

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA EZIA SERPICO

Varietà di Fano di dimensione $n > 4$ e di indice $r > n - 1$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 62 (1980), p. 295-308

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__295_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__295_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Varietà di Fano di dimensione $n \geq 4$ e di indice $r \geq n-1$.

MARIA EZIA SERPICO (*)

SUMMARY - Let V_n be a Fano variety on $\mathbf{C}$ of dimension $n > 3$ with anti-canonical sheaf $\mathcal{A}$, and let r ($r \leq n+1$) be the index of V_n , that is the maximal integer r such that $\mathcal{B}^r \simeq \mathcal{A}$ for some invertible sheaf $\mathcal{B}$ on V_n . Let d be the degree (univocally determined) of $\mathcal{B}$. Fano varieties with $r = n+1$, n , and those with $r = n-1$ and $d = 3, 4$ are here completely characterized. Moreover it is proved that Fano varieties with $r = n-1$ only exist if $d \leq 6$, whilst, in dimension 3, Fano varieties with $r = 2$ and $d = 7$ exist (cfr. [5]).

Introduzione.

Per studiare le varietà di Fano, ossia le varietà V definite sul campo complesso $\mathbf{C}$ con fascio anticanonico $\mathcal{A}$ ampio, è utile (cfr. [11], [1], [5]) suddividerle in classi in base ai valori dell'indice. È questo il massimo intero r tale che risulti $\mathcal{B}^r \simeq \mathcal{A}$, per qualche fascio invertibile $\mathcal{B}$ su V . Si dimostra che, in ogni caso, è $r \leq \dim V + 1$ e che, per ogni coppia (n, r) di interi tali che $1 \leq r \leq n+1$, esistono varietà di Fano di dimensione n ed indice r .

Ciascuna classe di varietà di Fano, individuata da determinati valori di n ed r , può essere ulteriormente suddivisa in base ai valori del grado d del fascio $\mathcal{B}$ (che è univocamente determinato a meno di isomorfismi). È naturale chiedersi a quali valori di d corrispondono varietà effettivamente esistenti e di che tipo siano queste varietà.

Iskovskih si è occupato a lungo di questi problemi relativamente

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.

al caso $n = 3$ e, ritrovando e completando i risultati classici di Fano e di Roth, ha descritto la maggior parte delle varietà di Fano tridimensionali.

In questa nota mi occuperò di varietà V_n di Fano di dimensione $n \geq 4$, restando nell'ordine di idee di Iskovskih.

Anzitutto esaminerò l'applicazione razionale $\phi_{\mathcal{B}}$ associata al fascio $\mathcal{B}$ e proverò che essa è sempre biregolare per $r = n$, $r = n + 1$ e per $r = n - 1$ e $d \geq 3$. Si osservi che Iskovskih è stato il primo ad interessarsi della biregolarità di $\phi_{\mathcal{B}}$ e ciò soltanto per $n = 3$.

Successivamente mi occuperò dell'esistenza delle V_n di Fano con i precedenti valori di r e d . Intanto è facile riconoscere che le V_n di Fano con $r = n + 1$ sono tutte e sole quelle isomorfe a $\mathbb{P}_n$ (e hanno $d = 1$) e che le V_n di Fano con $r = n$ sono tutte e sole le varietà isomorfe ad ipersuperficie quadriche non singolari di un $\mathbb{P}_{n+1}$ (e hanno $d = 2$).

I risultati principali ottenuti relativamente al caso $r = n - 1$ sono i Teoremi 2 e 3 del n. 3. Il primo dà una caratterizzazione delle varietà di Fano di indice $r = n - 1$ e $d \geq 3$. Il secondo prova che non esistono tali varietà per $n \geq 4$ e $d \geq 7$. Si noti che se invece la dimensione è $n = 3$ esistono varietà di Fano di indice 2 e $d = 7$ (cfr. [5]).

Esistono poi V_n di Fano di indice $n - 1$ per ogni d tale che $3 \leq d \leq 6$. Quelle con $d = 3$ e con $d = 4$ hanno come modello biregolare rispettivamente un'ipersuperficie cubica non singolare di $\mathbb{P}_{n+1}$ ed una varietà intersezione di due quadriche di $\mathbb{P}_{n+2}$. La grassmanniana $G(1, 4) \subset \mathbb{P}_5$ delle rette di $\mathbb{P}_4$ e le sue intersezioni con sottospazi di codimensione 1, 2, 3 sono altrettanti esempi di varietà di Fano con $r = n - 1$, $d = 5$ e di dimensione 6, 5, 4, 3. Il prodotto alla Segre $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ è un esempio di varietà di Fano di dimensione 4 con $r = 3$ e $d = 6$.

In tutto il lavoro farò l'ipotesi che esista una catena

$$B^1 \supset B^2 \supset \dots \supset B^{n-3}$$

di varietà i -caratteristiche del sistema $|B|$ associato a $\mathcal{B}$ (per varietà i -caratteristica di un sistema lineare $|B|$ intendo una varietà caratteristica di $|B|$ di dimensione $n - i$) tale che, per ogni $1 \leq i \leq n - 3$, B^i sia non singolare. Non so se tale ipotesi, che è essenziale per la dimostrazione della Proposizione 1, sia conseguenza delle altre ipotesi fatte su V . Si noti che per $n = 3$ il sistema $|B|$ contiene sempre divisori non singolari, come è stato recentemente dimostrato da V. V. Šokurov.

