

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONINO MAUGERI

Su una classe di equazioni paraboliche singolari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 62 (1980), p. 65-74

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__65_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__65_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su una classe di equazioni paraboliche singolari.

ANTONINO MAUGERI (*)

SUMMARY - In this paper we study a boundary-value problem for the equation:

$$a(x, t) \left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) + \frac{H(x, t)}{x} u_x - u_t = f(x, t) \quad (x, t) \in Q =]0, R[\times]0, T[,$$

where

$$2\nu > -1, \quad \frac{1}{\lambda} \leq a(x, t) \leq \lambda, \quad \|H\|_{L^\infty(Q)} < \frac{1 + 2\nu}{\lambda}, \quad \lambda \geq 1.$$

Detto Q il rettangolo $]0, R[\times]0, T[$ ($R, T > 0$), in questa Nota studiamo, in un opportuno spazio di Sobolev con peso, il problema:

$$(0.1) \quad a(x, t) \left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) + \frac{H(x, t)}{x} u_x - u_t = f(x, t) \quad \text{in } Q,$$

$$(0.2) \quad u(x, 0) = 0 \quad x \in]0, R[$$

$$(0.3) \quad u(R, t) = 0 \quad t \in]0, T[.$$

Dimostriamo che tale problema ammette una ed una sola soluzione supponendo che 2ν sia un numero reale maggiore di -1 e che esista un numero reale $\lambda \geq 1$ tale che:

$$\frac{1}{\lambda} \leq a(x, t) \leq \lambda, \quad \|H\|_{L^\infty(Q)} < \frac{1 + 2\nu}{\lambda}.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Sem. Matematico - Città Universitaria - Viale A. Doria, 6 - Catania.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

Sul termine noto $f(x, t)$ facciamo l'ipotesi che appartenga alla classe $L^2_\nu(Q)$ costituita dalle (classi di) funzioni misurabili in Q per le quali risulta finita la quantità:

$$\|f\|_{L^2_\nu(Q)} = \left(\int_Q x^{2\nu} f^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Denotato, poi, con $H^{2,1}_\nu(Q)$ lo spazio delle funzioni $u(x, t)$ misurabili in Q e tali che $u, u_t, u_{xx} + (2\nu/x)u_x$ e u_x/x appartengano a $L^2_\nu(Q)$, normalizzato ponendo:

$$(0.4) \quad \|u\|_\nu = \left(\|u\|_{L^2_\nu(Q)}^2 + \left\| \frac{u_x}{x} \right\|_{L^2_\nu(Q)}^2 + \left\| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right\|_{L^2_\nu(Q)}^2 + \|u_t\|_{L^2_\nu(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

con $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ indichiamo la classe delle funzioni appartenenti ad $H^{2,1}_\nu(Q)$ ed aventi traccia nulla per $t=0$ e $x=R$ ⁽¹⁾. In $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ cerchiamo la soluzione del problema (0.1)-(0.3).

In $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ la norma (0.4) e la norma:

$$(0.5) \quad \|u\|_{\nu,0} = \left(\left\| \frac{u_x}{x} \right\|_{L^2_\nu(Q)}^2 + \left\| u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right\|_{L^2_\nu(Q)}^2 + \|u_t\|_{L^2_\nu(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

risultano equivalenti.

1. Risultati preliminari.

Vale il seguente:

TEOREMA 1.1. *Per ogni $f \in L^2_\nu(Q)$ esiste una ed una sola soluzione $u(x, t)$ appartenente ad $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ dell'equazione*

$$(1.1) \quad u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x - u_t = f$$

⁽¹⁾ Le derivate sono considerate nel senso delle distribuzioni. Lo spazio $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ coincide, poi, con la chiusura dell'insieme:

$$\left\{ u \in C^2(\bar{Q}) : \frac{u_x}{x} \in L^2_\nu(Q), u(x, 0) = 0, u(R, t) = 0 \right\}$$

rispetto alla norma (0.5).

ed essa è rappresentata dalla serie:

$$(1.2) \quad u(x, t) = \\ = - x^{\frac{1}{2}-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{R^2 J_{\nu+\frac{1}{2}}^2(j_n R)} \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu+\frac{1}{2}} f(\xi, \tau) J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n \xi) d\xi \right) d\tau$$

dove $J_{\nu-\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{\nu+\frac{1}{2}}(x)$ sono, rispettivamente, le funzioni di Bessel di prima specie di ordine $\nu - \frac{1}{2}$ e $\nu + \frac{1}{2}$ e j_n , $n \in N$, sono le radici dell'equazione:

$$J_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda R) = 0.$$

Inoltre si ha:

$$(1.3) \quad \int_Q x^{2\nu} \left[\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 + u_t^2 \right] dx dt + \frac{1}{2} \sup_{[0, T]} \int_0^1 x^{2\nu} u_x^2(x, t) dx \leq \\ \leq \int_Q x^{2\nu} f^2(x, t) dx dt,$$

$$(1.4) \quad \int_Q x^{2\nu} \frac{u_x^2}{x^2} dx dt \leq \frac{4}{(1+2\nu)^2} \int_Q x^{2\nu} f^2(x, t) dx dt.$$

