

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

P. AIENA

U. OLIVERI

Operatori di Riesz generalizzati su spazi di Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 303-312

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__303_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__303_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Operatori di Riesz generalizzati su spazi di Banach.

P. AIENA - U. OLIVERI (*)

1. Un certo interesse presenta la teoria spettrale di alcune classi di operatori non autoaggiunti su spazi di Hilbert, la cui parte non reale dello spettro presenta una situazione analoga a quella dello spettro degli operatori compatti e più in generale a quello degli operatori di Riesz. Alcuni autori (M. S. Brodskii [1], M. S. Livsic [1]) hanno analizzato il problema di dare una rappresentazione spettrale ad operatori $K \in \mathcal{L}(H)$, con $\mathcal{L}(H) =$ spazio degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert H , aventi parte immaginaria $(K - K^*)/2i$ di classe traccia. Tale studio è stato ripreso e generalizzato da J. T. Schwartz [8] per operatori con parte immaginaria appartenenti alla classe degli operatori compatti di von Neumann-Schatten C_p con $p < \infty$.

Tali operatori presentano la seguente caratteristica in comune: ogni punto $a + ib$ con $b \neq 0$, dello spettro è un punto isolato che è anche polo del risolvete $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$. Tale proprietà, come è noto, caratterizza, con l'unica eccezione dello zero qualora esso appartenga allo spettro, l'intero spettro degli operatori di Riesz. È naturale allora il problema dello sviluppo di una teoria unificata che tratti le proprietà spettrali di una classe sufficientemente ampia da generalizzare gli operatori con parte immaginaria compatta e gli operatori di tipo Riesz. In tale direzione, un primo studio delle proprietà di una classe di operatori, che generalizzi quella di Riesz, è stato fatto, sempre su spazi di Hilbert, da G. Costantin ([3], [4]).

Lo scopo della presente nota è quello di estendere tale studio alla situazione più generale di operatori limitati su uno spazio di Banach,

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università di Palermo - Via Archirafi 34 - I-90123 Palermo.

ottenendo contestualmente altre proprietà spettrali, ed anche proposizioni che interessano la struttura algebrica e topologica di tale classe di operatori. Il recente volume di Heuser [6] costituirà il riferimento di questa nota per quanto riguarda la terminologia, le notazioni ed i risultati basilari.

2. Sia E uno spazio di Banach complesso. Indicheremo con $\mathcal{L}(E)$ l'algebra di Banach degli operatori (= endomorfismi) limitati su E , $\mathcal{F}(E)$ l'ideale degli operatori di rango finito, $\mathcal{K}(E)$ l'ideale chiuso degli operatori compatti. Denoteremo rispettivamente con $N(K)$ e $K(E)$ il nucleo ed il range dell'operatore K e chiameremo « difetti » i numeri:

$$\alpha(K) = \dim N(K), \quad \beta(K) = \text{codim } K(E).$$

Un operatore limitato K su uno spazio normato E dicesi di Fredholm se ha difetti finiti, range chiuso e $K(A)$ è aperto per ogni aperto A di E . In uno spazio di Banach, come è ben noto, un operatore è di Fredholm se e solo se $\alpha(K) < \infty$, $\beta(K) < \infty$.

Consideriamo le seguenti catene:

- 1) $N(K) \subseteq N(K^2) \subseteq \dots \subseteq N(K^n) \subseteq \dots$,
- 2) $K(E) \supseteq K^2(E) \supseteq \dots \supseteq K^n(E) \supseteq \dots$.

È semplice verificare che $N(K^{n_0}) = N(K^{n_0+1})$ implica che $N(K^{n_0+n}) = N(K^{n_0})$, $\forall n = 1, 2, \dots$; similmente per la catena dei range.

Indicheremo, se esistono, con p e q i più piccoli naturali per cui $N(K^p) = N(K^{p+1})$ e $K^q(E) = K^{q+1}(E)$.

Un operatore dicesi di catene finite se ambedue le catene si fermano da un certo posto in poi, in tal caso i numeri p e q coincidono e sono legati ai difetti dell'operatore dalla seguente:

PROP. 2.1 (Heuser [5]). a) ogni operatore di catene finite ha difetti eguali (eventualmente infiniti).

b) se un operatore K ha difetti finiti ed una delle catene 1) e 2) ha lunghezza finita, allora K è di catene finite.

