RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

Un modello riducibile per somma diretta d'un dato $\mathcal{A}$-modulo localmente libero, con $\mathcal{A} \in$ P.E.

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 60 (1978), p. 99-113

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__99_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 60 (1978)

Un modello riducibile per somma diretta d'un dato $\mathcal{A}$-modulo localmente libero, con $\mathcal{A} \in$ P.E.

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO (*)

RIASSUNTO - In [3] ho dimostrato che per ogni modulo proiettivo M di rango $r > 1$, sopra un dominio noetheriano A con «proprietà di estensione», ($A \in$ P.E.), generato con trascendenza > 1 sopra un corpo algebricamente chiuso, il fascio associato $\tilde{M}$ ammette un sottofascio $\overline{\mathcal{M}}'$ (qui in II.11) ad esso localmente isomorfo ed isomorfo fuori d'un certo chiuso H di cdm > 1 in $X = \operatorname{Spec}(A)$, il quale (sottofascio)ha una sezione globale che, in ogni punto x di X, compare fra i generatori liberi dei suoi elementi definiti in quel punto. Siffatto sottofascio non risulta rappresentabile in $\tilde{A}^r$, come lo è $\tilde{M}$, *non essendo* $\tilde{A}^r$ *abbastanza fine per questo scopo*, proprio perchè $A \in$ P.E., (il che comporta che se $D(H)$ indica l'aperto complementare di H in X, per ogni aperto U di X è $\Gamma(U, \tilde{A}) \cong \Gamma(U \cap D(H), \tilde{A})$ in modo naturale, ed inoltre anche $\Gamma(U, \tilde{M})$ e $\Gamma(U \cap D(H), \tilde{M})$ sono $\Gamma(U, \tilde{A})$-moduli isomorfi). Ma per la stessa relazione, $A \in$ P.E., $\overline{\mathcal{M}}'$ fornisce, nel senso detto in (III.12 e 18), un fascio isomorfo ad $\tilde{M}$ su tutto X. Nel presente lavoro, come interpretazione dei risultati ([3] e [4]) ricordati qui sopra, si dà una possibile costruzione (III.12), e la rappresentazione (III.13, (i)), d'un (pre)-fascio $\mathcal{M}^*$ di moduli isomorfo allo $\mathcal{A}_V$-modulo $\mathcal{M}_V$ delle sezioni del fibrato naturale di rango 2 sulla varietà algebrica $V = GL_3/GL_2$, ([8]), e siffatto da risultare riducibile per somma diretta (III.15-17) con un sommando libero (III.16, (i')). $\mathcal{M}^*$, che è incluso in $\mathcal{M}_V^3$, viene costruito come un funtore che, in virtù della P.E., è naturalmente isomorfo al prefascio canonico delle sezioni di $\mathcal{M}_V$. Il passaggio ai limiti induttivi fornisce alle fibre di $\mathcal{M}^*$ su certi punti x di X, germi costituiti da elementi che su questi punti non sono «definiti» (III.18).

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

I.

1). Siano A un anello commutativo con unità, ed f un elemento di A, S_f l'insieme moltiplicativo degli f^n per $n \geqslant 0$, ed $A_f = S_f^{-1}A$ l'insieme delle frazioni di A con denominatori in S_f.

Se p è un ideale primo di A ed è $S = A - p$, A_p è l'anello locale delle frazioni $S^{-1}A$ ed $m_p = pA_p$ l'ideale massimale di A_p.

Sia $X = \operatorname{Spec}(A)$ lo spettro primo di A, per ogni $f \in A$ ed ogni elemento $x \in X$ (cioè ogni ideale primo di A, che indicheremo anche con p o con p_x, in luogo di x), $f(x)$ indica la classe di f mod p in A/p, e si dice che $f(x)$ è il «*valore*» di f sul punto $x \in \operatorname{Spec}(A)$, perciò le relazioni $f(x) = 0$ ed $f \in p_x$ sono equivalenti ([7], pag. 194).

Più generalmente sia K il corpo delle frazioni di A ed f un elemento di K, si dice che f è *definito* in un punto p di X se $f \in A_p$ ed in tal caso si chiama «*valore*» di f in p l'immegine di f nel corpo $K(p) = A_p/pA_p$. Si associa così a ciascun $f \in K$ una funzione $\tilde{f}$ nell'insieme dei punti p dove f è definito, a valori nei corpi variabili $K(p)$.

Ricordiamo che gli elementi $f \in K$ dovunque definiti su X sono gli elementi di A, che è l'intersezione degli anelli locali A_p; e che se $\mathfrak{a}$ è un ideale diverso da A, l'intersezione degli ideali primi contenenti $\mathfrak{a}$ è formata degli f tali che si abbia $f^n \in \mathfrak{a}$ per un intero n almeno ([6], Es. 2.1.3).

2). Per un insieme $E \subset A$, $V(E)$ indica l'insieme degli ideali primi di A che contengono E, cioè l'insieme degli $x \in X$ tali che sia $f(x) = 0$ per ogni $f \in E$. Se $E = \{f\}$, si scrive $V(f)$ in luogo di $V(\{f\})$.

Si definisce la *topologia spettrale su* $X = \operatorname{Spec}(A)$ prendendo come chiusi gli insiemi $V(\mathfrak{a})$ per tutti gli ideali $\mathfrak{a}$ di A; e si definisce inoltre un fascio d'anelli $\mathcal{A}$ su X ponendo, per ogni aperto non vuoto $U = X - V(\mathfrak{a})$ di X, $\mathcal{A}(U) = \bigcap_{p \in U} A_p$, e per $U \supset V$, prendendo come applicazione di restrizione $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ l'applicazione identica $(\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{A}(V))$, ([6], Es. 2.1.3); si ha così uno spazio localmente anellato $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{A})$ ([7], pag. 92).