Posto

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{2x} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n)} \quad (2),$$

(²) Ricordiamo (cfr. [4] e [5]) che:

$$\int_0^1 \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{n,m} \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x, t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{\nu} f(x, t) \psi_n(x) dx \right)^2.$$

Ne segue, allora, che:

$$\int_0^T \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x, t) dx dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_0^1 x^{\nu} f(x, t) \psi_n(x) dx \right)^2 dt.$$

Per l'unicità vedasi il teorema 2.1.

scriviamo la (1.2) nella forma:

$$(1.5) \quad u(x, t) = -x^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau$$

supponendo per semplicità $R = 1$. Proviamo, per prima cosa, che $u(x, t) \in L_{\nu}^2(Q)$

Si ha per ogni n e p appartenenti ad N :

$$\begin{aligned} & \left\| - \sum_{k=1}^p x^{-\nu} \psi_{n+k}(x) \int_0^1 \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right\|_{L_{\nu}^2(Q)}^2 = \\ & = \sum_{k=1}^p \int_0^T \left(\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Considerando il termine generico della sommatoria a secondo membro ed integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} (1.6) \quad & \int_0^T \left(\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 dt = \\ & = \int_0^T dt \exp[-2j_{n+k}^2 t] \left(\int_0^t \exp[j_{n+k}^2 \tau] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 = \\ & = - \frac{\exp[-2j_{n+k}^2 T]}{2j_{n+k}^2} \left(\int_0^T \exp[j_{n+k}^2 \tau] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 + \\ & + \frac{1}{j_{n+k}^2} \int_0^T \left[\exp[-j_{n+k}^2 t] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) \int_0^t \exp[j_{n+k}^2 \tau] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right] dt = - \frac{\exp[-2j_{n+k}^2 T]}{2j_{n+k}^2} \cdot \\ & \cdot \left(\int_0^T \exp[j_{n+k}^2 \tau] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{j_{n+k}^2} \int_0^T dt \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2 t] \exp[j_{n+k}^2 \tau] \cdot \\
& \cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, t) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \leq \\
& \leq \frac{1}{j_{n+k}^2} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, t) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 dt d\tau + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 dt d\tau \right] \leq \\
& \leq \frac{1}{j_{n+k}^4} \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
& \left\| - \sum_{k=1}^p x^{-\nu} \psi_{n+k}(x) \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right\|_{L_p^2(Q)}^2 \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{j_{n+k}^4} \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 d\tau
\end{aligned}$$

e, perciò, $u(x, t)$ denota una effettiva funzione di $L_p^2(Q)$.

Tenendo presente che:

$$\frac{d}{dx} x^{-\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x) = -j_n x^{-\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x)$$

derivando termine a termine la (1.5) si ottiene la serie:

$$(1.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau$$

con

$$\chi_n(x) = \frac{\sqrt{2x} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x)}{J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n)} \quad \text{e} \quad \int_0^1 \chi_n(x) \chi_m(x) dx = \delta_{m,n}.$$

La serie (1.7) converge in $L^2_\nu(Q)$. Infatti si ha per ogni n e $p \in N$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^p x^{-\nu} \chi_{n+k}(x) j_{n+k} \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right\|_{L^2_\nu(Q)}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^p j_{n+k}^2 \int_0^T \left(\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{j_{n+k}^2} \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Inoltre la (1.7) per ogni t fissato in $[0, \tau]$ converge in $L^2_\nu(0, 1)$.
Infatti:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^p x^{-\nu} \chi_{n+k}(x) j_{n+k} \int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right\|_{L^2_\nu(0, 1)}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^p j_{n+k}^2 \left(\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right) d\tau \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^p j_{n+k}^2 \left(\int_0^1 \exp[-2j_{n+k}^2(t-\tau)] d\tau \right) \left(\int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 d\tau \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_{n+k}(\xi) d\xi \right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Detta allora $v(x, t)$ la somma della (1.7) si ha per ogni $z \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_1^z \left[v(x, t) - \sum_{n=1}^k x^{-\nu} j_n \chi_n(x) \cdot \right. \right. \\ & \quad \cdot \left. \left(\int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau \right) dx \right] \Big| \leq \left(\int_z^1 x^{-2\nu} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ & \quad \cdot \left(\int_0^1 \left| x^\nu v(x, t) - \sum_{n=1}^k j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Quindi risulta

$$(1.8) \quad \int_1^z v(x, t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^z x^{-\nu} j_n \chi_n(x) dx \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \\ \cdot \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau = u(z, t),$$

ed, inoltre, la convergenza della serie (1.5I) è uniforme in ogni insieme del tipo $[\bar{x}, 1] \times [0, 1]$ con $0 < \bar{x} < 1$

