$(37) \quad g = \sum_{k=0}^m q_k \pi_k = \frac{\alpha - m^2}{m^2}$$

e tale risultato è valido anche se invece  $m$  è pari, come vedremo tra breve.

Anche in questo caso è possibile assegnare un significato probabilistico alle  $\pi_i$ , in modo da giustificare la (37). Ma è preferibile sfuggire a questioni un po' delicate, affidandosi al procedimento indicato da Howard che abbisogna (ma non è nemmeno indispensabile) solo dell'irriducibilità della catena di Markov. Si consideri dunque il sistema

$$(38) \quad g + v_i = q_i + \sum_{j=0}^m p_{ij} v_j \quad [i = 0, 1, 2, \dots, m]$$

nelle incognite  $g, v_i$ . Posto  $v_m = 0$  è immediato verificare che la soluzione si ha con

$$(39) \quad v_k = \frac{k^2 \alpha}{m^2} \quad [k = 0, 1, \dots, m-1]$$

da cui, per l'ultima delle (38)

$$(40) \quad g = -1 + v_1 = \frac{\alpha - m^2}{m^2}$$

come avevamo asserito. Dunque il gioco è equo se e solo se  $\alpha = m^2$ . Inoltre  $m^2$  è la durata media di una partita.

### 8. - Una partita di $\mathcal{F}_m$ .

A meno che non sia  $m = 2$  oppure  $m = 3$  non è possibile (o almeno non è facile) studiare una partita di  $\mathcal{F}_m$  con la metodologia utilizzata a paragrafo 2. Infatti per una tale metodologia occorre scomporre in fattori i denominatori di  $(I - z\bar{P}_m)^{-1}$ , cioè il determinante di  $I - z\bar{P}_m$ ; e quando  $m > 3$  non è sufficiente sapere che esso si annulla per  $z = 1$ .

Ci rifaremo dunque alla metodologia che utilizza nozioni di teoria dei grafi, come l'abbiamo esposta a paragrafo 3 ma con i ritocchi e le complicazioni che si renderanno necessari.

La matrice  $M = [m_{ij}]$  associata al multidigrafo  $\mathcal{G}_m^*$  ha tutti gli elementi nulli, ad eccezione di quelli ora specificati:

$$(41) \quad \begin{cases} m_{01} = m_{m-1,m} = m_{m,m} = 2 \\ m_{k,k-1} = m_{k,k+1} = 1 \end{cases} \quad [k = 1, 2, \dots, m-2].$$

Risulta allora, con le notazioni di paragrafo 3,

$$(42) \quad \begin{cases} x_0^k = x_1^{k-1} \\ x_1^k = 2x_0^{k-1} + x_2^{k-1} \\ x_r^k = x_{r-1}^{k-1} + x_{r+1}^{k-1} \\ x_{m-1}^k = x_{m-2}^{k-1} \\ x_m^k = x_{m-1}^{k-1} \\ x_{m+1}^k = 2x_m^{k-1} + 2x_{m+1}^{k-1} \end{cases} \quad [r = 2, 3, \dots, m-2]$$

e da queste conseguono le

$$(43) \quad \begin{cases} x_0^k = 2x_0^{k-2} + x_2^{k-2} \\ x_1^k = 3x_1^{k-2} + x_3^{k-2} \\ x_2^k = 2x_0^{k-2} + 2x_2^{k-2} + x_4^{k-2} \\ x_r^k = x_{r-2}^{k-2} + 2x_r^{k-2} + x_{r+2}^{k-2} \\ x_{m-2}^k = x_{m-4}^{k-2} + 2x_{m-2}^{k-2} \\ x_{m-1}^k = x_{m-3}^{k-2} + x_{m-1}^{k-2} \\ x_m^k = x_{m-2}^{k-2} \end{cases} \quad [r = 3, 4, \dots, m-3]$$

Supponiamo ora che  $m$  sia dispari

$$(44) \quad m = 2t + 1 \quad [t = 1, 2, 3, \dots]$$

Allora dalle (43) segue subito che

$$(45) \quad \sum_{r=0}^t (-1)^r (2r + 1) x_{2r+1}^k = 0$$

D'altronde dalle (43) si ha

$$(46) \quad \begin{cases} x_{2t-1}^k = x_{2t+1}^{k+2} \\ x_{2t-3}^k = x_{2t-1}^{k+2} - 2x_{2t-1}^k \\ x_{r-2}^k = x_r^{k+2} - 2x_r^k - x_{r+2}^k \end{cases} \quad [r = 3, 5, 7, \dots, 2t-3].$$

Allora, essendo  $A_k = x_m^k$ , posto

$$n = k + 2t$$

se  $n$  è abbastanza grande la (45) tramite le (46) diventa una relazione lineare fra

$$A_n, A_{n-2}, A_{n-4}, \dots, A_{n-2t}$$

con i coefficienti tutti diversi da zero; poichè 1 è il coefficiente di  $A_n$ , risulta dunque

$$(47) \quad A_n = \sum_{r=1}^t \xi_r A_{n-2r}$$

dove i combinatori  $\xi_r$  sono facilmente determinabili e risulta che  $m$  è il coefficiente di  $A_{n-2t}$ , che i loro segni sono alterni e che il coefficiente di  $A_{n-2t}$  è  $m$ .

