

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Un'applicazione del teorema del grafico chiuso
alla risolubilità di sistemi differenziali del
tipo : $Pu = f, Qu = 0$**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 125-132

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__125_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__125_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**Un'applicazione del teorema del grafico chiuso
alla risolubilità di sistemi differenziali
del tipo: $Pu = f, Qu = 0$.**

GIULIANO BRATTI (*)

0. In ciò che segue è contenuto un criterio per la risolubilità, « in grande » del sistema differenziale:

$$Pu = f, \quad Qu = 0,$$

f e u di classe $C^\infty(A)$, A un aperto di R^n ; P e Q operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro, con Q ellittico, (il caso in cui P e Q non sono primi tra di loro, ovviamente con P non multiplo di Q , è trattabile in modo analogo).

In [1] è presente un criterio algebrico-topologico per la risolubilità del sistema di sopra; il criterio qui esposto, (Teorema 7), è, (probabilmente), più facile di quello ed ha il pregio di essere la naturale estensione del Teorema 4, Cap. I, di [4].

I. Al fine di questo articolo sono interessanti i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. Sia E uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; sia F un suo sottospazio lineare e sia A un aperto convesso in E tale che: $A \cap F = \emptyset$. Allora: esiste un iperpiano chiuso, H , in E tale che:

$$A \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad F \subseteq H.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 7 - I-35100 Padova.

(Il teorema di sopra è conosciuto come « la forma geometrica » del teorema di Hahn-Banach.)

TEOREMA 2. Siano E ed F spazi di Fréchet e sia f un'applicazione lineare e continua di E in F . Siano E' ed F' i duali di E ed F rispettivamente; ${}^t f$ sia la trasposta di f .

Le seguenti proposizioni, $a)$ e $b)$, sono equivalenti:

$a)$ f è suriettiva;

$b)$ ${}^t f$ è iniettiva e ${}^t f(F')$ è debolmente chiuso in E' .

TEOREMA 3. Siano E ed F spazi di Fréchet o duali forti di spazi di Fréchet riflessivi.

Se f è un'applicazione lineare di E in F , f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso in $E \times F$.

(Il teorema di sopra, e altro, va sotto il nome di teorema del grafico chiuso.)

2. Sia A un aperto di R^n e sia Z_A la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di A : R^n/A .

Sia $L = A \cup Z_A$; L è un aperto, [5]; sia K un compatto di L .

DEFINIZIONE 1. Se $Z_A \neq \emptyset$, K separa Z_A se e solo se: esiste una partizione di Z_A del tipo $Z_A = Z_{1,A} \cup Z_{2,A}$, con $Z_{1,A} \neq \emptyset$, ed esiste un aperto $B \subseteq L$, tale che:

$$Z_{1,A} \subseteq K \subset B \quad \text{e} \quad Z_{2,A} \cap B = \emptyset.$$

DEFINIZIONE 2. A soddisfa la b -proprietà se e solo se: o $Z_A = \emptyset$, oppure: non esiste alcun compatto K in L che separi Z_A .

L'ultima definizione nasce da un teorema « di densità » per sistemi del tipo:

$$Pu = f, \quad Qu = 0,$$

f ed u di classe $C^\infty(A)$.

Si ha, infatti, [1]:

TEOREMA 4. Le seguenti proposizioni, $a)$ e $b)$, sono equivalenti:

$a)$ A soddisfa la b -proprietà;

b) per ogni coppia, (P, Q) , di operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro, con Q ellittico, si ha:

se $\text{Ker } Q/A = \{f \in C^\infty(A) : Qf = 0\}$,

$P(\text{Ker } Q/A)$ è $C^\infty(A)$ denso in $\text{Ker } Q/A$.

Dal punto di vista topologico la *b*-proprietà enunciata nella Definizione 2 è piuttosto complicata; eccone una caratterizzazione, in termini di operatori differenziali, che la pone in miglior luce.

TEOREMA 5. Le seguenti proposizioni, *a)* e *b)*, sono equivalenti:

a) A soddisfa la *b*-proprietà;

b) per ogni operatore ellittico Q si ha: se $m \in E'(R^n)$ e $Qm \in E'(A)$ allora: $m \in E'(A)$.

Il Teorema 5 ha essenzialmente la stessa dimostrazione del Teorema 4.