3). Sia f un elemento di A, e $D(f)$ l'insieme aperto $X - V(f)$ degli ideali primi di A che non contengono f, cioè degli $x \in X$ tali che sia $f(x) \neq 0$. Per ogni f, $D(f) \subset X$ s'identifica canonicamente con lo spettro primo $\operatorname{Spec}(A_f)$, e si verifica che i $D(f)$ per $f \in A$ formano una base $\mathcal{B}$ di aperti della topologia spettrale di X ([7], pag. 194).

Si usa perciò anche definire il fascio strutturale $\mathcal{A}$ dello spettro primo $X = \operatorname{Spec}(A)$ come il fascio d'anelli $\tilde{A}$ associato ([7], pag. 198) al seguente prefascio sulla base $\mathcal{B}$ della topologia spettrale su X ([7], pag. 74).

$$D(f) \mapsto A_f$$

essendo cioè $\mathcal{A}(D(f)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \notin V(f)} A_{\mathfrak{p}} = A_f$, con i morfismi di restrizione ϱ_V^U definiti dalle applicazioni canoniche $A_f \to A_g$, se $V = D(g) \subset \subset U = D(f)$.

Il fascio $\mathcal{A} = \tilde{A}$ si ottiene dunque prendendo per ogni aperto U di X

$$\mathcal{A}(U) = \varprojlim A_f$$

cioè il limite proiettivo degli A_f (con le applicazioni canoniche ϱ_V^W con $V \subset W \subset U$ e $V, W \in \mathcal{B}$), tali che i $D(f)$ ai quali essi corrispondono, percorrono l'insieme ordinato (dall'inclusione $\subset$) degli insiemi $D(f) \subset U$.

Si noti che, poichè è $U = X - V(\mathfrak{a})$ per qualche ideale $\mathfrak{a}$ di A, la relazione $D(f) \subset U$ cioè $X - V(f) \subset X - V(\mathfrak{a})$, equivalente alla $V(\mathfrak{a}) \subset \subset V(f)$, porge la $f^n \in \mathfrak{a}$ per qualche intero $n > 0$, perciò è $\mathcal{A}(U) = \varprojlim A_f$ per tutti gli $f \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$ o per tutti gli $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$.

4). Inoltre, poichè per ogni $x \in X$ gli intorni di x appartenenti a $\mathcal{B}$ formano un insieme cofinale (per l'$\supset$) nell'insieme filtrante decrescente $\Phi(x)$ degli intorni aperti di x, la fibra $\mathcal{A}_x = \varinjlim_{U \in \Phi(x)} \mathcal{A}(U)$ è uguale a $\varinjlim_{D(f)} A_f$ secondo l'insieme dei $D(f)$ di $\mathcal{B}$ contenenti x, e l'omomorfismo canonico del limite induttivo s'indicherà, in luogo di $\varrho_x^{D(f)}$, con ϱ_x^f. $A_f \to \mathcal{A}_x$ ($s \mapsto s_x$ per $s \in A_f$ ed $x \in D(f)$).

Si ha così l'applicazione canonica

$$\vartheta_f \colon A_f = \mathcal{A}(D(f)) \to \Gamma(D(f), \tilde{A})$$

che ad ogni $s \in A_f$ associa la sezione su $D(f)$ rappresentata dalla funzione $\tilde{s} \colon D(f) \to \tilde{A}$, definita da $x \mapsto \varrho_x^f(s)$; cioè l'elemento $s \in A_f$, *per ogni* $x \in D(f)$ *individua, mediante la sua immagine canonica in* $\mathcal{A}_x$, *il «germe»* $(\vartheta_f(s))_x$ *di una sezione di* $\tilde{A}$ *su* x.

Infine ogni fibra $\mathcal{A}_x$ s'identifica con l'anello A_x, diciamola l'anello puntuale su x, ed è evidentemente il sottoanello di K riunione dei

diversi $\mathcal{A}(U)$ per $U \ni p$, e quindi l'anello locale A_p ([6], pag. 125; [7], pag. 198).

5). Notiamo qui che se l'anello A verifica la *proprietà di estensione* ($A \in$ P.E.), cioè ([2], pag. 233), se per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di altezza > 1 in A, nel corpo totale K delle frazioni di A risulta

$$\bigcap_{p \not\supset \mathfrak{a}} A_p = A$$

l'intersezione essendo presa sopra tutti gli ideali primi p di A che non contengono $\mathfrak{a}$, allora è anche

$$\bigcap_{f \in \mathfrak{a}} A_f = \bigcap_{p \not\supset \mathfrak{a}} A_p = A \, .$$

Infatti $p \not\supset \mathfrak{a}$ implica che p non contiene qualche f di $\mathfrak{a}$, e allora da $f \notin p$ segue $A_f \subset A_p$, perciò per ogni $p \not\supset \mathfrak{a}$ esistono degli $A_f \subset A_p$ con $f \in \mathfrak{a}$, e ciò implica

$$\bigcap_{f \in \mathfrak{a}} A_f \subset \bigcap_{p \not\supset \mathfrak{a}} A_p = A \subset \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} A_f \, .$$

Se ne deduce che se $A \in$ P.E., ed è $h(\mathfrak{a}) > 1$ in A, allora $\varprojlim_{f \in \mathfrak{a}} A_f$ è canonicamente isomorfo ad A; perciò, posto $X - V(\mathfrak{a}) = U$, poichè è $\mathfrak{a} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{a}$, è anche $\mathcal{A}(U) = A$.

Inoltre si verifica che se $A \in$ P.E., anche $A_f \in$ P.E. per ogni $f \in A$, diciamo perciò anche che $\tilde{A} \in$ P.E.; e comporta che per ogni coppia di aperti $U' \subset U$, tali che sia $U' = U \cap (X - V(\mathfrak{a}))$ con $h(\mathfrak{a}) > 1$ (nel qual caso diciamo che U' è un aperto *ammissibile* in U), l'applicazione di restrizione $\Gamma(U, \tilde{A}) \to \Gamma(U', \tilde{A})$ è non solo iniettiva ma anche suriettiva.