La (47) è una formula ricorrente che, dato  $m$ , permette di calcolare ogni  $A_n$  quando siano già state calcolate le  $A$  con indice minore. Poichè evidentemente  $A_n = 0$  se  $n < m$ , mentre  $A_m = 2$ , consegue subito che sono nulle tutte le  $A$  con indice pari. Per quelle con indice dispari

risulta, ad esempio

$$m = 3 \Rightarrow A_n = 3A_{n-2}$$

$$m = 5 \Rightarrow A_n = 5A_{n-2} - 5A_{n-4}$$

$$m = 7 \Rightarrow A_n = 7A_{n-2} - 14A_{n-4} + 7A_{n-6}$$

$$m = 9 \Rightarrow A_n = 9A_{n-2} - 27A_{n-4} + 30A_{n-6} - 9A_{n-8}$$

$$m = 11 \Rightarrow A_n = 11A_{n-2} - 46A_{n-4} + 77A_{n-6} - 55A_{n-8} + 11A_{n-10}$$

da cui, sempre come esempio, ecco alcuni dei valori delle  $A_n$ :

| $m$ | $A_3$ | $A_5$ | $A_7$ | $A_9$ | $A_{11}$ | $A_{13}$ | $A_{15}$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| 3   | 2     | 6     | 18    | 54    | 162      | 486      | 1458     |
| 5   | 0     | 2     | 10    | 40    | 150      | 550      | 2000     |
| 7   | 0     | 0     | 2     | 14    | 70       | 308      | 1274     |
| 9   | 0     | 0     | 0     | 2     | 18       | 108      | 546      |
| 11  | 0     | 0     | 0     | 0     | 2        | 22       | 150      |

Calcolate le  $A_n$  risulta poi molto agevole la determinazione della probabilità  $p_n = A_n/2^n$  che  $n$  sia la durata della partita.

Se, invece della (44) sussiste la

$$(48) \quad m = 2t + 2 \quad [t = 1, 2, 3, \dots]$$

e dunque se  $m$  è pari, dalle (43) segue subito la

$$(49) \quad \sum_{r=0}^{t+1} (-1)^r 2x_{2r}^k = 0$$

Ma per le (43)

$$(50) \quad \begin{cases} x_{2t}^k = x_{2t+2}^{k+2} \\ x_{2t-2}^k = x_{2t}^{k+2} - 2x_{2t}^k & \text{solo se } t \geq 2 \\ x_{r-2}^k = x_r^{k+2} - 2x_r^k - x_{r+2}^k & [r = 4, 6, 8, \dots, 2t-2] \\ 2x_0^k = x_2^{k+2} - 2x_2^k - x_4^k. \end{cases}$$

Allora, posto

$$n = k + 2t + 2$$

se  $n$  è abbastanza grande si ottiene

$$(51) \quad A_n = \sum_{r=1}^{t+1} \xi_r A_{n-2r}$$

e si conclude, analogamente all'altro caso, che le  $A_n$  sono nulle se  $n$  è dispari, mentre se  $n$  è pari, ad esempio:

$$m=4 \Rightarrow A_n = 4A_{n-2} - 2A_{n-4}$$

$$m=6 \Rightarrow A_n = 6A_{n-2} - 9A_{n-4} + 2A_{n-6}$$

$$m=8 \Rightarrow A_n = 8A_{n-2} - 20A_{n-4} + 16A_{n-6} - 2A_{n-8}$$

$$m=10 \Rightarrow A_n = 10A_{n-2} - 35A_{n-4} + 50A_{n-6} - 25A_{n-8} + 2A_{n-10}$$

$$m=12 \Rightarrow A_n = 12A_{n-2} - 54A_{n-4} + 112A_{n-6} - 105A_{n-8} + 36A_{n-10} - 2A_{n-12}$$

da cui seguono alcuni valori delle  $A_n$ :

| $m$ | $A_4$ | $A_6$ | $A_8$ | $A_{10}$ | $A_{12}$ | $A_{14}$ | $A_{16}$ |
|-----|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
| 4   | 2     | 8     | 28    | 96       | 328      | 1120     | 3824     |
| 6   | 0     | 2     | 12    | 54       | 220      | 858      | 5900     |
| 8   | 0     | 0     | 2     | 16       | 88       | 416      | 1820     |
| 10  | 0     | 0     | 0     | 2        | 20       | 130      | 700      |
| 12  | 0     | 0     | 0     | 0        | 2        | 24       | 180      |