1. Sia V una varietà algebrica, proiettiva, irriducibile, non singolare, di dimensione $n \geq 3$, definita sul campo complesso, e sia K_V un suo divisore canonico. Supporremo che V sia di Fano, ossia che il fascio anticanonico $\mathcal{O}_V(-K_V)$ sia ampio. Se $s \geq 1$ e $\mathcal{O}_V(L)$ sono rispettivamente un intero positivo qualunque e un fascio invertibile su V tale che risulti $\mathcal{O}_V(-K_V) \simeq \mathcal{O}_V(sL)$, è immediato riconoscere che:

- (1) $\dim H^i(V, \mathcal{O}_V(jL)) = 0$ se $i < n$ e $j < 0$,
 (2) $\dim H^i(V, \mathcal{O}_V(jL)) = 0$ se $i > 0$ e $j \geq 1 - s$.

Per provare la (1) basta applicare il Kodaira Vanishing Theorem, per la (2) occorre anche il teorema di dualità di Serre.

In particolare per $j = 0$ la (2) diventa:

$$(3) \quad \dim H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0 \quad \forall i > 0,$$

pertanto il gruppo $\text{Pic } V$ coincide con $NS(V)$, e quindi è finitamente generato.

Diremo indice di V il massimo intero $r \geq 1$ ⁽¹⁾ per cui esista un fascio invertibile $\mathcal{B}$ su V tale che $\mathcal{O}_V(-K_V) = \mathcal{B}^r$.

Posto $B^0 = V$ supporremo che esista una catena

$$B^0 \supset B^1 \supset \dots \supset B^{n-3}$$

di varietà i -caratteristiche del sistema $|B|$ associato a $\mathcal{B}$ (per $i = 1$ B^1 è la varietà definita dalle equazioni locali di un divisore di $|B|$) tale che, per ogni $1 \leq i \leq n - 3$, B^i sia non singolare. Indicheremo infine con d il grado (B^n) del sistema $|B|$.

In questo paragrafo e nel successivo dimostreremo alcune proposizioni di carattere generale sulle varietà B^i e sui fasci $\mathcal{O}_{B^i}(B^{i+1})$, facili estensioni di proposizioni provate in [5] per $n = 3$ e che ci saranno utili nel seguito.

PROPOSIZIONE 1. Nelle nostre ipotesi per ogni $1 \leq i \leq n - 3$

- (I) B^i è una varietà irriducibile (di dimensione $n - i$) e $\mathcal{O}_{B^i}(B^{i+1})$ è fascio ampio

⁽¹⁾ Se G è un gruppo finitamente generato e se $g \in G$ è un elemento di G , l'insieme $R = \{r \in \mathbb{Z}, r \geq 1: \exists z \in G: rz = g\}$ è finito.

(II) risulta $\mathcal{O}_{B^i}(-K_{B^i}) \simeq \mathcal{O}_{B^i}((r-i)B^{i+1})$ e, se $i < r$, B^i è una varietà di Fano.

DIMOSTRAZIONE. La (I) si dimostra per induzione su i . Per $i = 1$, posto $B^1 = B$ si ha la sequenza esatta di coomologia

$$\dots \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V(-B)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V(-B)) \rightarrow \dots,$$

nella quale risulta

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(-B)) = H^1(V, \mathcal{O}_V(-B)) = 0;$$

è poi $H^0(V, \mathcal{O}_V) = 1$ perchè V è per ipotesi irriducibile, dunque $H^0(B, \mathcal{O}_B) = 1$ ed anche B è irriducibile; il fascio $\mathcal{O}_B(B^2)$ è ampio perchè restrizione di fascio ampio ad una sottovarietà irriducibile. Supponendo ora che la tesi sia vera per $i = n - 4$ si ha che

$$H^0(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) = H^1(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) = 0$$

e la (I) segue dalla sequenza esatta

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^0(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) &\rightarrow H^0(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}) \rightarrow H^1(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

e dal fatto che $\mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})$ è restrizione di fascio ampio (a sottovarietà irriducibile).

Quanto alla (II) basta osservare che con successive applicazioni del teorema di aggiunzione si ottiene $\mathcal{O}_{B^i}(K_{B^i}) \simeq \mathcal{O}_{B^i}((i-r)B^{i+1})$.

Per la (II) della proposizione precedente e per il Teorema 1.2 di [13] se $r \geq n - 2$ il sistema lineare $|B^{n-2}|$ contiene una superficie non singolare B^{n-2} . Come sopra si vede che B^{n-2} è irriducibile e poichè risulta $\mathcal{O}_{B^{n-1}}(-K_{B^{n-1}}) \simeq \mathcal{O}_{B^{n-1}}([r - (n - 2)]B^{n-1})$ si può concludere che

COROLLARIO 1. Se $r > n - 2$, B^{n-2} è una superficie di Del Pezzo, se $r = n - 2$ B^{n-2} è una superficie $K3$.

COROLLARIO 2. Se $r \geq n - 2$ i gruppi Pic B^i sono privi di torsione per ogni $0 \leq i \leq n - 2$.

La dimostrazione segue, del tutto analogamente che per $n = 3$ ([5], 1.15), dal fatto che $H^2(S, \mathbb{Z})$ è libero da torsione per ogni super-

ficie S di Del Pezzo o $K3$, dalle immersioni $H^2(B^i, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B^{i+1}, \mathbb{Z})$ e dalla regolarità delle B^i (cfr. (II) Proposizione 1).