6). Sia ora M un modulo su A, ed $\tilde{M}$ il fascio associato ad M, cioè lo $\tilde{A}$-modulo [(6], pag. 127) associato al prefascio

$$D(f) \mapsto M_f = S_f^{-1} M \, .$$

Lo A_x-modulo M_x s'identifica canonicamente col limite induttivo $\varinjlim M_f = \tilde{M}_x$ relativamente alla famiglia d'omomorfismi $M_f \to M_g$ se $\overrightarrow{D(g)} \subset D(f)$; e s'indicherà con ϱ_x^f: $M_f \to \tilde{M}_x$ l'omomorfismo canonico

per $f \in A - p_x$ (o, il che è lo stesso, $x \in D(f)$). Infine il fascio $\tilde{M}_f$ associato allo A_f-modulo M_f s'identifica canonicamente con la restrizione $\tilde{M}|D(f)$ ([7], pag. 198).

Si dimostra che per ogni A-modulo M ed ogni $f \in A$, l'omomorfismo

$$\vartheta_f\colon\ M_f \to \Gamma(D(f), \tilde{M})$$

è biiettivo (cioè il prefascio $D(f) \mapsto M_f$ è un fascio), ed è un isomorfismo di moduli, potendo identificare, tramite ϑ_f (n. 2), A_f con $\Gamma(D(f), \tilde{A})$. In particolare M s'identifica con $\Gamma(X, \tilde{M})$.

II.

7). Consideriamo ora l'anello

$$A = K[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)\,,$$

il quale è un dominio d'integrità noetheriano, e perciò commutativo e con unità, ed inoltre soddisfa alla proprietà di estensione.

Sia M il sottomodulo di A^2 generato sopra A da

$$m_1 = (-x_2, -x_3)\,, \qquad m_2 = (x_1, 0)\,, \qquad m_3 = (0, x_1)\,,$$

e siano $\mathcal{A} = \tilde{A}$ il fascio strutturale dello spettro primo $X = \operatorname{Spec}(A)$, ed $\mathcal{M} = \tilde{M}$ il fascio associato ad M (I, n. 6)).

Poichè è $\sum_{i=1}^{3} x_i m_i = 0$, e $\{D(x_1), D(x_2), D(x_3)\}$ è un ricoprimento di X, $\mathcal{M}$ è un $\mathcal{A}$-modulo localmente libero, e perciò, poichè $\mathcal{M} = \tilde{M}$, $\mathcal{M} \in$ $\in$ P.E. ([1], pag. 53), cioè per ogni coppia di aperti $U' \subset U$ con U' ammissibile in U, l'applicazione di restrizione $\Gamma(U, \mathcal{M}) \to \Gamma(U', \mathcal{M})$ è biiettiva.

Indichiamo con $H = V(\bar{x})$ il chiuso, nello spazio X, dell'ideale $\bar{x} = \langle x_2, x_3 \rangle$ di A, di altezza > 1 in A, diremo che H ha $cdm > 1$ in X; e consideriamo il modulo $M_{\bar{x}}$ sopra l'anello puntuale $A_{\bar{x}}$. Sia $\overline{M}$ il sottomodulo di $M_{\bar{x}}$ generato sopra $A_{\bar{x}}$ da $m_2 = (x_1, 0)$ ed $\overline{m}_3 =$ $= (x_3/x_1)(0, x_1)$, e sull'intorno $D(x_1)$ di $\bar{x}$ sia $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}$ il sotto-$(\mathcal{A}|D(x_1))$-modulo di $\mathcal{M}|D(x_1)$ associato ad $\overline{M}$, cosicchè $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})\bar{x}} = \overline{M}$, ed esiste

un isomorfismo di $\mathcal{A}|D(x_1)$-moduli

$$\varepsilon_{\bar{x}}\colon \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})} \to \mathcal{M}|D(x_1)$$

definito da $m_2 \mapsto m_2$, $\overline{m}_3 \mapsto m_3$.

Poichè $H \subset D(x_1)$, $\{D(H) = X - V(\bar{x}), D(x_1)\}$ è un ricoprimento di X, ed i fasci $\mathcal{M}|D(H)$ ed $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}$, con l'isomorfismo di transizione

$$\vartheta = \varepsilon_{\bar{x}}^{-1}|D(H) \cap D(x_1)\colon \mathcal{M}|D(H) \cap D(x_1) \to \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}|D(H) \cap D(x_1)\,,$$

individuano, per incollamento, un fascio $\mathcal{M}'$.

8). Qui e nel seg. n. 9). diamo la *costruzione d'un isomorfismo* $\psi\colon \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

Per $\mathcal{M}'$ si può prendere il fascio che si ottiene per completamento ([10], pag. 325) dal prefascio F costruito come segue:

$$U \mapsto F(U) = \Gamma(U, \mathcal{M}) \text{ se } U \subset D(H),$$

$$U' \mapsto F(U') = \Gamma(U', \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}) \text{ se } U' \not\subset D(H) \text{ e } U' \subset D(x_1),$$

$$U'' \mapsto F(U'') = \{a_2 m_2\} \text{ con } a_2 \in \Gamma(U'', \mathcal{A}) \text{ se } U'' \not\subset D(H) \text{ e } U'' \not\subset D(x_1);$$

con le restrizioni $\varrho_U^{U'}$ definite per le coppie U, U' con $U \subset D(H) \cap \cap D(x_1)$ ed $U \subset U'$, da $m_2 \mapsto m_2$ ed $\overline{m}_3 \mapsto m_3$, e per tutte le altre coppie di aperti, $U \subset U'$, dalle iniezioni canoniche.

Poichè anche ogni aperto del tipo U'' può ottenersi come $U'' = (U'' \cap D(H)) \cup (U'' \cap D(x_1))$, cioè come $U \cup U'$, le restrizioni ϱ, sopra definite per F, forniscono condizioni di compatibilità per le famiglie di elementi di F sugli aperti di X, in accordo con la funzione di transizione ϑ che definisce $\mathcal{M}'$, e che lo rende perciò un fascio di famiglie compatibili per F.