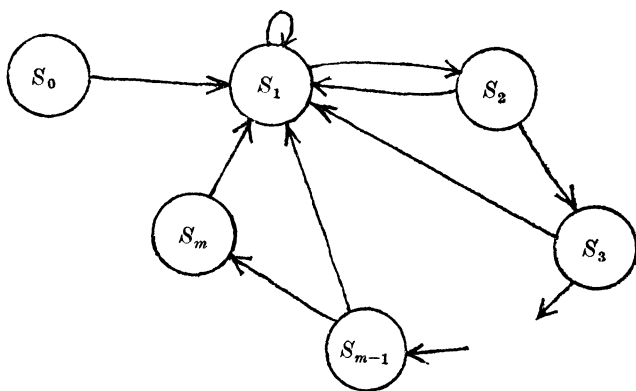
e risulta poi facile calcolare le probabilità  $p_n$  che  $n$  sia la durata di una partita.

## 9. - Equità di $Q_m$ .

La matrice di transizione  $Q_m = [p_{ij}]$  ha nulli tutti gli elementi ad eccezione di

$$\begin{cases} p_{01} = p_{m1} = 1 \\ p_{k,1} = p_{k,k+1} = 1/2 \quad [k = 1, 2, \dots, m-1] \end{cases}$$

e il digrafo  $\mathcal{H}_m$  ha l'aspetto qui raffigurato:



Nel digrafo i nodi  $S_1, S_2, \dots, S_m$  generano una componente fortemente connessa mentre un'altra è generata dal solo  $S_0$ . Nella prima il massimo comun divisore delle lunghezze dei circuiti è 1. Dunque la catena di Markov è regolare e le probabilità asintotiche possono venire determinate risolvendo il sistema

$$(52) \quad \Pi = \Pi Q_m$$

con la condizione

$$(53) \quad \sum_{i=0}^m \pi_i = 1$$

Si trova l'unica soluzione

$$(54) \quad \begin{cases} \pi_0 = 0 \\ \pi_k = \frac{2^{m-k}}{2^m - 1} \quad [k = 1, 2, \dots, m] . \end{cases}$$

I guadagni  $q_k$  attesi dalla prossima transizione a partire da  $S_k$  sono ancora dati dalle (36), e dunque il guadagno medio per ogni transizione è

$$(55) \quad g = \sum_{k=0}^m q_k \pi_k = \frac{\alpha - (2^m - 1)}{2^m - 1} .$$

Dunque il gioco è equo se e solo se  $\alpha = 2^m - 1$ . Inoltre  $2^m - 1$  è la durata media di una partita.

### 10. - Una partita di $\mathcal{Q}_m$ .

Procedendo come a paragrafo 8, la matrice  $M = [m_{ij}]$  associata al multigrafo  $\mathcal{H}_m^*$  è tale che

$$(56) \quad \begin{cases} m_{01} = m_{m,m+1} = m_{m+1,m+1} = 2 \\ m_{k1} = m_{k,k+1} \quad [k = 1, 2, \dots, m-1] \end{cases}$$

mentre sono nulli tutti gli altri elementi.

Risulta allora dalla (14)

$$(57) \quad \begin{cases} x_0^k = 0 \\ x_1^k = 2x_0^{k-1} + x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \dots + x_{m-1}^{k-1} \\ x_r^k = x_{r-1}^{k-1} \quad [r = 2, 3, \dots, m] \\ x_{m+1}^k = 2x_m^{k-1} + 2x_{m+1}^{k-1} \end{cases}$$

e da queste seguono subito la

$$(58) \quad x_1^k = x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \dots + x_{m-1}^{k-1}$$

e le

$$(59) \quad x_t^{k-1} = x_m^{k+m-t-1} \quad [t = 1, 2, \dots, m]$$

per le quali la (58) diventa

$$(60) \quad A_{k+m-2} = A_{k+m-3} + A_{k+m-4} + \dots + A_k + A_{k-1}$$

avendo posto ancora  $A_k = x_m^k$ . Con riferimento alla successione  $\{A_i\}$  la (60) dice che ogni  $A_n$  è somma degli  $m-1$   $A_i$  che la precedono, pertanto la  $\{A_i\}$  è una successione di Fibonacci di ordine  $m-2$ , con i valori iniziali

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_{m-1} = 0 \quad A_m = 2$$

Risulta allora facile calcolare la probabilità  $p_n = A_n/2^n$  che  $n$  sia la durata di una partita.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] F. S. HILLIER - G. J. LIEBERMAN, *Introduzione alla Ricerca Operativa*, F. Angeli, Milano 1973.
- [2] B. DE FINETTI, *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino 1970.
- [3] R. A. HOWARD, *Dynamic Programming and Markov Processes*, MIT Press, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 novembre 1979.