RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 60 (1978), p. 165-181

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__165_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 60 (1978)

Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita.

TULLIO VALENT (*)

SUMMARY - We obtain some theorems of local existence and uniqueness (Theorems A and B in § 5) for the « problem of place » in finite elastostatics (Problem $((D), (P))$ of § 3). These theorems are stated in $(H^{m,p}(\Omega))^n$- and $(C^{m,h}(\Omega))^n$-type spaces. In § 6 we make some remarks about the admissibility of the linearization of the non-linear problem (P) with respect to the choice of the spaces for the data and the solutions.

Lo scopo principale di questo lavoro è di dimostrare dei teoremi locali di esistenza e unicità (v. Teoremi A e B del § 5) per il « problema di posto » in elastostatica finita (precisamente per il Problema $((D), (P))$ del § 3) in spazi del tipo $(H^{m,p}(\Omega))^n$ e del tipo $(C^{m,\lambda}(\Omega))^n$.

Questi teoremi, insieme ai Teoremi 6 e 7, sono utili per chiarire la posizione dell'elastostatica lineare nell'ambito dell'elastostatica finita (limitatamente al problema al contorno che qui si considera).

Al § 6 si fanno alcune osservazioni sull'ammissibilità della linearizzazione del problema (P) rispetto alla scelta degli spazi per il dato e per la soluzione.

1. Preliminari.

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, (n intero positivo), $\bar{\Omega}$ la sua chiusura, k un intero $\geqslant 0$, p un numero reale > 1 ed λ un numero reale tale che $0 < \lambda \leqslant 1$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova, via Belzoni 7, Padova.

$C^k(\Omega)$ [risp. $C^k(\bar{\Omega})$] sarà l'insieme delle funzioni reali continue in Ω [risp. in $\bar{\Omega}$] con le loro derivate fino all'ordine k e $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ denoterà lo spazio (di Banach) delle funzioni $u \in C^k(\bar{\Omega})$ di cui le derivate di ordine k sono λ-hölderiane in $\bar{\Omega}$, con la norma $\|\cdot\|_{k,\lambda}$ definita da

$$\|u\|_{k,\lambda} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u|_0 + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_\lambda$$

ove

$$|v|_0 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|, \qquad [v]_\lambda = \sup_{\substack{x', x'' \in \bar{\Omega} \\ x' \neq x''}} \frac{|v(x') - v(x'')|}{|x' - x''|^\lambda}, \qquad (v \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})) .$$

Si verifica facilmente che, se Ω è convesso o, più in generale, se Ω è tale che ogni coppia di punti $x', x'' \in \Omega$ sono congiungibili da un arco in Ω rettificabile la cui lunghezza è maggiorata da un multiplo prefissato di $|x' - x''|$, risulta $\forall v \in C^1(\bar{\Omega})$

$$[v]_1 \leqslant c \sum_{|\alpha| = 1} |D^\alpha v|_0 \tag{1}$$

con c numero positivo indipendente da v.

Sussistendo (1) si ha

$$C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k,1}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) .$$

Osservando che

$$|u(x')v(x') - u(x'')v(x'')| \leqslant |u(x') - u(x'')||v(x')| + |v(x') - v(x'')||u(x'')| ,$$

si constata senza difficoltà che, sussistendo (1), risulta

$$u, v \in C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) \Rightarrow uv \in C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) , \qquad \|uv\|_{k,\lambda} \leqslant c_{k,\lambda} \|u\|_{k,\lambda} \|v\|_{k,\lambda} \tag{2}$$

ove $c_{k,\lambda}$ è un numero positivo indipendente da u e v e che quindi $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ è un'algebra di Banach.