Il completamento $\hat{F}$ di F è dunque un fascio di sezioni isomorfo ad $\mathcal{M}'$.

9). Inoltre $\hat{F}$ è isomorfo ad $\mathcal{M}$ per il seguente isomorfismo funtoriale:

$$\psi_U = \text{id.}\colon \hat{F}(U) \to \Gamma(U, \mathcal{M})\,, \qquad \text{per } U \subset D(H)\,,$$

$$\psi_{U'}\colon \qquad \hat{F}(U') \to \Gamma(U', \mathcal{M})\,,$$

costruito tramite l'isomorfismo $F(U') = \Gamma(U', \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}) \to \Gamma(U', \mathcal{M})$ definito da $m_2 \mapsto m_2$, $\overline{m}_3 \mapsto m_3$, insieme con l'omomorfismo canonico del limite induttivo $F(U') \xrightarrow{\varrho} \hat{F}(U')$, che qui è biiettivo, per $U' \not\subset D(H)$ e $U' \subset D(x_1)$,

$$\psi_{U''}\colon \hat{F}(U'') \to \Gamma(U'', \mathcal{M}) ,$$

definito da $\xi \mapsto \psi_{U''}(\xi)$, dove $\psi_{U''}(\xi)$ è l'immagine nell'isomorfismo

$$\Gamma(U'' \cap D(H), \mathcal{M}) \cong \Gamma(U'', \mathcal{M})$$

del rappresentante di ξ in $F(U'' \cap D(H))$.

Si verifica subito che questi omomorfismi ψ sono permutabili con le restrizioni di $\hat{F}$ ed $\mathcal{M}$.

In definitiva è $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

10). Esiste inoltre un'*inclusione locale di* $\mathcal{M}'$ *in* $\mathcal{M}$. Infatti osserviamo che per ogni intorno aperto V di $\bar{x}$ è $V \not\subset D(H)$ ed $F(V) \subset \Gamma(V, \mathcal{M})$; inoltre gli intorni V' di $\bar{x}$ che sono contenuti in $D(x_1)$ formano un insieme cofinale nell'insieme degli intorni V di $\bar{x}$, e per essi è $\hat{F}(V') \cong F(V') \subset \Gamma(V', \mathcal{M})$.

Perciò

$$\varinjlim_{V \ni \bar{x}} (F(V), \varrho^V_{V_1}) \cong \varinjlim_{V' \ni \bar{x}} (F(V'), \varrho^{V'}_{V'_1}) \cong \varinjlim_{V' \ni \bar{x}} (\hat{F}(V'), \hat{\varrho}^{V'}_{V'_1}) \cong$$
$$\cong \varinjlim_{V \ni \bar{x}} (\hat{F}(V), \hat{\varrho}^V_{V_1}) = \mathcal{M}'_{\bar{x}} .$$

Allora poichè le iniezioni canoniche $j_{V'}\colon F(V') \to \Gamma(V', \mathcal{M})$ formano un sistema induttivo d'applicazioni, $\mathcal{M}'_{\bar{x}}$ risulta isomorfo $(j_{\bar{x}} = \varinjlim_{V' \ni \bar{x}} j_{V'})$ ad un sottomodulo di $\mathcal{M}_{\bar{x}}$; precisamente esso risulta identificato con il sottomodulo di $\mathcal{M}_{\bar{x}}$ generato su $\mathcal{A}_{\bar{x}}$ da m_2 ed $\overline{m}_3$. Di conseguenza per ogni x di H si ha l'iniezione canonica

$$j_x = j_{\bar{x}} \otimes 1_{\mathcal{A}_x}\colon \mathcal{M}'_x \to \mathcal{M}_x .$$

Inoltre per ogni $x \in D(H)$, poichè l'insieme J degli aperti $U_j \subset D(H)$ che contengono x è cofinale nell'insieme degli aperti U di X che contengono x, e poichè per ogni $U_j \subset D(H)$ è $F(U_j) \cong \hat{F}(U_j)$, risulta

$$\mathcal{M}'_x = \varinjlim (\hat{F}(U), \hat{\varrho}^U_{U'}) \cong \varinjlim (\hat{F}(U_j), \hat{\varrho}^{U_j}_{U'_j}) \cong \varinjlim (F(U_j), \varrho^{U_j}_{U'_j})$$

ed anche

$$\mathcal{M}_x = \varinjlim (\mathcal{M}(U), \varrho^U_{U'}) \cong \varinjlim (\mathcal{M}(U_j), \varrho^{U_j}_{U'_j}),$$

avendo scritto $\mathcal{M}(U)$ per $\Gamma(U, \mathcal{M})$. Ma è $\hat{F}(U_j) = \mathcal{M}(U_j)$ per ogni $U_j \in J$, ed eguali sono le restrizioni di $\hat{F}$ ed $\mathcal{M}$ per ogni coppia $U'_j \subset U_j$ di aperti dell'insieme J, quindi $\mathcal{M}'_x$ è canonicamente isomorfo ad $\mathcal{M}_x$ per ogni $x \in D(H)$, i_x: $\mathcal{M}'_x \to \mathcal{M}_x$ associa cioè sulle due fibre i germi che ammettono lo stesso rappresentante sugli intorni U_j di x. Però gli elementi di $\mathcal{M}_x$ s'identificano con quelli di M_x (I, n. 6)) nel senso che ogni germe di $\mathcal{M}_x$ ammette un solo rappresentante nella sua classe d'equivalenza, il quale è un elemento di M_x, mentre ci sono germi di $\mathcal{M}'_x$, se $x \in D(H) \cap D(x_1)$, che contengono più elementi equivalenti.

Con j_x per $x \in H$ ed i_x per $x \in D(H)$ resta individuata un'*iniezione d'insiemi*

$$f\colon \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}'_x \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_x$$

la quale, pur essendo permutabile con le proiezioni $\pi_{\mathcal{M}'}$ e $\pi_{\mathcal{M}}$ di $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{M}$ su X ($\pi_{\mathcal{M}} \cdot f = \pi_{\mathcal{M}'}$), non induce un omomorfismo fra i fasci $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{M}$ perchè non è aperta (non è un morfismo per gli spazi étalés in X attaccati ai fasci).