Diremo che uno scalare λ è un punto di Riesz per l'operatore $K \in \mathcal{L}(E)$, con E uno spazio normato, se per l'operatore $\lambda I - K$ sono verificate le seguenti proprietà:

- I) $\beta I - K$ è un operatore di Fredholm,
- II) $p(\lambda I - K) = q(\beta I - K) < \infty$.

Un operatore si dirà di Riesz se ogni $\lambda \neq 0$ è un punto di Riesz ed inoltre vale la seguente proprietà:

III) gli autovalori costituiscono, nel caso che non siano in un numero finito, una successione che converge a 0.

In uno spazio di Banach la I) è sufficiente a caratterizzare gli operatori di Riesz ([6], § 52). Indicheremo con $\mathcal{R}(E)$ e $\tilde{\mathcal{R}}(E)$ rispettivamente la classe degli operatori di Riesz e la classe degli operatori di Riesz generalizzati, cioè:

$\tilde{\mathcal{R}}(E) = \{K \in \mathcal{L}(E): \text{ogni } \lambda = a + ib, \text{ con } b \neq 0, \text{ è un punto di Riesz}\}.$

Naturalmente $\tilde{\mathcal{R}}(E) \supseteq \mathcal{R}(E)$ e tranne il caso in cui lo spazio è di dimensione finita, l'inclusione è in generale propria.

Abbiamo ([6], Prop. 50.3):

PROP. 2.2. λ è un punto di Riesz se e solo se λ è un punto isolato di K e la relativa proiezione spettrale

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I - K)^{-1} d\lambda$$

è un operatore di rango finito (dove Γ è un cerchio contenuto nel risolvente $\rho(K) = \mathbb{C} \setminus \sigma(K)$, $\sigma(K)$ spettro dell'operatore K , di centro λ che non contiene altro punto di $\sigma(K)$ al di fuori di λ). In tal caso λ è un polo del risolvente $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$.

Quindi $K \in \tilde{\mathcal{R}}(E)$ se e solo se ogni punto spettrale non reale è isolato e la relativa proiezione spettrale è di rango finito, ed inoltre:

PROP. 2.3 (Costantin [3]). I punti dell'insieme

$$\{\lambda: \lambda \in \sigma(K), \operatorname{Im} \lambda \neq 0\}$$

sono in un numero finito o costituiscono un insieme numerabile i cui punti si accumulazione giacciono sulla retta reale.

L'operatore $A \in \mathcal{L}(E)$ si dice di Atkinson se:

IV) almeno uno dei difetti $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ è finito.

V) A è relativamente regolare nell'algebra $\mathcal{L}(E)$, cioè $\exists B \in \mathcal{L}(E)$ tale che $ABA = A$.

L'operatore $A \in \mathfrak{L}(E)$ dicesi di semi-Fredholm se vale la IV) ed inoltre il range $A(E)$ è un sottoinsieme chiuso di E .

Analogamente a quanto succede per gli operatori di Riesz nella definizione della classe $\mathfrak{K}(E)$ si possono eliminare ridondanze (Esercizio 5, § 52, [6]) ed abbiamo:

PROP. 2.4. Un operatore $K \in \mathfrak{K}(E)$ se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, l'operatore $\lambda I - K$ è un operatore di Atkinson.

PROP. 2.5. Un operatore $K \in \mathfrak{K}(E)$ se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, $\lambda I - K$ è un operatore di semi-Fredholm.

3. Studieremo adesso la struttura algebrica e topologica della classe $\mathfrak{K}(E)$. Chiameremo « dominio di Fredholm » dell'operatore $K \in (E)$ l'insieme

$$\Phi_K \Leftrightarrow \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda I - K \text{ è un operatore di Fredholm}\}.$$

L'insieme Φ_K è un aperto di $\mathbb{C}$ ([6], Prop. 51.1) e nel caso di uno spazio di Banach di dimensione infinita è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{C}$. Un ideale bilaterale $\mathcal{F}$ di $\mathfrak{L}(E)$ dicesi un Φ -ideale se

$$\text{VII) } \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}(E),$$

$$\text{VIII) } \lambda I - K \text{ è un operatore di Fredholm, } \forall K \in \mathcal{F}.$$

Consideriamo il caso $\dim E = +\infty$ (diversamente ogni Φ -ideale coincide con l'intera algebra $\mathfrak{L}(E)$) e supponiamo $\mathcal{F}$ chiuso (ipotesi lecita perchè la chiusura di un Φ -ideale è ancora tale).