Si osservi come la proposizione in *b)* dell'ultimo teorema dimostri facilmente che $\text{Ker } Q/R^n$ è $C^\infty(A)$ denso in $\text{Ker } Q/A$. Infatti: se $m \in E'(A)$ ed m è ortogonale a $\text{Ker } Q/R^n$, in base ai Lemmi 3.4.1 e 3.4.2 di [3], pagg. 77-78, si ha: $m = {}^tQn$, con n in $E'(R^n)$ e dunque n in $E'(A)$.

In base alla Prop. 8, Cap. III di [4], si ricava allora che: A soddisfa la *b*-proprietà se e solo se: $Z_A = \emptyset$.

3. Si consideri il sistema:

$$Pu = f, \quad Qu = 0,$$

f in $C^\infty(A)$.

Ovvio che la condizione di compatibilità del sistema è che: Qf sia zero. Se si vuol studiare la risolubilità, in $C^\infty(A)$, del sistema di sopra, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$, è, in base al Teorema 4, in generale necessario che: Z_A sia vuoto, (l'A. ignora se tale condizione sia necessaria in ogni caso per avere: $P(\text{Ker } Q/A) = \text{Ker } Q/A$).

Sia tP il trasposto dell'operatore P ; $E'(A)$ lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto in A .

TEOREMA 6. Sia A un aperto di R^n con $Z_A = \emptyset$.

Le seguenti proposizioni, *a* e *b)*, sono equivalenti:

a) $P(\text{Ker } Q/A) = \text{Ker } Q/A$;

b) ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ è chiuso in $E'(A)$

DIMOSTRAZIONE. ${}^tP: (\text{Ker } Q/A)' \rightarrow (\text{Ker } Q/A)'$ è evidentemente iniettiva, visto che: se $m \in (\text{Ker } Q/A)'$, (m è la restrizione a $\text{Ker } Q/A$ di una distribuzione a supporto compatto in A), e se ${}^tPm = 0$ su $\text{Ker } Q/A$, allora deve essere: ${}^tPm = {}^tQn$, con n in $E'(R^n)$. Poichè P e Q sono primi tra di loro si ha: $m = {}^tQn_1$ e deve essere n_1 in $E'(A)$.

Sia m_j una rete di distribuzioni in $E'(A)$ tale che: tPm_j converge, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$, verso $m_0 \in E'(A)$. Ovvio che m_0 risulta ortogonale a $\text{Ker } P/A \wedge \text{Ker } Q/A$. Dimostriamo che m_0 è in ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$.

Infatti: in base al citato teorema di Hahn-Banach, se $m_0 \notin {}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ esiste f in $C^\infty(A)$ tale che:

$$\langle m_0, f \rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad \langle {}^tPm + {}^tQn, f \rangle = 0,$$

per ogni m e n in $E'(A)$. Assurdo.

Allora: è

$$m_0 = {}^tPm_1 + {}^tQn_1$$

e, quindi, $m_0 = {}^tPm$ su $\text{Ker } Q/A$.

Il Teorema 2 dimostra allora che è:

$$P(\text{Ker } Q/A) = \text{Ker } Q/A.$$

L'implicazione: $b)$ verso $a)$ è conclusa.

$a)$ implica $b)$.

Sia: ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ una rete in $E'(A)$ convergente verso m_0 in $E'(A)$. Allora: se $f \in \text{Ker } Q/A$, $\langle {}^tPm_j, f \rangle$ converge verso $\langle m_0, f \rangle$. Il solito Teorema dà: $m_0 = {}^tPm_1$, con m_1 in $E'(A)$, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$.

Poichè: $m_0 - {}^tPm_1$ è ortogonale a $\text{Ker } Q/A$, per il fatto che Q è ellittico e Z_A è vuoto, risulta: $m_0 - {}^tPm_1 = {}^tQn_1$, con n_1 in $E'(A)$.

Il Teorema 6 è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Per avere: $P(C^\infty(A)) = C^\infty(A)$, è necessario e sufficiente che: ${}^tP(E'(A))$ sia chiuso in $E'(A)$, (Teor. 4, Cap. I, [4]).

La proposizione in $b)$ del Teorema 6 è essenzialmente dello stesso tipo.

Sia B un sottoinsieme aperto di A .

DEFINIZIONE 3. La quaterna: (A, B, P, Q) si dice C^∞ -compatibile se e solo se: per ogni f in $C^\infty(A)$ tale che il sistema:

$$Pu = f, \quad Qu = 0$$

è C^∞ -localmente risolubile in A , (i.e.: per ogni punto p in A esiste un suo intorno, V_p , ed esiste u_p in $C^\infty(V_p)$ tale che in V_p : $Pu_p = f$ e $Qu_p = 0$), per quelle stesse f il sistema di sopra è C^∞ -risolubile in B , (i.e.: esiste u in $C^\infty(B)$ che soddisfa il sistema).