11). Consideriamo la parte $S = f\left(\bigcup_{x \in X} \mathcal{M}'_x\right)$ di $\bigcup_{x \in X} \mathcal{M}_x$ ed il sottofascio $\overline{\mathcal{M}}'$ di $\mathcal{M}$ definito dall'insieme delle sezioni di $\mathcal{M}$ con valori in S ([6], pag. 116), cioè lo spazio di $\overline{\mathcal{M}}'$ è costituito dall'insieme dei germi delle sezioni di $\mathcal{M}$ su X che sono contenuti in S, con la topologia relativa di $\mathcal{M}$, in modo che con la restrizione ad S della proiezione $\pi_{\mathcal{M}}$ di $\mathcal{M}$ su X, $\overline{\mathcal{M}}'$ è un fascio su X incluso canonicamente in $\mathcal{M}$.

Con le notazioni del n. 7, $\overline{\mathcal{M}}'$ può anche essere definito da: $U \mapsto \Gamma(U, \tilde{M})$, se $U \cap H = \phi$; $U \mapsto$ (il sottomodulo di $\Gamma(U, \tilde{M})$ generato da m_1 e m_2), se $U \cap H \neq \phi$; e $(U' \subset U) \mapsto$ (l'iniezione canonica dei moduli associati).

Una sezione di $\overline{\mathcal{M}}'$ è (restrizione di una) sezione di $\mathcal{M}$, e in $\overline{\mathcal{M}}'$ essa è *definita* su un punto x di X, se come sezione di $\mathcal{M}$ ha il germe su x contenuto in S.

Osserviamo che $\overline{\mathcal{M}}'$ ed $\mathcal{M}$ sono localmente isomorfi ed isomorfi sopra l'aperto $D(H)$, con $cdm(H) > 1$ in X. Inoltre in $\overline{\mathcal{M}}'$ ci sono sezioni con il dominio del tipo $U \cap D(H)$ con $U = D(f)$ per qualche

$f \in A$, diremo che siffatte sezioni di $\overline{\mathcal{M}}'$ sono *quasi ovunque ma non ovunque definite su* U, o che sono *ammissibili in* U.

Ricordiamo inoltre che c'è un isomorfismo $\Gamma(U, \mathcal{M}) \simeq \bigcap_{p \in U} M_p$ (I, n. 4)-6)), e che qui identifichiamo le sezioni di $\overline{\mathcal{M}}'$ con il loro grafico in $\mathcal{M}$, cioè con l'insieme dei loro germi sui punti dove sono definite, per $m \in \Gamma(U\ \overline{\mathcal{M}}') \subseteq \Gamma(U, \mathcal{M})$ si scriverà anche $m(U)$.

III.

12). Costruiamo ora il seguente prefascio $\mathcal{M}^*$ su X isomorfo ad $\mathcal{M}$. Sia $\mathcal{B}$ la base della topologia di X, costituita degli aperti affini $D(f)$ per $f \in A$.

Per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ poniamo $U_i = U \cap D(x_i) \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, 3$, sarà allora $U = \bigcup_{i=1,2,3} U_i$; associamo a ciascun U_i il $\Gamma(U_i, \mathcal{A})$-modulo libero $\Gamma(U_i, \overline{\mathcal{M}}')$, e formiamo con gli elementi di questi moduli le famiglie compatibili, per le restrizioni di $\overline{\mathcal{M}}'$, almeno su $U_2 \bigcup U_3 = U \cap D(H)$. Precisamente: se $U \subset D(H)$, $\Gamma(U_i, \overline{\mathcal{M}}') = \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ per $i = 1, 2, 3$, e quindi poichè $\Gamma(U_2, \mathcal{M}) \cap \Gamma(U_3, \mathcal{M}) = \Gamma(U, \mathcal{M}) \subseteq \Gamma(U_1, \mathcal{M})$, formiamo le famiglie di coppie compatibili (σ_2, σ_3), con le componenti $\sigma_2 = \varrho^U_{U_2}(\sigma)$ in $\Gamma(U_2, \mathcal{M})$ e $\sigma_3 = \varrho^U_{U_3}(\sigma)$. $\Gamma(U_3, \mathcal{M})$ con $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{M})$. Se U interseca H, formiamo invece le famiglie costituite dal massimo numero $\geqslant 2$ $\big((\sigma_2, \sigma_3)$ o $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\big)$ di elementi compatibili appartenenti ai suddetti moduli cioè con σ_2 e σ_3 come sopra e, se $\sigma \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}')$, $\sigma_1 = \varrho^U_{U_1}(\sigma)$. Per ogni U sia $\mathcal{M}^*(U)$ l'insieme delle famiglie definite come sopra; allora per $U' \subset U$ un'iniezione $\varrho^U_{U'}\colon \mathcal{M}^*(U) \to \mathcal{M}^*(U')$ è fornita dalle restrizioni naturali dei σ. Inoltre $\mathcal{M}^*(U)$ ammette una biiezione j sull'insieme delle sezioni di $\overline{\mathcal{M}}'$ che sono definite quasi ovunque su U, e precisamente definite almeno su $U \cap D(H)$.

Allora è $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}') \subseteq j(\mathcal{M}^*(U))$, l'inclusione essendo stretta se U interseca H. Esiste infine una biiezione

$$\alpha\colon \mathcal{M}^*(U) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}') = \Gamma(U \cap D(H), \mathcal{M}) \overset{\varrho}{\simeq} \Gamma(U, \mathcal{M})\ ;$$

possiamo perciò definire sull'insieme $\mathcal{M}^*(U)$ le operazioni seguenti:

$$\begin{aligned} m + m' &= \alpha^{-1}\big(\alpha(m) + \alpha(m')\big)\,, \\ s \cdot m \quad &= \alpha^{-1}\Big(\big(s|D(H)\big) \cdot \alpha(m)\Big)\,, \end{aligned}$$

per $m, m' \in \mathcal{M}^*(U)$ ed $s \in \Gamma(U, \mathcal{A})$.

