Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Zanovello

Sull'analisi numerica delle trasformate di Laplace delle funzioni di Anger e di Weber

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 183-190

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__183_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 62 (1980)

Sull'analisi numerica delle trasformate di Laplace delle funzioni di Anger e di Weber.

RENATO ZANOVELLO (*)

SUNTO - In questo lavoro, considero, con riferimento all'analisi numerica, il problema delle trasformate di Laplace delle funzioni di Anger, $\boldsymbol{J}_\nu(x)$ e di Weber, $\boldsymbol{E}_\nu(x)$.

In questa Nota mi propongo di studiare dal punto di vista dell'analisi numerica, le trasformate di Laplace della funzione di Anger, $\boldsymbol{J}_\nu(x)$ e della funzione di Weber, $\boldsymbol{E}_\nu(x)$, che si presentano in questioni di matematica applicata. Per una trattazione delle suddette funzioni rinvio il lettore ad [1, p. 308 e segg.].

§ 1. – Considero dapprima l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-px}\boldsymbol{J}_\nu(x)\,dx\,, \qquad (p \geqslant 1)\,. \tag{1}$$

Per ν intero positivo, negativo o nullo, ricordo che è [2, p. 36]:

$$\boldsymbol{J}_\nu(x) = J_\nu(x)\,, \tag{2}$$

ove $J_\nu(x)$ indica, al solito, la funzione di Bessel di prima specie; da ciò,

(*) Indirizzo dell'A.: Centro di Calcolo Scientifico dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

utilizzando per di più una nota trasformata di Laplace relativa alle funzioni di Bessel [3, vol. I, p. 182 (1)], posso scrivere per ν intero non negativo:

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-px} J_\nu(x)\,dx = \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu}\,.$$

Per ν intero negativo, ricordando che in questo caso è $J_\nu(x) = (-1)^{-\nu} J_{-\nu}(x)$, e ragionando quindi come sopra, ottengo:

$$(4)\qquad \int_0^\infty e^{-px} J_\nu(x)\,dx = \frac{(-1)^{-\nu}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}}\,.$$

Le (3) e (4) risolvono dunque il problema per ν intero positivo, nullo o negativo.

§ 2. – Escluso tale caso importante, esamino la funzione di Lommel $s_{\mu,\nu}(x)$ così definita [1, p. 345 (2)]:

$$(5)\qquad s_{\mu,\nu}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m x^{2m+1+\mu}\Gamma((\mu-\nu+1)/2)\,\Gamma((\mu+\nu+1)/2)}{2^{2m+2}\Gamma((\mu-\nu+3)/2+m)\,\Gamma((\mu+\nu+3)/2+m)}\,,$$

per la quale considero solo i valori $\mu = 0$, $\mu = -1$, in quanto utili nel seguito. Dopo di che posso scrivere:

$$(6)\qquad e^{-px} s_{0,\nu}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)\, e^{-px} x^{2m+1}}{2^{2m+2}\Gamma((3-\nu)/2+m)\,\Gamma((3+\nu)/2+m)}\,.$$

Alla serie in (6) posso applicare il teorema d'integrazione termine a termine nell'intervallo $(0, x)$, $x > 0$, ottenendo così:

$$(7)\qquad \int_0^x \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)\, e^{-pt} t^{2m+1}}{2^{2m+2}\Gamma((3-\nu)/2+m)\,\Gamma((3+\nu)/2+m)}\,dt =$$
$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)\,\gamma(2m+2, px)}{2^{2m+2}p^{2m+2}\Gamma((3-\nu)/2+m)\,\Gamma((3+\nu)/2+m)}\,,$$

avendo fatto ricorso alla classica funzione gamma incompleta $\gamma(\alpha, z)$.

Come si vede facilmente, ricordando tra l'altro definizione e proprietà delle varie funzioni gamma, l'ultima serie in (7), per $p > 1$, è una serie uniformemente convergente di funzioni continue e $\gamma(2m + 2, px)$ tende a $\Gamma(2m + 2)$ al divergere di x. Perciò, applicando a detta serie un noto teorema del limite, tenendo presenti le (6), (7), ricavo in conclusione:

$$(8)\qquad \int_0^\infty e^{-px} s_{0,\nu}(x)\,dx =$$

$$= \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \Gamma(2m+2)}{2^{2m+2}p^{2m+2}\Gamma((3-\nu)/2+m)\,\Gamma((3+\nu)/2+m)}\,.$$

Tale risultato ricalca quello ottenuto da Hardy [7, p. 47]. In modo analogo a quanto or ora descritto, posso scrivere:

$$(9)\qquad e^{-px}s_{-1,\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(-\nu/2)\Gamma(\nu/2)e^{-px}x^{2m}}{2^{2m+2}\Gamma(-\nu/2+1+m)\Gamma(\nu/2+1+m)}\,.$$