L'algebra quoziente $\hat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(E)/\mathcal{F}$ è un'algebra di Banach e risulta (Heuser [6], Prop. 51.6):

PROP. 3.1. Sia $A \in \mathfrak{L}(E)$. A è un operatore di Fredholm se e solo se la classe resto $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{L}}$ è invertibile.

Quest'ultimo fatto ci permette di caratterizzare fortemente la classe $\mathfrak{K}(E)$, infatti:

PROP. 3.2. Sia $K \in \mathfrak{L}(E)$. L'operatore $K \in \mathfrak{K}(E)$ se e solo se $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Prop. 3.1 $\lambda \hat{I} - \hat{K}$ è invertibile $\Leftrightarrow \lambda I - K$ è di Fredholm, sicchè $\Phi_K = \varrho(\hat{K})$. Sia $\text{Im } \mathbb{C} = \{\lambda = a + ib: b \neq 0\}$. Se $K \in \mathfrak{K}(E)$, $\text{Im } \mathbb{C} \subseteq \Phi_K = \varrho(K)$. Allora se $\lambda \in \sigma(K)$ certamente $\lambda \notin \text{Im } \mathbb{C}$

quindi $\sigma(\hat{K}) \subset \mathbb{R}$. Viceversa sia $\sigma(\hat{K}) \subset \mathbb{R}$ e λ_0 un complesso non reale, per ipotesi quindi $\lambda_0 \in \varrho(K) = \Phi_K$, ovvero $\text{Im } \mathbb{C} \subseteq \Phi_K$: L'insieme Φ_K ha la proprietà che in ogni sua componente connessa aperta massimale A risulta:

$$p(\lambda I - K) < \infty, \quad \forall \lambda \in A$$

oppure

$$q(\lambda I - K) = \infty, \quad \forall \lambda \in A \text{ ([6], Prop. 51.3)}.$$

Ora, poichè $\text{Im } \mathbb{C}$ è parte della stessa componente di Φ_K che contiene $\varrho(K)$ ed inoltre per ogni $\lambda \in \varrho(K)$ risulta banalmente $p(\lambda I - K) = 0$, segue che si ha $p(\lambda_0 I - K) < \infty$, $\forall \lambda_0 \in \text{Im } \mathbb{C}$. Per la b) della Prop. 2.1 risulta infine $q(\lambda_0 I - K) < \infty$ ovvero λ_0 è un punto di Riesz.

La somma di due operatori di Riesz generalizzati in genere non è ancora tale come mostra il seguente

ESEMPIO. Sia $E = l^1$, $K_1, K_2 \in \mathfrak{L}(l^1)$ siano rappresentati rispettivamente dalle matrici (a_{ij}) e (b_{ij}) dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1/i & \text{per } i = j, \\ 1 & \text{per } i = j + 1, i \text{ pari}, \\ 0 & \text{altrove}, \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} -1/i & \text{per } i = j, \\ 1 & \text{quando } i = j + 1 \text{ ed } i \text{ dispari}, \\ 0 & \text{altrove}. \end{cases}$$

La matrice relativa all'operatore $K_1 + K_2$ è la seguente:

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{per } i = j + 1, \\ 0 & \text{altrove}. \end{cases}$$

Ora, gli operatori K_1 e $K_2 \in \mathfrak{R}(E)$ (vedi S. R. Caradus [2]) e quindi appartengono a $\tilde{\mathfrak{K}}(E)$. Lo spettro $\sigma(K_1 + K_2)$ è invece costituito dal disco $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1\}$ quindi $K_1 + K_2 \notin \tilde{\mathfrak{K}}(E)$.

Una semplice modifica di un altro esempio considerato in [2] ci dà un esempio di operatori di Riesz generalizzati il cui prodotto non

è più tale. Consideriamo l'operatore $K_3 \in \mathcal{L}(l^1)$ di matrice

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j, i \text{ pari,} \\ (i-1)/i & \text{per } i = j-1, i \text{ pari,} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

L'operatore K_3 è di Riesz e risulta $\alpha(I - K_3 K_1) = +\infty$.