$H^{k,p}(\Omega)$ denoterà lo spazio (di Banach) delle (classi di) funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ $\forall |\alpha| \leqslant k$, con la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ definita da

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_p ,$$

essendo $L^p(\Omega)$ lo spazio delle (classi di) funzioni reali di potenza p-ma sommabile secondo Lebesgue in Ω e $\|\cdot\|_p$ la norma abituale di $L^p(\Omega)$. $H_0^{k,p}(\Omega)$ sarà la chiusura in $H^{k,p}(\Omega)$ dell'insieme $\mathfrak{D}(\Omega)$ delle funzioni reali indefinitamente differenziabili in Ω e a supporto compatto in Ω, mentre $H^{-k,p'}(\Omega)$, $(1/p + 1/p' = 1)$, denoterà il duale forte di $H_0^{k,p}(\Omega)$; com'è ben noto, l'insieme $H^{-k,p'}(\Omega)$ è l'insieme (delle estensioni continue a $H_0^{k,p}(\Omega)$) delle distribuzioni reali in Ω del tipo $\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha v_\alpha$, con $v_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$. Porremo, come si fa abitualmente, $H^k(\Omega) = H^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = H_0^{k,2}(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega) = H^{-k,2}(\Omega)$.

Se Ω ha la proprietà di cono (1) e $kp > n$, è ben noto (Lemma di Sobolev) che ogni $u \in H^{k,p}(\Omega)$ è identificabile con una funzione di Ω in $\mathbb{R}$ continua e limitata e risulta

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant c\|u\|_{k,p} \tag{3}$$

con c numero positivo indipendente da u.

Utilizzando la densità di $C^k(\Omega) \cap H^{k,p}(\Omega)$ in $H^{k,p}(\Omega)$ e i ben noti teoremi di immersione per gli spazi $H^{k,p}(\Omega)$ si può verificare (v. [1], Th. 5.23) che, se Ω ha la proprietà di cono e $kp > n$, allora $H^{k,p}(\Omega)$ è un'algebra di Banach, avendosi

$$u, v \in H^{k,p}(\Omega) \Rightarrow uv \in H^{k,p}(\Omega)\,, \qquad \|uv\|_{k,p} \leqslant c_{k,p}\|u\|_{k,p}\|v\|_{k,p} \tag{4}$$

con $c_{k,p}$ numero positivo indipendente da u e v.

2. Due teoremi di differenziabilità.

Siano N un numero intero $\geqslant 1$ e $(x, y) \mapsto a(x, y)$ una funzione di $\Omega \times \mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$.

Ad ogni funzione $\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ resta associata la funzione $A\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$A\sigma(x) = a\big(x, \sigma(x)\big)\,. \tag{5}$$

Indicheremo con $C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, m intero $\geqslant 1$, l'insieme delle funzioni reali continue in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ assieme alle loro derivate di ordine $\leqslant m$.

(1) Ω ha la proprietà di cono se esistono due numeri positivi α, h tali che per ogni $x \in \Omega$ esiste un cono circolare retto, contenuto in Ω, con il vertice in x, di altezza h e apertura α.

(Tali funzioni non sono necessariamente limitate).

LEMMA 1. *Se* $a \in C^m(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, $m \geqslant 1$ e Ω *ha la proprietà di cono, allora per ogni* $p > n/m$ *risulta* $A\sigma \in H^{m,p}(\Omega)$ $\forall \sigma \in (H^{m,p}(\Omega))^N$ *e l'applicazione* $A\colon (H^{m,p}(\Omega))^N \to H^{m,p}(\Omega)$ *è continua.*

DIMOSTRAZIONE (per induzione). Indicheremo con $A_{x_i}\sigma$ e $A_{y_j}\sigma$, $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, N)$, le funzioni di Ω in $\mathbf{R}$ definite da

$$A_{x_i}\sigma(x) = \frac{\partial a}{\partial x_i}(x, \sigma(x)), \qquad A_{x_j}\sigma(x) = \frac{\partial a}{\partial y_j}(x, \sigma(x)). \tag{6}$$

Sia $m = 1$ e $p > n$. Da (3) e da $H^{1,p}(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$ segue subito che, se $a \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, si ha $A\sigma \in C^0(\bar{\Omega})$ $\forall \sigma \in H^{1,p}(\Omega))^N$; di conseguenza, se $a \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, si ha $A_{x_i}\sigma$, $A_{y_j}\sigma \in C^0(\bar{\Omega})$ $\forall \sigma \in (H^{1,p}(\Omega))^N$. Ricordando che $C^1(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ è denso in $H^{1,p}(\Omega)$ si ottiene allora facilmente (v. [14]) che se, $a \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ e $\sigma = (\sigma_j)_{j=1,\ldots,N} \in (H^{1,p}(\Omega))^N$, risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A\sigma = A_{x_i}\sigma + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} A_{y_j}\sigma, \tag{7}$$

donde $Au \in H^{1,p}(\Omega)$.