OSSERVAZIONE 2. In base ad un teorema di Lojasiewicz-Malgrange, [6], per il fatto che P e Q sono primi tra di loro, le f in $C^\infty(A)$ per cui il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è C^∞ -localmente risolubile, sono tutte e solo quelle di $\text{Ker } Q/A$; in breve: la quaterna: (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile se e solo se: $P(\text{Ker } Q/B) \supseteq \text{Ker } Q/A$.

Si ponga: $G(B) = {}^tP(E'(B)) + {}^tQ(E'(B))$; analogamente per $G(A)$. $G(B)^-$ indica la chiusura, in $E'(B)$, di $G(B)$; $(G(B)^-)^0$ indica l'ortogonale, in $C^\infty(B)$, di $G(B)^-$.

È noto, (n. 3, Préliminaires di [4]), che $G(B)^-$ è il duale forte dello spazio: $C^\infty(B)/(G(B)^-)^0$, e che quest'ultimo spazio è uno spazio di Fréchet riflessivo.

Il seguente teorema è una generalizzazione del Teorema 6.

TEOREMA 7. Sia A un aperto di R^n con $Z_A = \emptyset$; B sia un sottoinsieme aperto di A .

Le seguenti proposizioni, $a)$ e $b)$, sono equivalenti:

- $a)$ la quaterna: (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile;
- $b)$ $G(B)^-$ è contenuta in $G(A)$.

DIMOSTRAZIONE.

$a)$ implica $b)$.

Sia: $G(B)'_s$ il duale debole di $G(B)$; su $\text{Ker } Q/A$ vi sia la topologia indotta da $C^\infty(A)$.

Si indichi con L la mappa: $L: \text{Ker } Q/A \rightarrow G(B)'_s$ così definita: se $f \in \text{Ker } Q/A$,

$$L(f): G(B) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle L(f) \cdot {}^tPm + {}^tQn \rangle = \langle m \cdot f \rangle.$$

L è ben definita; infatti: se: ${}^tPm_1 + {}^tQn_1 = {}^tPm_2 + {}^tQn_2$, per il fatto

che P e Q sono primi tra di loro, risulta: $m_2 = m_1 + {}^tQn_3$, sempre con n_3 in $E'(A)$.

Ovvio che L è lineare e che: $L(f) \in G(B)'$. Infatti: se la rete ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ converge a zero in $G(B)$, tenuto conto dell'ipotesi, i.e.: esiste g in $\text{Ker } Q/B$ tale che: $Pg = f$ in B , si ha:

$$\begin{aligned}\lim_j \langle L(f) \cdot {}^tPm_j + {}^tQn_j \rangle &= \langle \lim_j m_j \cdot f \rangle = \\ &= \lim_j \langle {}^tPm_j \cdot g \rangle = \lim_j \langle {}^tFm_j + {}^tQn_j \cdot g \rangle = 0.\end{aligned}$$

L è continua.

Infatti: se f_n converge a zero in $\text{Ker } Q/A$,

$$\lim_n \langle L(f_n) \cdot {}^tPm + {}^tQn \rangle = \lim_n \langle m \cdot f_n \rangle = 0.$$

Si indichi con M la mappa: $M: \text{Ker } Q/A \rightarrow (G(B)^-)'$, così definita: $M(f)$ è l'estensione per continuità a $G(B)^-$ di $L(f)$.

Su $(G(B)^-)'$ si ponga la topologia del duale forte di $G(B)^-$. Per quanto osservato prima del teorema: $(G(B)^-)'$ è $C^\infty(B)/(G(B)^-)^0$. Allora: se si prova che il grafico di M è chiuso, per il Teorema 3 M risulta continua.

Infatti: se $(f_n, M(f_n))$ converge, in $\text{Ker } Q/A \times (G(B)^-)$, verso (f_0, m_0) $L(f_n)$ che è la restrizione a $G(B)$ di $M(f_n)$ converge, su $G(B)$ ovviamente, verso $L(f_0)$ che risulta così la restrizione a $G(B)$ di m_0 . Allora:

$$M(f_0) = m_0; \quad \text{ovvero:} \quad M \text{ è continua.}$$

Sia: ${}^tM: G(B)^- \rightarrow (\text{Ker } Q/A)'_f$, la trasposta di M tra i duali forti. tM è continua; allora: se ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ converge a m_0 in $G(B)^-$,

$$\lim_j {}^tM({}^tPm_j + {}^tQn_j) = \lim_j m_j = {}^tM(m_0)$$

che è la restrizione a $\text{Ker } Q/A$ di una distribuzione a supporto compatto in A .