Se $\lambda_0 \in \text{Im } \mathbb{C}$, l'operatore $K = \lambda_0 K_3$ è di Riesz e $\alpha(\lambda_0 I - K K_1) = \alpha[\lambda_0(I - K_3 K_1)] = \alpha(I - K_3 K_1) = +\infty$, quindi λ_0 non è punto di Riesz per l'operatore $K \cdot K_1$.

La struttura di Φ -ideale ci permette di studiare agevolmente alcune proprietà di $\tilde{\mathcal{K}}(E)$.

PROP. 3.3. I) Siano $K_1, K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$ e $K_1 \cdot K_2 \in \mathcal{F}$ (o anche $K_2 \cdot K_1 \in \mathcal{F}$) allora

$$K_1 + K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}(E).$$

II) Se $K_1, K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$ e $K_1 + K_2 \in \mathcal{F}$ allora

$$K_1 \cdot K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}(E).$$

III) Se $\dim E = +\infty$, $K \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$,

$$\alpha K \in \tilde{\mathcal{K}}(E) \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha \neq 0).$$

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi I) $\hat{K}_1 \cdot \hat{K}_2 = \hat{0}$; ora se $\lambda_0 \in \text{Im } \mathbb{C}$ gli operatori $\lambda_0 I - K_1$ e $\lambda_0 I - K_2$ sono di Fredholm; essendo la classe degli operatori di Fredholm un semigrupp moltiplicativo risulta

$$(\lambda_0 I - K_1) \cdot (\lambda_0 I - K_2) = \lambda_0 [\lambda_0 I - (K_1 + K_2) + K_1 K_2]$$

ancora di Fredholm, quindi

$$\overbrace{\lambda_0 I - (K_1 + K_2) + K_1 K_2} = \lambda_0 \hat{I} - \widehat{K_1 + K_2}$$

è invertibile per la Prop. 3.1, sicchè $\lambda_0 \notin \sigma(K_1 + K_2)$ e per la Prop. 3.2 l'operatore $K_1 + K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$.

La dimostrazione è analoga per la II) ove si tenga conto questa volta che $\widehat{K_1 + K_2} = \hat{0}$. La III) segue banalmente dal teorema spettrale.

Proviamo adesso alcuni risultati su successioni di $\tilde{\mathcal{K}}(E)$. Utilizzeremo a tal scopo alcuni risultati di Newburgh [7] su spazi di Banach premettendo sin d'adesso che la convergenza è intesa nel senso della topologia uniforme. Per « distanza di Hausdorff » tra due sottoinsiemi chiusi A e B di C si intende il numero:

$$\delta(A, B) = \max \left(\sup_{a \in A} \delta(a, B), \sup_{b \in B} \delta(b, A) \right)$$

dove $\delta(a, B) = \inf_{b \in B} |a - b|$ e $\delta(b, A) = \inf_{a \in A} |a - b|$.

LEMMA 3.1 (Newburgh). Se E è un'algebra di Banach ed (x_n) è una successione che converge ad x tale che $x_n \cdot x = x \cdot x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) allora $\sigma(x_n)$ converge a $\sigma(x)$ nella metrica di Hausdorff.

PROP. 3.4. Supponiamo che (K_n) sia una successione di $\tilde{\mathcal{K}}(E)$ che converga a K , inoltre K_n e K siano Φ -commutabili (cioè $K_n K - K \cdot K_n \in \mathfrak{J}$). Abbiamo allora che $K \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi $\hat{K}_n \hat{K} = \hat{K} \hat{K}_n$, inoltre $\|\hat{K}_n - \hat{K}\| \leq \|K_n - K\|$ ci assicura che $\hat{K}_n \Rightarrow \hat{K}$, per il lemma precedente segue che $\sigma(K_n) \Rightarrow \sigma(K)$ nella metrica di Hausdorff, cioè $\sigma(\hat{K})$ è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.

COROLLARIO. Se $(K_n) \subset \tilde{\mathcal{K}}(E)$ converge a K e $K_n K = K K_n$ ($n = 1, 2, \dots$) risulta $K \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$.