OSSERVAZIONE 1. Poichè $\text{Pic } V$ è libero da torsione, è univocamente determinato (a meno di isomorfismi) il fascio $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{O}_V(-K_V) \simeq \mathcal{B}^r$.

PROPOSIZIONE 2. Sia $r \geq n-2$ risulta:

$$\dim H^0(V, \mathcal{O}_V(B)) = \frac{\{2 + [r - (n-3)]\} \{1 + [r - (n-3)]\}}{12} (B^n) + \\ + \frac{2}{[r - (n-3)]} + n - 2 .$$

DIMOSTRAZIONE. Per come sono state scelte le B^i e per il fatto che queste varietà sono tutte regolari risulta (cfr. [1]):

$$(4) \quad \dim H^0(V, \mathcal{O}_V(B)) = \dim H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})) + n - 3 .$$

Applicando il teorema di Riemann Roch a B^{n-3} si ottiene che

$$(5) \quad \dim H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})) = \\ = \frac{\{2 + [r - (n-3)]\} \{1 + [r - (n-3)]\}}{12} (B^n) + \frac{2}{[r - (n-3)]} + 1 .$$

Sostituendo la (5) in (4) si ha la tesi.

2. Studieremo ora l'applicazione razionale $\phi_{|B|}$ associata al sistema $|B|$.

È noto (cfr. [1], [5]) che l'indice r di V non può superare $n+1$ e che risulta:

$$\begin{aligned} d &= 1 && \text{se } r = n + 1 , \\ d &= 2 && \text{se } r = n . \end{aligned}$$

Inoltre se $r = n-1$ le superficie B^{n-2} sono di Del Pezzo con $\mathcal{O}_{B^{n-2}}(K_{B^{n-2}}) \simeq \mathcal{O}_{B^{n-2}}(-B^{n-1})$ e quindi deve essere $1 \leq d \leq 9$.

È anche noto che se il sistema $|B|$ non ha punti base e se $r \geq n-2$,

il grado deg $\phi_{|B|}$ del morfismo è sempre 1 o 2; ed è certamente 1 non appena risulti $r \geq n$ oppure $r = n - 1$ e $d \geq 3$.

D'ora in poi considereremo varietà V di indice $r \geq n - 1$.

PROPOSIZIONE 3. Se $r = n + 1$ o $r = n$ i sistemi $|B^{i+1}|_{B^i}$ (per ogni $0 \leq i \leq n - 2$) non hanno punti base; se $r = n - 1$ i sistemi $|B^{i+1}|_B$, ($0 \leq i \leq n - 2$) hanno punti base solo quando $d = 1$ ed in questo caso ne hanno uno solo.

DIMOSTRAZIONE. La tesi si dimostra per induzione sulla dimensione delle varietà caratteristiche di $|B|$, in modo del tutto analogo a quanto fatto da Iskovskih per $n = 3$. Occorre osservare che per $i = n - 2$, B^{n-2} è una superficie di Del Pezzo, con

$$|-K_{B^{n-2}}| = |[r - (n - 2)]B^{n-1}|_{B^{n-2}}$$

e ricordare (cfr. [8], cap. IV, § 24) proprietà ben note del divisore canonico di una tale superficie. Basta poi sfruttare gli omomorfismi

$$(6) \quad H^0(B^{i-1}, \mathcal{O}_{B^{i-1}}(B^i)) \rightarrow H^0(B^i, \mathcal{O}_{B^i}(B^{i+1})) \rightarrow 0 \quad 1 \leq i \leq n - 2$$

surgettivi perchè le varietà B^{i-1} sono tutte regolari.

COROLLARIO 3. Se $r \geq n - 1$, escluso il caso $r = n - 1$ e $d = 1$, il sistema $|B^{n-1}|_{B^{n-2}}$ contiene una curva liscia e irriducibile.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare i due teoremi di Bertini, tenendo presente che, per ipotesi, $|B^{n-1}|_{B^{n-2}}$ non ha punti base e risulta $\dim |B^{n-1}|_{B^{n-2}} \geq 2$ ⁽²⁾.

PROPOSIZIONE 4. Se è $r \geq n$ oppure $r = n - 1$ e $d \geq 3$ ⁽³⁾, $|B|$ è molto ampio e $\phi_{|B|}(V)$ è proiettivamente normale.

⁽²⁾ B^{n-3} è una varietà di Fano di dimensione 3 con

$$\mathcal{O}_{B^{n-3}}(-K_{B^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{B^{n-3}}([r - (n - 3)]B^{n-2}),$$

risulta allora $H^1(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}) = 0$ e si ha la sequenza esatta

$$0 \rightarrow H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}) \rightarrow H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})) \rightarrow H^0(B^{n-2}, \mathcal{O}_{B^{n-2}}(B^{n-1})) \rightarrow 0$$

dalla quale si ricava:

$$\dim |B^{n-1}|_{B^{n-2}} = \frac{\{2 + [r - (n - 3)]\} \{1 + [r - (n - 3)]\}}{12} (B^n) + \frac{2}{[r - (n - 3)]} - 1;$$

nelle ipotesi fatte segue appunto che $\dim |B^{n-1}|_{B^{n-2}} \geq 2$.