In modo analogo si vede che la serie ottenuta da (1.5) derivando rispetto a t :

$$- \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} \psi_n(x) \int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, t) \psi_n(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n^2 \psi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \\ \cdot \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau,$$

converge in $L^2_{\nu}(Q)$ ed, inoltre, detta $w(x, t)$ la sua somma si ha:

$$(1.9) \quad w(x, t) = u_t(x, t)$$

nel senso delle distribuzioni perchè per ogni $\Phi(x, t) \in C_0^{\infty}(Q)$ risulta:

$$\int_Q x^{\nu} w(x, t) \frac{\Phi(x, t)}{x^{\nu}} dx dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Q \psi_n(x) \left[- \int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, t) \psi_n(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + j_n^2 \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau \right] \frac{\Phi(x, t)}{x^{\nu}} dx dt = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Q \psi_n(x) \left(\int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^{\nu} f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau \right) \frac{\Phi_t(x, t)}{x^{\nu}} dx dt = \\ = - \int_Q x^{\nu} u(x, t) \frac{\Phi_t(x, t)}{x^{\nu}} dx dt.$$

Consideriamo, ora, la funzione:

$$(1.10) \quad x^{2\nu} u_x(x, t) = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau,$$

l'uguaglianza valendo nel senso di $L^1(Q)$.

Tenendo presente:

$$\frac{d}{dx} x^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x) = j_n x^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)$$

derivando termine a termine la serie (1.10) si ottiene la serie:

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) j_n^2 \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau$$

che ha per somma in $L^1(Q)$ la funzione $x^{2\nu} u_t(x, t) + x^{2\nu} f(x, t)$.

Avendosi nel senso della convergenza in $L^1(0, T)$;

$$\begin{aligned} \int_0^z x^{2\nu} (u_t + f) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z x^n \psi_n(x) j_n^2 dx \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \\ &\cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} z^\nu j_n \chi_n(z) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot \\ &\cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi, \tau) \psi_n(\xi) d\xi \right) d\tau, \end{aligned}$$

e valendo la (1.10), si ha q.o. in $]0, 1]$

$$\int_0^z x^{2\nu} (u_t + f) dx = z^{2\nu} u_x(z, t)$$

Ne segue allora:

$$(1.11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2\nu} u_x(x, t) = 0$$

$$(1.12) \quad x^{2\nu} (u_t + f) = x^{2\nu} \left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right).$$

Dalle (1.11) e (1.12) segue pure (cfr. [3]):

$$(1.13) \quad \int_Q x^{2\nu} \frac{u_x^2}{x^2} dx dt = \int_0^T dt \int_0^1 x^{-2\nu} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \xi^{2\nu} \left(u_{xx} + \frac{2\nu}{\xi} u_x \right) d\xi \right)^2 dx \leq \\ \leq \frac{4}{(1+2\nu)^2} \int_Q x^{2\nu} \left(x_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 dx dt.$$

Dalla uguaglianza;

$$\int_Q x^{2\nu} \left[\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 + u_t^2 \right] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{2\nu} u_x^2(x, T) dx = \\ = \int_Q x^{2\nu} \left[\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right) - u_t \right]^2 dx dt,$$

segue poi la (1.3), mentre dalla (1.13) segue la (1.4).

2. Teorema di esistenza ed unicità.

Vale il seguente;

TEOREMA 2.1. *Per ogni $f \in L_v^2(Q)$, il problema (0.1)-(0.3) ammette una ed una sola soluzione $u \in H_{v,0}^{2,1}(Q)$ e risulta:*

$$(2.1) \quad \left(\int_Q x^{2\nu} \left[\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right)^2 + u_t^2 \right] dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_0 \|f\|_{L_v^2(Q)}$$

$$(2.2) \quad \left\| \frac{u_x}{x} \right\|_{L_v^2(Q)} \leq \frac{2C_0}{1+2\nu} \|f\|_{L_v^2(Q)},$$

dove;

$$C_0 = \left(\frac{1}{\lambda} - \|H\|_{L^\infty(Q)} \frac{2}{1+2\nu} \right)^{-1}.$$

Per la dimostrazione basta tenere presenti i teoremi 3.1 e 3.2 di [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. MAUGERI, *Soluzioni a simmetria assiale di equazioni paraboliche*, Le Matematiche, **26** (1971), pp. 267-273.
- [2] A. MAUGERI, *Un problema al contorno per una classe di equazioni paraboliche singolari*, in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.
- [3] G. TALENTI, *Una disuguaglianza integrale*, Boll. Un. Mat. Ital., **21** (1966), pp. 25-34.
- [4] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press., 1958.
- [5] A. H. ZEMANIAN, *Generalized Integral Transformations*, Interscience Pubb., 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 marzo 1979.