OSSERV. In [4] è stato provato che se $f(\lambda)$ è una funzione analitica in una regione che contiene $\sigma(K)$, $K \in \mathfrak{L}(E)$, ed inoltre per $\lambda_0 \in \text{Im } \mathbf{C}$ risulta $f(\lambda_0) \in \text{Im } \mathbf{C}$, allora $f(K) \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$ implica $K \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$.

È vera anche la proprietà seguente:

PROP. 3.5. Sia f una funzione analitica su una regione contenente $\sigma(K)$, tale che $f(\mu) \in \mathbf{R}$, $\forall \mu \in R$, allora se $K \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$ anche $f(K) \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo solamente il caso $\dim E = +\infty$. Poichè $\varrho(K) \supset \varrho(\hat{K})$, se $\lambda \in \varrho(K)$ risulta

$$R_\lambda = (\widehat{\lambda I - K})^{-1} = (\lambda \hat{I} - \hat{K})^{-1}.$$

L'omomorfismo canonico $\mathfrak{L}(E) \rightarrow \mathfrak{L}(E)/\mathfrak{J}$ come è noto è continuo,

quindi per le regole del calcolo in $\mathfrak{L}(E)$ abbiamo

$$(a) \quad f(\hat{K}) = \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_{\lambda} d\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \hat{R}_{\lambda} d\lambda$$

dove Γ è una curva contenuta in $\varrho(K)$ il cui interno contiene $\sigma(K)$.

Essendo $\sigma(\hat{K}) \subseteq \sigma(K)$, $f(\lambda)$ è ancora analitica in una regione contenente $\sigma(\hat{K})$, segue allora che l'ultima della (o) coincide con $f(\hat{K})$.

Se $K \in \mathfrak{K}(E)$, $\sigma(K)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e per il teorema spettrale $\sigma(\widehat{f(K)}) = \sigma(f(\hat{K})) = f(\sigma(K)) \subset \mathbb{R}$, cioè $f(K) \in \mathfrak{K}(E)$.

Confrontando l'osservazione precedente con l'ultima proposizione dimostrata abbiamo:

COROLLARIO 3.2. $K \in \mathfrak{K}(E) \Leftrightarrow K^{2n-1} \in \mathfrak{K}(E)$, $n = 1, 2, \dots$

COROLLARIO 3.3. $K \in \mathfrak{K}(E) \Leftrightarrow e^K \in \mathfrak{K}(E)$.

Sia $K \in \mathfrak{K}(E)$ e poniamo $\sigma_i(K) = \sigma(K) \cap \text{Im } \mathbb{C}$. Nella Prop. 2.3 abbiamo visto come $\sigma_i(K)$ sia un insieme numerabile; supponiamo che esso non sia finito (diversamente, considerando in quel che segue le somme in senso finito le proposizioni continueranno ad essere vere) e che $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ sia un ordinamento di esso. Indichiamo infine con P_j la proiezione spettrale relativa al punto λ_j e supponiamo infine che l'ordinamento prescelto sia tale che $\sum_{j=1}^{\infty} K P_j$ converga nella topologia uniforme. In [3] è stato provato che se $\sigma(K)$ è totalmente sconnesso allora $K = C + S$ con $C \in K(E)$, $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$, $C \cdot S = S \cdot C = 0$. Vogliamo dimostrare come tale proprietà di decomposizione sia ancora vera se non si fa alcuna ipotesi su $\sigma(K)$, ottenendo così anche una generalizzazione di un risultato di T. T. West ([9], Teor. 3.2).

LEMMA 3.2. Sia $K \in \mathfrak{K}(E)$, $C_n = \sum_{j=1}^n K P_j$, $S_n = K - C_n$. Abbiamo:

$$\text{I) } \sigma_i(C_n) = (\lambda_j)_{j=1}^n, \sigma_i(S_n) = (\lambda_j)_{j=n+1}^{\infty}, S_n C_n = C_n S_n = 0,$$

$$\text{II) } S_n C_m = C_m S, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Per la semplice dimostrazione della I) vedere [3] (Lemma 2.2). Proviamo la II). Sono ben note le eguaglianze ([6], § 49)

$$1) P_i P_j = P_j P_i = \delta_{ij} P_j, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