Anche alla serie in (9) applico il teorema d'integrazione termine a termine nell'intervallo $(0, x)$, $x > 0$, ottenendo così:

$$(10)\qquad \int_0^x \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(-\nu/2)\Gamma(\nu/2)\,e^{-pt}t^{2m}}{2^{2m+2}\Gamma(-\nu/2+1+m)\Gamma(\nu/2+1+m)}\,dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(-\nu/2)\Gamma(\nu/2)\gamma(2m+1, px)}{2^{2m+2}p^{2m+1}\Gamma(-\nu/2+1+m)\Gamma(\nu/2+1+m)}\,.$$

Dalle (9), (10), ripetendo le considerazioni svolte dopo la (7) con $p > 1$, ricavo in definitiva:

$$(11)\qquad \int_0^\infty e^{-px}s_{-1,\nu}(x)\,dx =$$

$$= \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(2m+1)}{2^{2m+2}p^{2m+1}\Gamma(-\nu/2+1+m)\Gamma(\nu/2+1+m)}\,.$$

Per quanto riguarda poi la serie in (8) ove è $p > 1$, osservo che per che per $m > \max(\nu/2 - \frac{3}{2}, -\nu/2 - \frac{3}{2})$, essa è a termini di segno alterno.

Inoltre senz'altro vale la:

$$4(p^2-1)m^2+(12p^2-10)m+(9-\nu^2)p^2-6\geqslant 0\ ,$$

se è:

$$m\geqslant\frac{-6p^2+5+\sqrt{4\nu^2p^2(p^2-1)+1}}{4(p^2-1)}=\mu_0\,. \tag{12}$$

Pertanto per

$$n>\max\left(\frac{\nu}{2}-\frac{3}{2},-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{2},\mu_0\right) \tag{13}$$

posso applicare il teorema di Leibnitz e quindi scrivere:

$$\int_0^\infty e^{-px}s_{0,\nu}(x)\,dx=\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\cdot \tag{14}$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\Gamma(2m+2)}{2^{2m+2}p^{2m+2}\Gamma((3-\nu)/2+m)\,\Gamma((3+\nu)/2+m)}+R_{n+1}\,,$$

ove per R_{n+1} è:

$$|R_{n+1}|\leqslant\frac{|\Gamma((1-\nu)/2)\,\Gamma((1+\nu)/2)\,|\Gamma(2n+4)}{2^{2n+4}p^{2n+4}\Gamma((5-\nu)/2+n)\,\Gamma((5+\nu)/2+n)}\,, \tag{15}$$

che può essere reso arbitrariamente piccolo per n sufficientemente grande.

Analogamente, per la serie in (11) ove è sempre $p>1$, osservo che se è:

$$n>\max\left(\frac{\nu}{2}-1,-\frac{\nu}{2}-1,\mu_1\right), \tag{16}$$

con

$$\mu_1=\frac{-4p^2+3+\sqrt{4\nu^2p^2(p^2-1)+1}}{4(p^2-1)}\,, \tag{17}$$

posso scrivere:

$$\int_0^\infty e^{-px}s_{-1,\nu}(x)\,dx=\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cdot \tag{18}$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\Gamma(2m+1)}{2^{2m+2}p^{2m+1}\Gamma(-\nu/2+1+m)\Gamma(\nu/2+1+m)}+\boldsymbol{R}_{n+1}\,,$$

ove è

$$|\boldsymbol{R}_{n+1}| \leqslant \frac{|\Gamma(-\nu/2)\Gamma(\nu/2)|\Gamma(2n+3)}{2^{2n+4}p^{2n+3}\Gamma\big((4-\nu)/2+n\big)\Gamma\big((4+\nu)/2+n\big)}, \tag{19}$$

che, come sopra, può essere reso arbitrariamente piccolo per n sufficientemente grande.

Tutto ciò premesso, ricordo che è [1, p. 310]:

$$\boldsymbol{J}_\nu(x) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}[-\nu s_{-1,\nu}(x) + s_{0,\nu}(x)], \tag{20}$$

dalla quale deduco nel mio caso:

$$\int_0^\infty e^{-px}\boldsymbol{J}_\nu(x)\,dx = -\frac{\nu\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-px}s_{-1,\nu}(x)\,dx + \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-px}s_{0,\nu}(x)\,dx. \tag{21}$$

Allora per ν non intero, $p > 1$, n soddisfacente a (13), (16), sostituisco in (21) le espressioni date da (18), (14), per le quali valgono rispettivamente le (19), (15), il che permette di ottenere l'integrale (1) con la precisione voluta, per n sufficientemente elevato.

Come si può vedere facilmente, l'integrale (1) con $p = 1$ converge e si ha:

$$\int_0^\infty e^{-x}\boldsymbol{J}_\nu(x)\,dx = \lim_{p\to 1^+}\int_0^\infty e^{-px}\boldsymbol{J}_\nu(x)\,dx, \tag{22}$$

che permette teoricamente di utilizzare i risultati precedenti.