In virtù di (3), da $\sigma \to \sigma_0$ in $(H^{1,p}(\Omega))^N$ segue $\sigma \to \sigma_0$ in $(L^\infty(\Omega))^N$ da cui, se $a \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, segue $A\sigma \to A\sigma^0$, $A_{x_i}\sigma \to A_{x_i}\sigma^0$, $A_{y_j}\sigma \to A_{y_j}\sigma^0$ in $L^\infty(\Omega)$; pertanto, avendosi, per (7),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(A\sigma - A\sigma^0) &= (A_{x_i}\sigma - A_{x_i}\sigma^0) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i}(A_{y_j}\sigma - A_{y_j}\sigma^0) + \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_j^0}{\partial x_i} \right) A_{y_j}\sigma^0 \right], \end{aligned} \tag{8}$$

da $\sigma \to \sigma^0$ in $(H^{1,p}(\Omega))^N$ segue $A\sigma \to A\sigma^0$ in $H^{1,p}(\Omega)$, donde la continuità dell'applicazione $A\colon (H^{1,p}(\Omega))^N \to H^{1,p}(\Omega)$.

Proviamo ora che, se il lemma sussiste per un intero $m \geqslant 1$, esso sussiste sostituendo m con $m + 1$. Sia $a \in C^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$. Allora $\partial a/\partial x_i$ e $\partial a/\partial y_j$ appartengono a $C^m(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, se $\sigma \in (H^{m+1,p}(\Omega))^N$ allora $A_{x_i}\sigma$ e $A_{y_j}\sigma$ appartengono a $H^{m,p}(\Omega)$; poichè anche $\partial \sigma_j/\partial x_i \in H^{m,p}(\Omega)$, da (4), (7) segue $(\partial/\partial x_i)A\sigma \in H^{m,p}(\Omega)$, donde $A\sigma \in H^{m+1,p}(\Omega)$. Inoltre, in virtù di (8), dall'ipotesi induttiva segue

facilmente che $\sigma \to \sigma^0$ in $H^{m+1,p}(\Omega)$ implica $A\sigma \to A\sigma^0$ in $H^{m+1,p}(\Omega)$ e che quindi l'applicazione $A\colon (H^{m+1,p}(\Omega))^N \to H^{m+1,p}(\Omega)$ è continua.

Q.E.D.

TEOREMA 1. *Se $a \in C^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ e Ω ha la proprietà di cono, allora per ogni $p > n/m$ l'applicazione $A\colon (H^{m,p}(\Omega))^N \to H^{m,p}(\Omega)$ è differenziabile con continuità e risulta per ogni $\sigma = (\sigma_j)_{j=1,\dots,N}$, $\tau = (\tau_j)_{j=1,\dots,N} \in$ $\in (H^{m,p}(\Omega))^N$*

$$(A'(\sigma)\tau)(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a}{\partial y_j}(x, \sigma(x))\, \tau_j(x)\,, \qquad (x \in \Omega)\,, \tag{9}$$

ove $A'(\sigma)$ denota il differenziale di A in σ.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa sul fatto (segnalato sopra) che, se Ω ha la proprietà di cono e $p > n/m$, $H^{p,m}(\Omega)$ è un'algebra di Banach.