Allora α diventa un isomorfismo compatibile con la restrizione canonica $\Gamma(U, \mathcal{A}) \to \Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})$ che è identica; e gli elementi di $\mathcal{M}^*(U)$ sono tutti del tipo $\alpha^{-1}(a_1 \cdot \alpha(m_1) + a_2 \cdot \alpha(m_2) + a_3 \cdot \alpha(m_3))$ con $a_i \in \Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})$.

Con queste definizioni si ottiene dunque su $\mathcal{M}^*(U)$, e quindi per trasporto anche su $j(\mathcal{M}^*(U))$, una struttura di $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo isomorfo a $\Gamma(U, \mathcal{M})$ nell'isomorfismo $\varrho \cdot \alpha$, e di conseguenza il prefascio $\mathcal{M}^*$ su X generato da $U \mapsto \mathcal{M}^*(U)$ per ogni $U \in \mathcal{B}$, con le restrizioni $\varrho^U_{U'}$ per $U, U' \in \mathcal{B}$ ed $U' \subset U$, è un fascio funtorialmente isomorfo ad $\mathcal{M}$.

13). Diamo *una rappresentazione di* $\mathcal{M}^*$.

Osserviamo intanto che, (II, n. 7) e 11)), se U interseca H, i $\Gamma(U_i, \mathcal{A})$-moduli $\Gamma(U_i, \overline{\mathcal{M}'})$, per $i = 1, 3$, sono generati, sui rispettivi anelli, dagli stessi due elementi $m_1 = (-x_2, -x_3)$ ed $m_2 = (x_1, 0)$ di $\mathcal{A}^2$, mentre $\Gamma(U_2, \overline{\mathcal{M}'})$ è generato su $\Gamma(U_2, \mathcal{A})$ da m_1 ed $m_3 = (0, x_1)$. Inoltre per $i = 2, 3$ $\Gamma(U_i, \overline{\mathcal{M}'}) = \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ perchè U_2 ed U_3 non intersecano H. Infine $\Gamma(U_i \cup U_j, \mathcal{A}) \cong \Gamma(U, \mathcal{A})$ e $\Gamma(U_i \cup U_j, \mathcal{M}) \cong \Gamma(U, \mathcal{M})$ per ogni coppia $i, j = 1, 2, 3$ perchè $\mathcal{A} \in$ P.E.; ed $\mathcal{M} \in$ P.E.

Consideriamo ora gli elementi che costituiscono $\mathcal{M}^*(U)$.

Supponiamo dapprima che U intersechi H. Allora è $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}'}) \subset \subset j(\mathcal{M}^*(U))$, (III, n. 12)), e fra gli elementi di $\mathcal{M}^*(U)$, quelli di $j^{-1}(\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}'}))$ sono tutte le famiglie compatibili su $U = \bigcup_{i=1,2,3} U_i$, perchè le famiglie compatibili, poste in $\mathcal{M}^*(U)$, con una componente in $\Gamma(U_1, \overline{\mathcal{M}'})$, sono compatibili su U, cioè hanno componenti in ogni $\Gamma(U_i, \overline{\mathcal{M}'})$, e quindi appartengono a $j^{-1}\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}'})$. Esse possono scriversi nella forma

$$(1) \qquad m = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (a_1 m_1 + a_2 m_2, a_1' m_1 + a_3' m_3, a_1 m_1 + a_2 m_2)\,,$$

con $a_1, a_2 \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, ed $a_1', a_3' \in \Gamma(U_2, \mathcal{A})$.

D'altra parte, tutte le famiglie compatibili almeno su $U_2 \cup U_3$ possono rappresentarsi con le restrizioni ad U_2 e U_3 degli elementi di $j(\mathcal{M}^*(U))$, e quindi degli elementi di $\mathcal{M}$ definiti su $U_2 \cup U_3$; siano questi $m = am_1 + bm_2 + cm_3 \mid U \cap D(H)$ con $a, b, c \in \Gamma(U, \mathcal{A})$.

Allora, tenuto conto della relazione $\sum_{i=1}^{3} x_i m_i = 0$, gli elementi di $\mathcal{M}^*(U)$ compatibili almeno su $U_2 \cup U_3$, hanno le componenti σ_2 in

$\Gamma(U_2, \mathcal{M})$, e σ_3 in $\Gamma(U_3, \mathcal{M})$ rispettivamente della forma

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} (2) \quad \sigma_2(U_2) = \big((ax_2 - bx_1)/x_2\big)m_1 + \big((cx_2 - bx_3)/x_2\big)m_3 \,, \\ (3) \quad \sigma_3(U_3) = \big((a'x_3 - c'x_1)/x_3\big)m_1 + \big((b'x_3 - c'x_2)/x_3\big)m_2 \,, \end{cases}$$

con $a, b, c, a', b', c' \in \Gamma(U, \mathcal{A})$.

La relazione di compatibilità fra le componenti (2) e (3) è espressa da $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, e inoltre per $c = hx_3$ con $h \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, si ha $\sigma_3 = (a - hx_1)m_1 + (b - hx_2)m_2$, quindi dalle (2) e (3) si ottengono, con $\sigma_1 = \sigma_3$, le rappresentazioni $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ degli elementi U-compatibili di $\mathcal{M}^*(U)$, scritti sopra in (1).

Se $U \subset D(H)$, cioè $U = U \cap D(H) = U_2 \cup U_3$, allora è $j(\mathcal{M}^*(U)) = \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}') = \Gamma(U, \mathcal{M})$, perciò l'insieme degli elementi $m = (\sigma_2, \sigma_3)$, $U_2 \cup U_3$-compatibili di $\mathcal{M}^*(U)$ coincide con $\mathcal{M}^*(U)$.