$$2) K P_j = P_j K, \quad j = 1, 2, \dots$$

Utilizzando la 1) e la 2) abbiamo:

$$\begin{aligned} \left(K - \sum_{j=1}^n KP_j\right) P_h &= \left(I - \sum_{j=1}^n P_j\right) KP_h = \\ &= P_h \left(I - \sum_{j=1}^n P_j\right) K = P_h \left(I - \sum_{j=1}^n KP_j\right), \end{aligned}$$

cioè

$$3) S_n P_h = P_h S_n \quad n, h = 1, 2, \dots$$

Inoltre $\left(K - \sum_{j=1}^n KP_j\right) K = K \left(K - \sum_{j=1}^n P_j K\right) = K \left(K - \sum_{j=1}^n KP_j\right)$, cioè

$$4) S_n K = K S_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Per la 3) e la 4) infine abbiamo:

$$S_n C_m = S_n \left(\sum_{j=1}^m KP_j\right) = S_n K \left(\sum_{j=1}^m P_j\right) = K \left(\sum_{j=1}^m P_j\right) S_n = C_m S_n.$$

PROP. 3.6. Sia $K \in \tilde{\mathcal{K}}(E)$. Se per qualche ordinamento $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ di $\sigma_i(K)$ la serie $\sum_{j=1}^\infty KP_j$ converge, allora:

$K = C + S$ con C operatore compatto, S operatore a spettro reale e $CS = SC = 0$.

DIMOSTRAZIONE. In [3] l'ipotesi che $\sigma(K)$ fosse totalmente sconnesso era utilizzata per provare, attraverso un lemma di Newburgh, che $\sigma(S) \subset R$.

Noi utilizzeremo il Lemma 3.1. Scelto $\varepsilon > 0$, per la Prop. 2.3 esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che: $|\operatorname{Im} \lambda_j| \leq \varepsilon, \forall j \geq n$. Sia $C_n = \sum_{j=1}^n KP_j$, $S_n = K - C_n$, per il lemma precedente abbiamo che $\sigma(S_n) \subset \{\lambda \in C: |\operatorname{Im} \lambda| \leq \varepsilon\}$. Sicchè al tendere di ε a 0, gli insiemi $\sigma(S_n)$ tendono nella metrica di Hausdorff ad un sottoinsieme della retta reale.

Per ipotesi la successione $\{C_n\}$ converge all'operatore $C = \sum_{j=1}^\infty KP_j$, che è compatto in quanto limite di operatori di rango finito. Quindi $S_n = K - C_n$ converge a $S = K - C$. Essendo per il lemma precedente $S_n C_m = C_m S_n$, segue che $S_n C = C S_n$ e quindi $S_n S = S S_n$. Per il Lemma 3.1 abbiamo infine che $\sigma(S_n) \rightarrow \sigma(S)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. S. LIVSIC, *Spectral analysis of non self-adjoint operators and intermediate systems*, Amer. Math. Soc. Transl., (2), **13** (1960), pp. 265-346.
- [2] S. R. CARADUS, *Operators of Riesz type*, Pacific J. Math., **18** (1966), pp. 61-71.
- [3] G. COSTANTIN, *On a generalization of Riesz operators, I*, Atti dell'Accademia dei Lincei, Rend. Sc. Fis. mat. e nat., **56** (1974), pp. 495-499.
- [4] G. COSTANTIN, *On a generalization of Riesz operators, II*, Atti dell'Accademia dei Lincei, Rend. Sc. Fis. mat. e nat., **56** (1974), pp. 684-687.
- [5] H. HEUSER, *Über operatoren endliche defekten*, Inaug. Diss. Tübingen (1956).
- [6] H. HEUSER, *Funktionalanalysis*, ed. B. G. Teubner, Stuttgart (1975).
- [7] J. D. NEWBURGH, *The variation of spectra*, Duke Math. J., **18** (1951), pp. 165-176.
- [8] J. T. SCHWARTZ, *Subdiagonalization of operators in Hilbert space with compact imaginary part*, Comm. Pure and App. Math., **15** (1962), pp. 159-172.
- [9] T. T. WEST, *The decomposition of Riesz operators*, Proc. London Math. Soc., **16** (1966), pp. 737-752.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 dicembre 1978.