⁽³⁾ Nel qual caso deg $\phi_{|B|}$ è certamente 1 e $|B|$ non ha punti base.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente basta dimostrare che l'omomorfismo naturale di algebre graduate

$$(7) \quad S^* H^0(V, \mathcal{O}_V(B)) \rightarrow \bigoplus_{m \geq 1} H^0(V, \mathcal{O}_V(mB))$$

è surgettivo. La dimostrazione può farsi ancora ricalcando quella di Iskovskih relativa al caso $n = 3$ (cfr. [5], 4.4). Sia $B^0 \supset B^1 \supset \dots \supset B^{n-1}$ una catena di varietà caratteristiche di $|B|$ tutte irriducibili e non singolari (tale catena esiste in conseguenza delle ipotesi fatte al n. 1, del Corollario 1 e del Corollario 3).

Poichè valgono gli omomorfismi (6), è sufficiente, per quanto provato da Iskovskih in [5], 2.9, dimostrare che l'anello graduato $\bigoplus_{m \geq 1} H^0(B^{n-1}, \mathcal{O}_{B^{n-1}}(mB^n))$ è generato da $H^0(B^{n-1}, \mathcal{O}_{B^{n-1}}(B^n))$ e quindi (cfr. [9], § 2) che $(B^n) \geq 2g + 1$, essendo g il genere di B^{n-1} . Con il teorema di aggiunzione si ottiene $g = \dim H^0(B^{n-1}, \mathcal{O}_{B^{n-1}}(-[r - (n-1)]B^n))$ e quindi risulta $g = 0$ per $r = n + 1$ e $r = n$, e $g = 1$ per $r = n - 1$. Sappiamo d'altra parte che per $r = n + 1$ ed $r = n$ si ha rispettivamente $(B^n) = 1$ e $(B^n) = 2$, quindi risulta senz'altro $(B^n) \geq 2g + 1$.

Questa disuguaglianza è anche verificata per $r = n - 1$ nell'ipotesi da noi fatta: $(B^n) \geq 3$.

3. Dalle Propositioni 2 e 4 e da quanto ricordato all'inizio del n. 2, segue subito il teorema (già provato in [5] per $n = 3$):

TEOREMA 1. Qualunque sia $n \geq 3$

- (I) per $r = n + 1$ $\phi_{|B|}: V \rightarrow \mathbb{P}_n$ è isomorfismo,
- (II) per $r = n$ $\phi_{|B|}: V \rightarrow V^2 \subset \mathbb{P}_{n+1}$ è un isomorfismo di V su una quadrica non singolare,
- (III) per $r = n - 1$ e $d \geq 3$ $\phi_{|B|}: V \rightarrow V_n^d \subset \mathbb{P}_{d+n-2}$ è un isomorfismo di V su una varietà V_n^d di ordine d non singolare (regolare) e proiettivamente normale.

OSSERVAZIONE 2. In modo del tutto identico a quanto fatto in [5], 4.2 (iii), si studia il nucleo dell'omomorfismo (7) e (ricordando i valori, calcolati sopra, di g e di (B^n) , per $r \geq n$ e per $r = n - 1$ e $d \geq 3$) si dimostra che ciascuna varietà $V_n^d = \phi_{|B|}(V)$ è, per $d \geq 4$, intersezione delle quadriche che la contengono.

Proviamo ora che:

TEOREMA 2. Ogni V_n^d , immersa in $\mathbf{P}_{d+n-2}$, non singolare linearmente normale, regolare, di grado d , con $3 \leq d \leq 9$ è tale che $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n-1)$ ed è (per $n \geq 3$) una varietà di Fano di indice $n-1$ ad eccezione che per $n=3$ e $d=8$ nel qual caso V_3^8 è una varietà di Fano di indice 4.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo prima di tutto che $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n-1)$. Se $n=2$, per le ipotesi, V_2^d è una superficie di Del Pezzo (cfr. [10] e [8]) e inoltre $\mathcal{O}_{V_2^d}(-K_{V_2^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_2^d}(1)$ (cfr. [3]). Sia ora $n > 2$. La generica sezione iperpiana $\bar{B}$ di V_n^d è una V_{n-1}^d immersa in $\mathbf{P}_{d+n-3}$ non singolare e regolare. Inoltre è facile riconoscere che $\bar{B}$ è linearmente normale, sfruttando la sequenza esatta di coomologia associata alla sequenza esatta $0 \rightarrow \mathcal{O}_{V_n^d} \rightarrow \mathcal{O}_{V_n^d}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{B}}(1) \rightarrow 0$, tenendo presente che $H^1(V_n^d, \mathcal{O}_{V_n^d}) = 0$ e che V_n^d è linearmente normale.