§ 3. – Considero ora, per ν non intero, $p > 1$, l'integrale:

$$\int_0^\infty e^{-px}\boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx, \tag{23}$$

relativo alla funzione di Weber, ricordando che è [1, p. 310]:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = \frac{\nu[\cos(\nu\pi)-1]}{\pi}s_{-1,\nu}(x) - \frac{1+\cos(\nu\pi)}{\pi}s_{0,\nu}(x). \tag{24}$$

Dalla (24) ricavo nel mio caso:

$$\text{(25)} \qquad \int_0^\infty e^{-px} \boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx = \frac{\nu[\cos(\nu\pi)-1]}{\pi}\int_0^\infty e^{-px} s_{-1,\nu}(x)\,dx - \\ - \frac{1+\cos(\nu\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-px} s_{0,\nu}(x)\,dx\,.$$

Per n soddisfacente a (13), (16), sostituisco in (25) le espressioni date da (18), (14), per le quali al solito valgono rispettivamente le (19), (15), il che permette di ottenere l'integrale (23) con la precisione voluta, per n sufficientemente grande.

Anche in questo caso, come si può dimostrare facilmente, l'integrale (23) con $p=1$ converge e si ha:

$$\text{(26)} \qquad \int_0^\infty e^{-x} \boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx = \lim_{p\to 1^+} \int_0^\infty e^{-px} \boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx\,,$$

che consente teoricamente di utilizzare i risultati già ottenuti.

§ 4. – Rimane da considerare per l'integrale (23) con $p \geqslant 1$, il caso di ν intero. A tale scopo, basta utilizzare tra l'altro le relazioni tra la funzione di Weber e quella di Struve di ordine intero e note formule relative alla funzione di Struve stessa per ν intero, $\geqslant -1$ [4], nonchè il fatto che per $\nu = -2m$, è:

$$\boldsymbol{E}_{-2m}(x) = \boldsymbol{E}_{2m}(x)$$

e per $\nu = -2m-1$, è:

$$\boldsymbol{E}_{-2m-1}(x) = -\boldsymbol{E}_{2m+1}(x)\,,$$

come si può vedere dalla definizione della funzione di Weber, accompagnata da [5, p. 401 (7), (5)].

Un altro modo per risolvere il problema, fermo restando il ricorso alla via indicata sopra per $\nu = 0, \pm 1$, in quanto ritrovo funzioni elementari, è quello di ricordare le relazioni esistenti tra la funzione di Weber e le funzioni di Lommel per ν intero [v. ad es. 6] e ricorrere quindi ai risultati ottenuti in precedenza.

§ 5. – Nel presente paragrafo, come applicazione della teoria esposta, riporto alcuni risultati numerici, ottenuti con il calcolatore elettronico CDC 7600.

p	v	Valore di (1)
1,001	− 2,5	0,17107500
1,001	0,5	0,69971569
1,001	19,5	− 0,01554490
1,01	− 2,5	0,16980732
1,01	0,5	0,69490435
1,01	19,5	− 0,01541254
1,1	− 2,5	0,15763431
1,1	0,5	0,64944395
1,1	19,5	− 0,01420334
2	− 2,5	0,08299723
2	0,5	0,37350182
2	19,5	− 0,00796204
10	− 2,5	0,01343741
10	0,5	0,06754027
10	19,5	− 0,00162405

p	v	Valore di (23)
1,00001	2	0,08296664
1,00001	2,5	0,17121497
1,001	− 19,5	− 0,01554490
1,001	− 0,5	− 0,69971569
1,001	0	− 0,39624127
1,001	1	0,39663751
1,001	2	0,08292998
1,001	2,5	0,17107500
1,01	− 19,5	− 0,01541254
1,01	− 0,5	− 0,69490435
1,01	0	− 0,39163507
1,01	1	0,39555142
1,01	2	0,08259061

p	ν	Valore di (23)
1,01	2,5	0,16980732
2	— 19,5	— 0,00796204
2	— 0,5	— 0,37350182
2	0	— 0,13700342
2	1	0,27400684
2	2	0,04020876
2	2,5	0,08299723
10	— 19,5	— 0,00162405
10	— 0,5	— 0,06754027
10	0	— 0,00632409
10	1	0,06324093
10	2	0,00209684
10	2,5	0,01343741

BIBLIOGRAFIA

[1] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, 1966.

[2] A. ERDÉLYI - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, McGraw-Hill, 1953.

[3] A. ERDÉLYI - W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Voll. I e II, McGraw-Hill, 1954.

[4] R. ZANOVELLO, *Analisi numerica della trasformata di Laplace della funzione di Struve* $H_\nu(x)$, Atti Acc. Sc. Torino, **113** (1979).

[5] I. S. GRADSHTEYN - I. W. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.

[6] R. ZANOVELLO, *Integrali di funzioni di Anger, Weber ed Airy-Hardy*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **58** (1977).

[7] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, 1939.

Manoscritto ricevuto in redazione il 4 giugno 1979.