Proviamo innanzitutto che A è differenziabile in ogni $\sigma \in (H^{m,p}(\Omega))^N$ e che vale (9), ossia che

$$\lim_{\|\tau\|_{m,p} \to 0} \frac{\left\| A(\sigma + \tau) - A\sigma - \sum_{j=1}^{N} \tau_j A_{y_j}\sigma \right\|_{m,p}}{\|\tau\|_{m,p}} = 0\,. \tag{10}$$

Poichè, evidentemente,

$$A(\sigma + \tau) - A\sigma - \sum_{j=1}^{N} \tau_j A_{y_j}\sigma = \sum_{j=1}^{N} \tau_j \int_0^1 [A_{y_j}(\sigma + t\tau) - A_{y_j}\sigma]\, dt\,,$$

si ha, in base a (4),

$$\left\| A(\sigma + \tau) - A\sigma - \sum_{j=1}^{N} \tau_j A_{y_j}\sigma \right\|_{m,p} \leqslant \tag{11}$$

$$\leqslant c_{m,p} \|\tau\|_{m,p} \sum_{j=1}^{N} \left\| \int_0^1 [A_{y_j}(\sigma + t\tau) - A_{y_j}\sigma]\, dt \right\|_{m,p}.$$

Essendo $\partial a/\partial y_j \in C^m(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, allora, per il Lemma 1, A_{y_j} è un'applicazione continua di $(H^{m,p}(\Omega))^N$ in $H^{m,p}(\Omega)$ e quindi da (11) segue

facilmente (10) dato che

$$\left\| \int_0^1 [A_{y_j}(\sigma + t\tau) - A_{y_j}\sigma]\, dt \right\|_{m,p} \leqslant \int_0^1 \| A_{y_j}(\sigma + t\tau) - A_{y_j}\sigma \|_{p,m}\, dt\,.$$

Resta da mostrare che l'applicazione $\sigma \mapsto A'(\sigma)$, di $(H^{m,p}(\Omega))^N$ nello spazio normato delle applicazioni lineari e continue di $(H^{m,p}(\Omega))^N$ in $H^{m,p}(\Omega)$, è continua, cioè che, per ogni prefissato $\sigma^0 \in (H^{m,p}(\Omega))^N$, si ha

$$\sigma \to \sigma_0 \quad \text{in } (H^{p,m}(\Omega))^N \Rightarrow \sup_{0 \neq \tau \in (H^{m,p}(\Omega))^N} \frac{\| (A'(\sigma) - A'(\sigma^0))\tau \|_{m,p}}{\| \tau \|_{m,p}} \to 0\,.$$

Ciò segue dalla continuità delle applicazioni A_{y_j}: $(H^{m,p}(\Omega))^N \to H^{m,p}(\Omega)$, assicurata dal Lemma 1 (avendosi $\partial a/\partial y_j \in C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$), dopo avere osservato che, per (9), (4), risulta

$$\| (A'(\sigma) - A'(\sigma^0))\tau \|_{m,p} \leqslant \sum_{j=1}^N \| (A_{y_j}\sigma - A_{y_j}\sigma^0)\tau_j \|_{m,p} \leqslant$$

$$\leqslant N c_{m,p} \| A_{y_j}\sigma - A_{y_j}\sigma^0 \|_{m,p} \| \tau_j \|_{m,p}\,. \qquad \text{Q.E.D.}$$

LEMMA 2. *Ω sia tale per cui sussista* (1). *Se $a \in C^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, $m \geqslant 1$, e $0 < \lambda \leqslant 1$, risulta $A\sigma \in C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ $\forall \sigma \in (C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ e l'applicazione A: $(C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N \to C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE (per induzione). Il lemma è vero se $m = 1$. Infatti, se $\sigma \in (C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ si ha evidentemente $A_{x_i}\sigma, A_{y_j}\sigma \in C^1(\bar{\Omega}) \subseteq C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, donde $\partial A\sigma/\partial x_i \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ sussistendo (2) e (7); inoltre, se $\sigma \to \sigma^0$ in $(C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$, da (8) segue subito $A\sigma \to A\sigma^0$ in $C^1(\bar{\Omega})$ e dall'analoga di (8) scritta per A_{x_i} e A_{y_j} discende $A_{x_i}\sigma \to A_{x_i}\sigma^0$, $A_{y_j}\sigma \to A_{y_j}\sigma^0$ in $C^1(\bar{\Omega})$ e, per (1), in $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, donde, in virtù di (8), $A\sigma \to A\sigma^0$ in $C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$.