Ciò dimostra: tPm_j converge su $\text{Ker } Q/A$ verso m_0 e verso ${}^tP({}^tM(m_0))$. Con il solito ragionamento: $m_0 = {}^tP({}^tM(m_0) + {}^tQn_0)$ e n_0 è in $E'(A)$. L'implicazione da a) verso b) è provata.

b) implica a).

Per l'ipotesi, la mappa $M: (G(B)^-) \rightarrow (\text{Ker } Q/A)'$ così definita: se $m_0 = {}^tPm_1 + {}^tQn_1 \in G(B)^-$, $\langle M(m_0) \cdot f \rangle = \langle m_1 \cdot f \rangle$, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$,

è ben definita ed è continua non appena gli spazi hanno la topologia dei duali forti.

Infatti: se: $(({}^tPm_j + {}^tQn_j), m_j)$ converge a (m, h) in $G(B)^- \times \times (\text{Ker } Q/A)'$ risulta: tPm_j converge a tPh su ogni f di $\text{Ker } Q/A$ e converge a tPm_0 in $C^\infty(B)$ se è: $m = {}^tPm_0 + {}^tQn_0$.

Allora: ${}^tPm_0 + {}^tQn_0 = {}^tPh + {}^tQ(n_0 + n_1)$, con il solito ragionamento, mostra che il grafico di M è chiuso.

Sia:

$$\begin{aligned} {}^tM: \text{Ker } Q/A &\rightarrow (G(B)^-)'_f = \\ &= C^\infty(B)/(G(B)^-)^0 = C^\infty(B)/(\text{Ker } P/B \wedge \text{Ker } Q/B) \end{aligned}$$

la trasposta di M .

Se $f \in \text{Ker } Q/A$, ${}^tM(f)$ è soluzione del problema: $Pu = f$, $Qu = 0$ in $C^\infty(B)$. Il teorema è concluso.

OSSERVAZIONE 3. Si consideri la mappa: $(P, Q): C^\infty(A) \rightarrow C^\infty(A) \times \times C^\infty(A)$, $(P, Q)(u) = (Pu, Qu)$; ovvio che tale mappa è continua e che: se ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ è debolmente chiuso in $E'(A)$, l'immagine di quella mappa è chiusa in $C^\infty(A) \times \times C^\infty(A)$.

Infatti: la mappa (P, Q) è aperta sull'immagine così che l'immagine della (P, Q) è topologicamente ed algebricamente isomorfa a $C^\infty(A)/(\text{Ker } P/A \wedge \text{Ker } Q/A)$.

Nelle ipotesi del Teorema 6 è facile dimostrare che: $(P, Q)C^\infty(A)$ è denso in $H = ((f, g) \in C^\infty(A) \times \times C^\infty(A): Qf = Pg)$. Infatti: se $(m, n) \in E'(A) \times \times E'(A)$ è ortogonale a $(P, Q)C^\infty(A)$, risulta che: ${}^tPm + {}^tQn = 0$; per il fatto che P e Q sono primi tra di loro, risulta: $m = {}^tQn_1$, e al solito: $n_1 \in E'(A)$. Allora: $n = -{}^tPn_1$; così che:

$$(m, n)(f, g) = (n_1 \cdot Qf) - (n_1 \cdot Pg) = 0, \quad \text{se } (f, g) \in H.$$

Quanto sopra viene a dire che: il sistema: $Pu = f$, $Qu = g$, con $Pg = Qf$, è risolubile in A se e solo se lo è il sistema: $Pu = f$, $Qu = 0$, con $Qf = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BRATTI, *A density theorem about some system*, in pubblicazione in Rendiconti del Seminario Matematico di Padova.
- [2] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)* , Summa Brasiliensis Math., **3**, 6 (1954), pp. 57-121.

- [3] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag (1969).
- [4] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Annales de l'Institut Fourier, tome VI (1955 et 1956).
- [5] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*, Masson e Cie, Paris, North-Holland, Amsterdam.
- [6] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Complexes of partial differential operators*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1976).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 maggio 1978.