Comunque $\mathcal{M}^*(U)$, tramite la biiezione j, può identificarsi con la unione, fatta in $\Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}')$, di $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}')$ con $\Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}')$.

(Osserviamo che in effetti però, le coppie (σ_2, σ_3) delle componenti degli elementi di $\mathcal{M}^*(U)$ possono rappresentarsi con gli elementi della diagonale di $\Gamma(U, \mathcal{M})^2$, e viceversa; e che se comunque per $c \neq hx_3$ si pone $(\sigma_2, \sigma_3) = (0, \sigma_2, \sigma_3)$, e per $c = hx_3$, $(\sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ con $\sigma_1 = \sigma_3$, si ha, con le operazioni definite in $\mathcal{M}^*(U)$, (III, n. 12)), un'iniezione di $\mathcal{M}^*(U)$ in $\Gamma(U, \mathcal{M})^3$).

14). *Osservazioni.* Le operazioni introdotte al n. 12) in $\mathcal{M}^*(U)$ definiscono in ciascuna fibra $\mathcal{M}_p$ di $\mathcal{M}$ operazioni fra i germi degli elementi $m \in j(\mathcal{M}^*(U))$ definiti su p; questi germi vengono così a formare un $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo $\mathcal{M}^*(U, p)$ eguale a $\varrho_p^U(\Gamma(U, \mathcal{M}))$, (I, n. 4)), se $p \in D(H)$, ed a $\varrho_p^U(\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}'))$ se $p \in H$. Ed è $\mathcal{M}^*(U, p) \underset{\Gamma(U, \mathcal{A})}{\otimes} \mathcal{A}_p \simeq \overline{\mathcal{M}}'_p$, per ogni $p \in U$.

Inoltre poichè qui l'iniezione canonica $\Gamma(U, \mathcal{A}) \to \Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})$ è suriettiva, (I, n. 5)), ogni $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo è anche $\Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})$-modulo, e quindi, per ogni $p \in U$, $\mathcal{A}_p$ è un $\Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})$-modulo. Si può allora costruire lo $\mathcal{A}_p$-modulo

$$\Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}') \underset{\Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})}{\otimes} \mathcal{A}_p$$

che è isomorfo al modulo $\mathcal{M}_p$ di tutte le frazioni di $\Gamma(U, \mathcal{M})$ definite

su p, ed inoltre ammette un isomorfismo $j\cdot\alpha^{-1}\otimes 1_{\mathcal{A}_p}$ sullo $\mathcal{A}_p$-modulo

$$j(\mathcal{M}^*(U)) \underset{\Gamma(U,\mathcal{A})}{\otimes} \mathcal{A}_p$$

che è costituito dalle frazioni di $j(\mathcal{M}^*(U))$ con denominatore fuori di p, delle quali solo quelle provenienti dagli elementi di $\mathcal{M}^*(U)$ definiti su p sono *definite su* p.

Comunque per ogni $p\in U$, tutte le frazioni di $\mathcal{M}^*(U)$ definite su p, costituiscono uno $\mathcal{A}_p$-modulo isomorfo ad $\mathcal{M}^*(U,p)\underset{\Gamma(U,\mathcal{A})}{\otimes}\mathcal{A}_p\cong\overline{\mathcal{M}}'_p$, il quale per ogni $p\in U_1\cup U_3$, è generato da m_1 ed m_2, mentre per $p\in U_2$ è generato da m_1 ed m_3.

Quindi *per ogni punto* $p\in U$, *esiste un intorno aperto* $U'\subseteq U$ *di* p *tale che tutte le componenti degli elementi di* $\mathcal{M}^*(U)$ *che sono definite su* p, *generano un* $\Gamma(U',\mathcal{A})$*-modulo libero isomorfo a* $\mathcal{M}^*(U,p)\underset{\Gamma(U',\mathcal{A})}{\otimes}\Gamma(U',\mathcal{A})$, *il quale ammette* $\Gamma(U',\mathcal{A})m_1$ *come sommando diretto.*

15). Definiamo ora, per ogni U, una relazione d'equivalenza $R(U)$ in $\mathcal{M}^*(U)$ ponendo, per $\sigma,\sigma'\in\mathcal{M}^*(U)$,

$$\sigma R(U)\sigma' \Leftrightarrow \{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma')\in\Gamma(U\cap D(H),\mathcal{A})\cdot\alpha(m_1)\},$$

cioè tramite la relazione d'equivalenza $R'(U\cap D(H))$ in $\Gamma(U\cap D(H),\overline{\mathcal{M}}')$ definita alla destra dell'implicazione.

$R(U)$ individua un $\Gamma(U,\mathcal{A})$-modulo quoziente

$$\mathcal{M}^*(U)/R(U)\cong\Gamma(U\cap D(H),\overline{\mathcal{M}}')/R'(U\cap D(H);$$

ed il nucleo dell'epimorfismo canonico $\mathcal{M}^*(U)\xrightarrow{\varphi}\mathcal{M}^*(U)/R(U)$ contiene i moduli

$$\Gamma(U,\mathcal{A})m_1,\qquad \Gamma(U,\mathcal{A})(x_2m_2+x_3m_3)\qquad \text{oltre a}\qquad \Gamma(U,\mathcal{A})\sum_{i=1}^{3}x_im_i=0;$$

esso è perciò il modulo libero $\ker(\varphi)=\Gamma(U,\mathcal{A})m_1$.

16). Costruiamo un'immagine isomorfa di $\mathcal{M}^*(U)/R(U)$.

Osserviamo perciò che ogni classe

$$[m] \in \Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}')/R'(U \cap D(H)) = \\ = \Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}')/\big(\Gamma(U \cap D(H), \mathcal{A})\big)m_1$$

contiene tutti gli elementi di $\Gamma(U \cap D(H), \overline{\mathcal{M}}')$ del tipo

$$m = \big(am_1 + (b + kx_2)m_2 + (c + kx_3)m_3\big)|U \cap D(H)$$

con b e c fissati ed a e k variabili in $\Gamma(U, \mathcal{A})$.