Per l'ipotesi induttiva si ha allora $\mathcal{O}_{\bar{B}}(-K_{\bar{B}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}}(n-2)$ e quindi il teorema di agguinzione fornisce l'isomorfismo:

$$(8) \quad \mathcal{O}_{V_n^d}(K_{V_n^d}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_n^d}} \mathcal{O}_{\bar{B}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}}(-(n-2)).$$

Tensorizzando ambo i membri della (8) per $\mathcal{O}_{\bar{B}}(-1)$ si ottiene poi

$$\mathcal{O}_{V_n^d}(K_{V_n^d}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_n^d}} \mathcal{O}_{\bar{B}} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}}(-(n-1)).$$

Per l'immersione $\text{Pic } V_n^d \rightarrow \text{Pic } \bar{B}$ ⁽⁴⁾ si ha senz'altro che $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n-1)$. Allora V_n^d è una varietà di Fano di indice $r \geq n-1$. Si vede subito che non può essere $r=n$. Infatti in tal caso dovrebbe essere $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n\tilde{B})$, con $\mathcal{O}_{V_n^d}(\tilde{B})$ fascio invertibile su V_n^d e $(\tilde{B}^n) = 2$ (cfr. Teorema 1) e quindi dovrebbe valere l'eguaglianza $2n^n = (n-1)^n d$ che non è verificata da alcun valore di n e d . Per $r = n+1$ deve risultare $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}((n+1)\tilde{B})$, con $\mathcal{O}_{V_n^d}(\tilde{B})$ fascio invertibile su V_n^d e $(\tilde{B}^n) = 1$ (cfr. Teorema 1) e quindi $(n+1)^n =$

⁽⁴⁾ Se X è una varietà proiettiva non singolare definita sul campo complesso $\mathbf{C}$, e se Y è una sottovarietà non singolare di dimensione $n \geq 3$ completa intersezione in X , si prova (cfr. [4], Corollario 3.3) che si ha $\text{Pic } X \simeq \text{Pic } Y$. In maniera analoga si dimostra poi, che se $\dim Y = 2$, si ha una immersione $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } Y$.

$= (n-1)^n d$; questa eguaglianza nelle nostre ipotesi è soddisfatta solo da $n=3$ e $d=8$, e V_3^8 è di Fano di indice 4 perchè non esistono V_3 di Fano con $d=8$ e $r=2$ (cfr. [5], 4.6). In tutti gli altri casi, dunque V_n^d ha indice $n-1$.

OSSERVAZIONE 3. Si vede che è possibile scegliere una catena $V_n^d = \bar{B}^0 \supset \bar{B}^1 \supset \dots \supset \bar{B}^i \supset \dots \supset \bar{B}^{n-1}$ di sezioni lineari $\bar{B}^i$ di V_n^d , di dimensione $n-i$ (immerse in un $\mathbf{P}_{d+(n-i)-2}$), tutte irriducibili, non singolari e (tranne l'ultima) regolari. Basta infatti ricordare l'isomorfismo $V_n^d \simeq V$, l'esistenza della catena $B^0 \supset B^1 \supset \dots \supset B^{n-3}$, la Proposizione 1 e il Corollario 3. È anche facile riconoscere che le $\bar{B}^i$ sono tutte linearmente normali (sfruttando gli omomorfismi surgettivi $H^0(\bar{B}^{i-1}, \mathcal{O}_{\bar{B}^{i-1}}(1)) \rightarrow H^0(\bar{B}^i, \mathcal{O}_{\bar{B}^i}(1)) \rightarrow 0$).

4. In conseguenza dei Teoremi 1 e 2, per stabilire l'esistenza o meno di varietà di Fano di indice $r = n-1$ e con un fissato valore di d , maggiore di 3, è sufficiente stabilire quella dei loro modelli biregolari $V_n^d \subset \mathbf{P}_{d+n-2}$. Proveremo che:

TEOREMA 3. Se $n \geq 4$, non esistono V_n^d proiettivamente anticanoniche con $d \geq 7$ e $r = n-1$.

DIMOSTRAZIONE. Si è già detto che non può essere $d > 9$. Consideriamo allora il

Caso $d=9$. Se V_n^9 esistesse risulterebbe come sappiamo $\mathcal{O}_{V_n^9}(-K_{V_n^9}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^9}(n-1)$; costruita una catena $\bar{B}^0 \supset \bar{B}^1 \supset \dots \supset \bar{B}^{n-2}$ come in Osservazione 3 si avrebbe $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(-K_{\bar{B}^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2)$ e la varietà $\bar{B}^{n-3}$ sarebbe allora una V_3 di Fano con $d=9$ e $r=2$ (cfr. Teorema 2), ma non esistono varietà di questo tipo (cfr. [5], 4.2).

Caso $d=8$. Se V_n^8 esistesse risulterebbe, ancora con gli stessi simboli dell'Osservazione 3, $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(-K_{\bar{B}^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2)$ e $\bar{B}^{n-3}$ sarebbe una V_3 di Fano con $d=8$ e $r=4$ (cfr. Teorema 2).

Su $\bar{B}^{n-3}$ esisterebbe allora un fascio invertibile $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(\tilde{b})$ tale che $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(-K_{\bar{B}^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(4\tilde{b})$ e quindi (essendo $\text{Pic } \bar{B}^{n-3}$ privo di torsione) $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2\tilde{b})$. Gli isomorfismi naturali $\text{Pic } \bar{B}^{i-1} \rightarrow \text{Pic } \bar{B}^i$ ($1 \leq i \leq n-3$) condurrebbero allora ad individuare un fascio invertibile $\mathcal{O}_{V_n^8}(\tilde{B})$ tale che

$$\mathcal{O}_{V_n^8}(\tilde{B}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_n^8}} \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(\tilde{b}) \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_{V_n^8}(-K_{V_n^8}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^8}(2(n-1)\tilde{B}),$$

e l'indice della nostra V_n^8 sarebbe $2(n-1)$ e non $(n-1)$.