Le controimmagini in α^{-1} di questi elementi hanno tutte, in $\mathcal{M}^*(U)$, le componenti, (III, n. 13), (i)),

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} \sigma_2 = (a - kx_1 - bx_1/x_2)m_1 + (c - bx_3/x_2)m_3\,, \\ \sigma_3 = (a - kx_1 - cx_1/x_3)m_1 + (b - cx_2/x_3)m_2\,, \end{cases}$$

e, se $c = hx_3$, $\sigma_1 = \sigma_3$.

Allora, per la definizione dell'equivalenza $R(U)$ in $\mathcal{M}^*(U)$, ogni elemento di $\mathcal{M}^*(U)/R(U)$ individua un suo rappresentante m_0 di componenti

$$\text{(i}'\text{)} \qquad \begin{cases} \sigma_2 = (-bx_1/x_2)m_1 + (c - bx_3/x_2)m_3\,, \\ \sigma_3 = (-cx_1/x_3)m_1 + (b - cx_2/x_3)m_2 \end{cases}$$

il quale è zero se $bx_3 - cx_2 = 0$; ed inoltre se $c = hx_3$, risultando $\sigma_3 = -hx_1m_1 + (b - hx_2)m_2$ definito su U, $m_0 = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ si rappresenterà, qualunque sia b, con $\sigma_1 = \sigma_3$ e $\sigma_2 = -(b/x_2)x_1m_1 + (h - b/x_2)x_3m_3$.

17). Ogni elemento di $\mathcal{M}^*(U)$ può allora ottenersi in modo unico nella forma $\alpha^{-1}\big((a - kx_1)\alpha(m_1)\big) \oplus m_0$ e quindi è

$$\mathcal{M}^*(U) \cong \Gamma(U, \mathcal{A}) \oplus \mathcal{M}^*(U)/R(U)\,.$$

Sia ora $\mathcal{M}_1^*(U)$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}^*(U)$ costituito dai rappresentanti m_0 degli elementi di $\mathcal{M}^*(U)/R(U)$.

Per ogni punto p di U esiste un intorno aperto $U' \subset U$ di p tale che le componenti degli elementi di $\mathcal{M}_1^*(U)$ che sono definite su p, tenuto conto ove occorra dell'equivalenza $R'(U \cap D(H))$, generano su

$\Gamma(U', \mathcal{A})$ un modulo libero, cioè $\mathcal{M}^*(U)/R(U) \cong \mathcal{M}_1^*(U)$ è localmente libero.

Dunque *il fascio* $\mathcal{M}^*$, *isomorfo ad* $\mathcal{M}$ (III, n. 12)), *si presenta decomponibile in una somma diretta di due fasci localmente liberi.*

18). *Considerazioni.* Le sezioni σ di $\overline{\mathcal{M}}'$ che sono quasi ovunque ma non ovunque definite sugli aperti U di X, (II, n. 11)), sono definite su $U \cap D(H)$, e d'altra parte, qualunque sia il punto x di X, ogni intorno aperto U di x interseca l'aperto $D(H)$. Ne segue che se $x \in H$ per ogni intorno aperto U di x, $\mathcal{M}^*(U)$ contiene sempre le controimmagini in j (III, n. 12)) delle suddette sezioni σ, e precisamente queste controimmagini costituiscono in $\mathcal{M}^*(U)$ l'insieme degli elementi (σ_2, σ_3) che sono $U_2 \cup U_3$-compatibili ma non U-compatibili. Questo comporta che passando ai limiti induttivi nel fascio $\mathcal{M}^*$, (per la definizione stessa di limite induttivo), *sui punti x di H le fibre di $\mathcal{M}^*$ possiedono « germi » generati da elementi che su quei punti non sono « definiti »* (II n. 11)). *Questi « germi », visto l'isomorfismo j, prolungano l'isomorfismo*

$$\overline{\mathcal{M}}'/D(H) \cong \mathcal{M}/D(H)\,, \qquad \text{(II, n. 11))}\,.$$

Inoltre essendo $\mathcal{M}^*(U)$, per ogni U, isomorfo ad una somma diretta di moduli, lo è anche $j(\mathcal{M}^*(U))$. Allora poichè il limite induttivo delle somme dirette dei moduli (associati allo stesso indice) di due sistemi induttivi può identificarsi con la somma diretta dei limiti induttivi dei due sistemi di moduli, si può concludere che *il fascio $\overline{\mathcal{M}}' \cong \mathcal{M}^*$ fornisce un $\mathcal{A}$-modulo immagine isomorfa di $\mathcal{M}$, nel quale esiste una sezione globale che è in ogni punto di X fra i generatori liberi dei suoi elementi definiti su quel punto, e perciò decomponibile per somma diretta.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Baldassarri, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Intern. di Geom. Alg. di Torino del 1961.

[2] S. Baldassarri Ghezzo, *Proprietà di ideali in domini d'integrità noetheriani*, Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova, C.E.D.A.M., 1970.

[3] S. Baldassarri Ghezzo, *Riduzione di moduli proiettivi a somme dirette*, C.E.D.A.M., Padova, 1974.

[4] S. BALDASSARRI GHEZZO, *Un esempio della riduzione di moduli proiettivi a somme dirette*, Soc. Coop. Tip., Padova, 1977.

[5] S. BALDASSARRI GHEZZO - C. MARGAGLIO - T. MILLEVOI, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica*, Cremonese, Roma, 1967.

[6] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Actual. Scient. et Industr., n. 1252, Hermann, Paris, 1958.

[7] A. GROTHENDIECK - J. A. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique, I*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8] M. RAYNAUD, *Modules projectifs universels*, Inventiones Math., **6**, Berlin, 1968, pp. 1-26.

[9] J. P. SERRE, *Faisceaux algébrique cohérents*, Ann. of. Math., **61**, U.S.A., 1955, pp. 197-278.

[10] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 dicembre 1978.