Caso $d = 7$. Proveremo dapprima la proposizione per varietà di dimensione quattro. Supporremo per assurdo che esista una $V_4^7 \subset \mathbb{P}_9$ di Fano di indice 3, e dimostreremo che essa sarebbe la proiezione da un punto di una $V_4^8 \subset \mathbb{P}_{10}$ (di Fano) di indice 3, che sappiamo non esistere. Per l'Osservazione 3 si possono scegliere due sezioni iperpiane di V_4^7 , $\bar{B}_1$ e $\bar{B}_2$ (almeno una delle quali non singolare), la cui intersezione è una superficie non singolare $S^7 \subset \mathbb{P}_7$ di Del Pezzo. Come è noto S^7 contiene tre rette Z_0, Z_1, Z_2 una delle quali, sia Z_0 , si distingue dalle altre perchè le incontra entrambe. Per uno dei teoremi di Bertini il generico elemento $\bar{B}_\lambda$ del fascio $\mathcal{F}$ di sezioni iperpiane di V_4^7 definito da $\bar{B}_1$ e $\bar{B}_2$ è non singolare; poichè è anche linearmente normale esso è senz'altro una V_3^7 di Fano, con $r = 2$, avente S^7 come sezione iperpiana. Ogni varietà di questo tipo (cfr. [5], 6.1) contiene un unico piano P_λ contraibile a un punto non singolare (ossia tale che $N_{P_\lambda}^{\bar{B}_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}_\lambda}(P_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{B}_\lambda}} \mathcal{O}_{P_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$), il quale incontra S^7 soltanto in Z_0 . Se L è la chiusura del luogo degli infiniti piani P_λ relativi alle $\bar{B}_\lambda$ non singolari del fascio $\mathcal{F}$ e H è un qualunque iperpiano, $L \cap H$ contiene tutte le rette $P_\lambda \cap H$, ciascuna delle quali appartiene alla varietà $V_3^7 = V_4^7 \cap H$ e passa per il punto $Z_0 \cap H$. Tenendo presente la struttura della famiglia delle rette di V_3^7 ⁽⁵⁾ si conclude che $L \cap H$ è un piano e quindi $L = \mathbb{P}_3$.

OSSERVAZIONE 4. L è regolarmente contraibile a un punto non singolare.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che $\mathcal{O}_L(L^2) \simeq \mathcal{O}_L(-1)$ (cfr. [7], Teorema 5, § 2).

Si considerino le sequenze esatte di Fasci normali

$$0 \rightarrow N_{P_\lambda}^{\bar{B}_\lambda} \rightarrow N_{P_\lambda}^{V_4^7} \rightarrow N_{\bar{B}_\lambda}^{V_4^7}|_{P_\lambda} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \rightarrow N_{P_\lambda}^{L^1} \rightarrow N_{P_\lambda}^{V_4^7} \rightarrow N_L^{V_4^7}|_{P_\lambda} \rightarrow 0.$$

Risulta $N_{\bar{B}_\lambda}^{V_4^7} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}_\lambda}(1)$ e, come si è detto $N_{P_\lambda}^{\bar{B}_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$. Inoltre valgono gli isomorfismi $N_{P_\lambda}^L \simeq \mathcal{O}_L(P_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{P_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(1)$ e $N_L^{V_4^7} \simeq \mathcal{O}_L(L^2)$. Le

⁽⁵⁾ V_3^7 è lo scoppimento di $\mathbb{P}_3$ in un punto (cfr. [5], 6.1) e pertanto contiene una ed una sola retta per ogni punto non situato sul piano eccezionale.

due sequenze esatte si possono allora riscrivere

$$(9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1) \rightarrow N_{P_\lambda}^{V_4^7} \rightarrow \mathcal{O}_{P_\lambda}(1) \rightarrow 0 ,$$

$$(10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{P_\lambda}(1) \rightarrow N_{P_\lambda}^{V_4^7} \rightarrow \mathcal{O}_L(L^2) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda} \rightarrow 0 .$$

Dalla (9) tenendo presente che il polinomio di Chern di $N_{P_\lambda}^{V_4^7}$ è il prodotto dei polinomi di Chern di $\mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$ e $\mathcal{O}_{P_\lambda}(1)$ si ricava che la prima classe di Chern $c_1(N_{P_\lambda}^{V_4^7})$ di $N_{P_\lambda}^{V_4^7}$ è nulla. Tenendo conto di questo dalla (10) si ricava in maniera analoga che la prima classe di Chern del fascio $\mathcal{O}_L(L^2) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda}$ è la classe di equivalenza dei divisori corrispondenti a $\mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$ e quindi $\mathcal{O}_L(L^2) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$; ne segue subito che $\mathcal{O}_L(L^2) \simeq \mathcal{O}_L(-1)$.

LEMMA 1. Fissato λ il sistema $|\bar{B}_\lambda + L|$ definisce un morfismo che contrae regolarmente L , cioè un morfismo birazionale da V_4^7 in una $V_4^8 \subset \mathbf{P}_{10}$ che trasforma L in un punto non singolare p_0 ed è isomorfismo tra $V_4^7 - L$ e $V_4^8 - p_0$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la sequenza esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda) \rightarrow \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L) \rightarrow \mathcal{O}_L(\bar{B}_\lambda + L) \rightarrow 0 ,$$

che per l'Osservazione 4 può risciversi:

$$(11) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda) \rightarrow \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L) \rightarrow \mathcal{O}_L \rightarrow 0 .$$

Per la dualità di Serre ed il Kodaira Vanishing Theorem si ha

$$H^1(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda)) \simeq H^3(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(-4)) = 0 ,$$

quindi la sequenza di coomologia associata alla (11) contiene il segmento

$$(12) \quad 0 \rightarrow H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda)) \rightarrow H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L)) \xrightarrow{\tau} H^0(L, \mathcal{O}_L) \rightarrow 0$$

e di qui segue che $\dim |\bar{B}_\lambda + L| = \dim |\bar{B}_\lambda| + 1 = 10$.

Lo spazio L offre quindi una sola condizione ai divisori di $|\bar{B}_\lambda + L|$ che devono contenerlo e dunque il sistema $|\bar{B}_\lambda + L|$ contrae L a un punto p_0 e non ha punti base. Inoltre dal fatto che $|\bar{B}_\lambda|$ separa i punti e i punti infinitamente vicini segue che nell'aperto $V_4^7 - L$ anche $|\bar{B}_\lambda + L|$ ha le stesse proprietà. Il sistema $|\bar{B}_\lambda + L|$ definisce quindi un morfismo birazionale, biregolare su $V_4^7 - L$, di V_4^7 su una varietà V' di dimensione quattro contenuta in $\mathbb{P}_{10}$.

Tenendo conto che $L \simeq \mathbb{P}_3$ e che $\mathcal{O}_L(L^2) \simeq \mathcal{O}_L(-1)$ si trova che:

$$(\bar{B}_\lambda^3 L)_{V_4^7} = 1, \quad (\bar{B}_\lambda^2 L^2)_{V_4^7} = -1, \quad (\bar{B}_\lambda L^3)_{V_4^7} = 1 \quad \text{e} \quad (L^4)_{V_4^7} = -1.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} (\bar{B}_\lambda + L)_{V_4^7}^4 &= (\bar{B}_\lambda^4)_{V_4^7} + 4(\bar{B}_\lambda^3 L)_{V_4^7} + 6(\bar{B}_\lambda^2 L^2)_{V_4^7} + 4(\bar{B}_\lambda L^3)_{V_4^7} + (L^4)_{V_4^7} = \\ &= 7 + 4 - 6 + 4 - 1 = 8. \end{aligned}$$

La varietà V' ha allora ordine 8 ed è non singolare in $V' - p_0$. Modificando lievemente un ragionamento di Kodaira (cfr. [6], Appendice) possiamo ora provare che anche p_0 è non singolare. Sia $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{10}\}$ una base di $H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda))$ e sia $\{\mathcal{U}_j\}$ un ricoprimento finito di V_4^7 tale che risulti $\varphi_\alpha = \{\mathcal{U}_j, \varphi_\alpha^j\}$ con $\varphi_\alpha^j \in \Gamma(\mathcal{U}_j, \mathcal{O}_{V_4^7})$ per ogni $\alpha = 1, \dots, 10$ e che $s = \{\mathcal{U}_j, s^j\}$ sia un sistema di equazioni locali per L . Per la (12) se $\varphi_0 \in H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L))$ è tale che risulti $r\varphi_0 = 1$, $\{\varphi_0, s\varphi_1, \dots, s\varphi_{10}\}$ è una base di $H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L))$. Per ogni $z \in \mathcal{U}_j$, l'applicazione $\phi_{|\bar{B}_\lambda + L|}$ si rappresenta così:

$$\phi_{|\bar{B}_\lambda + L|}(z) = (\varphi_0^j(z), s^j \varphi_1^j(z), \dots, s^j \varphi_{10}^j(z))$$

e quindi L ha come immagine il punto $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Osserviamo poi che possiamo supporre di avere scelto le φ_α in modo tale che $\{\varphi_1|_L, \varphi_2|_L, \varphi_3|_L, \varphi_4|_L\}$ sia una base di $H^0(L, \mathcal{O}_L(1))$ e quindi $\varphi_1^j, \dots, \varphi_4^j$ non siano mai contemporaneamente nulle in $\mathcal{U}_j \cap L$.

Dato ai simboli φ_i^j ed s^j il significato precisato sopra, si può ripetere la dimostrazione di Kodaira senza alcun cambiamento. Si vede così che se si pone:

$$\psi(z) = \left(\frac{s^j(z) \varphi_1^j(z)}{\varphi_0^j(z)}, \dots, \frac{s^j(z) \varphi_4^j(z)}{\varphi_0^j(z)}, \varphi_1^j(z), \dots, \varphi_4^j(z) \right), \quad \forall z \in \mathcal{U}_j$$

l'applicazione $z \rightarrow \psi(z)$ è biolomorfa tra un intorno di L , aperto in topologia complessa, e una varietà W ottenuta scoppiando un opportuno intorno (complesso) $\mathfrak{U}$ dell'origine in $\mathbf{C}_4$ nell'origine stessa, e che, se $Q_0: \mathfrak{U} \rightarrow W$ è questo scoppio, l'applicazione $\phi|_{\bar{B}_\lambda + L} \psi^{-1} Q_0$ è un omeomorfismo tra $\mathfrak{U}$ ed un intorno (complesso) di p_0 in V' ; quindi p_0 è non singolare per V' .

Per il lemma precedente la V_4^7 che abbiamo supposto esistente, sarebbe lo scoppio di V' nel punto $p_0 = \phi|_{\bar{B}_\lambda + L}(L)$, e quindi per il suo fascio canonico $\omega_{V_4^7}$ si avrebbe $\omega_{V_4^7} \simeq \phi|_{\bar{B}_\lambda + L}^* \omega_{V'} \otimes \mathcal{O}_{V_4^7}(3L)$;

ma per ipotesi è $\omega_{V_4^7} \simeq \mathcal{O}_{V_4^7}(-3\bar{B}_\lambda)$, ed allora sarebbe $\mathcal{O}_{V_4^7}(-3(\bar{B}_\lambda + L)) \simeq \phi|_{\bar{B}_\lambda + L}^* \omega_{V'}$ e quindi $\omega_{V'} \simeq \mathcal{O}_{V'}(3)$. In conclusione V' sarebbe una varietà di Fano di indice $r = 3$ (il grado $3^4 \cdot 8$ di $|-K_{V'}|$ non è divisibile nè per 4^4 nè per 5^4) con $d = 8$ e si è già provato che non esistono V_4^8 di Fano con questi valori di r e di d .

Sia ora $n > 4$; se esistesse una $V_n^7 \subset \mathbf{P}_{n+5}$ di Fano risulterebbe $\mathcal{O}_{V_n^7}(-K_{V_n^7}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^7}(n-1)$, sempre con i simboli dell'Osservazione 3, si avrebbe $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-4}}(-K_{\bar{B}^{n-4}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-4}}(3)$. Quindi (cfr. Teorema 2) $\bar{B}^{n-4}$ sarebbe una V_4 di Fano con $r = 3$ e $d = 7$ che come si è appena dimostrato non esiste.

5. Al contrario che per $d \geq 7$, è facile riconoscere invece che esistono $V_n^d \subset \mathbf{P}_{d+n-2}$ di Fano con $d = 3, 4, 5, 6$ e di dimensione superiore a 3.

È immediato riconoscere che ogni $V_n^3 \subset \mathbf{P}_{n+1}$ non singolare è una varietà di Fano di indice $n - 1$.

Per l'Osservazione 2 e per questioni di grado ogni $V_n^4 \subset \mathbf{P}_{n+2}$ di Fano è l'intersezione completa di due quadriche non singolari di $\mathbf{P}_{n+2}$; viceversa usando il teorema di aggiunzione è facile vedere che ogni $V_n^4 \subset \mathbf{P}_{n+2}$, non singolare, intersezione di due ipersuperficie quadriche, è una varietà di Fano di indice $n - 1$.

Per quanto riguarda il caso $d = 5$, esistono certamente varietà di Fano con tale valore di d e di dimensione n minore o uguale a 6. È ben noto infatti, che la grassmanniana W delle rette di $\mathbf{P}_4$ è una varietà di Fano di dimensione 6 e di indice 5 (cfr. [14] e [2]) e che le sezioni iperpiane generiche di W , intersezioni con 1, 2, 3 iperpiani generici sono anche esse di Fano (ancora con $d = 5$) rispettivamente di dimensione 5, 4, 3 e di indice 4, 3, 2.

Una V_4 di Fano con $d = 6$, anzi una $V_4^6 \subset \mathbf{P}_8$ di Fano, è il prodotto alla Segre $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$. Infatti se si indicano con $p_i: \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$ ($i = 1, 2$),

le proiezioni rispettivamente sul primo e sul secondo fattore, e si pone $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}(E_i) = p_i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(1)$, risulta:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}(-K_{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}(3(E_1 + E_2)).$$

Il grado di $|-K_{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1}|$ è $3^4 \cdot \deg(E_1 + E_2) = 3^4 \cdot 6$, quindi l'indice di $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ non può che essere 3.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. T. BONARDI, *Intorno a certe varietà algebriche dotate di sistema anticanonico*, B.U.M.I. (4) **8** (1973), pp. 456-464.
- [2] G. FANO, *Sulle sezioni spaziali della varietà Grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, Rend. Acc. Naz. Lincei (6), XI (1930), pp. 325-335.
- [3] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Vol. 52, New York (1977).
- [4] R. HARTSHORNE, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math., **156**, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).
- [5] V. A. ISKOVSKIĖ, *Fano 3-folds - I*, Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. Matem., **41** (1977), pp. 516-562.
- [6] K. KODAIRA, *On Kahler varieties of restricted type*, Annales of Math., **60** (1954), pp. 28-48.
- [7] A. T. LASCU, *Sous-variétés régulièrement contractibles d'une variété algébrique*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **23** (1969), pp. 675-695.
- [8] YU. I. MANIN, *Cubic Forms, Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland, Amsterdam (1974).
- [9] D. MUMFORD, *Varieties defined by quadratic equations*, C.I.M.E., Varenna (1969), pp. 31-94.
- [10] M. NAGATA, *On rational surfaces - I*, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), **32** (1960), pp. 351-370.
- [11] L. ROTH, *Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue*, Rend. Acc. Lincei, (8), **9** (1950), pp. 246-250.
- [12] B. SAINT-DONAT, *Sur les équations définissant une courbe algébrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **274**: 4 (1972), pp. A 324-A 327.
- [13] V. V. ŠOKUROV, *La non singolarità del divisore anticanonico di una varietà di Fano tridimensionale*, Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. (in corso di stampa).
- [14] A. N. TYURIN, *Five lectures on three-dimensional varieties*, Russian Math. Surveys, **27** (1972), pp. 1-53.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 ottobre 1979.