Se il lemma sussiste per un intero $m \geqslant 1$, esso sussiste sostituendo m con $m + 1$, Sia, infatti, $a \in C^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$; per l'ipotesi induttiva A_{x_i} e A_{y_j} sono applicazioni continue di $(C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ in $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ e quindi, ricordando (7), (8), (2), si riconosce agevolmente che A è un'applicazione continua di $(C^{m+1,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ in $C^{m+1,\lambda}(\bar{\Omega})$. Q.E.D.

TEOREMA 2. *Se $a \in C^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ e Ω è tale per cui sussista* (1), *allora per $0 < \lambda \leqslant 1$ l'applicazione A: $(C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N \to C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ è differenziabile con continuità e sussiste* (9).

Il teorema si deduce dal lemma 2 utilizzando il fatto (segnalato al § 1) che, sussistendo (1), $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ è un'algebra di Banach. La deduzione è del tutto analoga a quella del Teorema 1 dal Lemma 1.

3. Posizione del problema elastostatico.

L'aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ (2) rappresenti l'interno di una prefissata configurazione di riferimento — che supporremo « naturale » — di un corpo elastico.

Siano $\partial\Omega$ la frontiera di Ω e I l'identità di $\bar{\Omega}$ in sè.

Considereremo il caso in cui lo « spostamento » $u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sia assegnato su $\partial\Omega$; anzi considereremo la condizione al contorno omogenea $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Allora il problema dell'equilibrio elastico per *deformazioni finite* consiste nel trovare una funzione $u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ tale che:

(D) *$I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $\bar{\Omega}$* (cioè un omeomorfismo di $\bar{\Omega}$ su $\bar{\Omega}$ di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ assieme al suo inverso) *conservante l'orientamento,*

$$(P) \qquad \begin{cases} Tu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{con } T = D^* a(x, D),$$

essendo D l'operatore gradiente definito da

$$Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n},$$

D^* il trasposto formale di D, $(x, y) \mapsto a(x, y) = (a_{ij}(x, y))_{i,j=1,\ldots,n}$ una funzione di $\Omega \times \mathbb{R}^{n^2}$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ assegnata (caratterizzante il comportamento del materiale) tale che $a(x, 0) = 0$ $\forall x \in \Omega$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione assegnata (esprimente il prodotto della densità nello stato di riferimento per la forza specifica di massa). Più esplicitamente Tu è definito da

$$Tu(x) = -\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x, Du(x))\right)_{i=1,\ldots,n}.$$

(2) Scriveremo sempre n al posto di 3 perchè i risultati che si ottengono sussistono *per ogni intero* $n \geqslant 2$. Naturalmente essi hanno significato fisico nel caso $n = 3$.

Posto, per ogni $x \in \Omega$ e ogni $y = (y_{hk})_{h,k=1,\dots,n} \in \mathbf{R}^{n^2}$,

$$l(x, y) = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{hk}}(x, 0) y_{hk},$$

diremo che il problema

$$(PL) \qquad \begin{cases} T_L u = f & \text{in } \Omega, \qquad \text{con } T_L = D^* l(x, D), \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

si ottiene linearizzando il problema (P) nell'origine. Più esplicitamente $T_L u$ è definito da

$$T_L u(x) = -\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right)\right)_{i=1,\dots,n}.$$

Il principio di indifferenza materiale e il bilancio dei momenti impongono, notoriamente, (cfr. ad esempio [14], cap. IX, § 4) le simmetrie

$$(12) \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{kh}}(x, 0), \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) = \frac{\partial a_{ji}}{\partial y_{hk}}(x, 0).$$

Supporremo che esista una costante $c_1 > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ sia

$$(13) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j,h,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) y_{ij} y_{hk} \geqslant c_1 \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^2 \\ \forall y = (y_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbf{R}^{n^2} \text{ tale che } y_{ij} = y_{ji}. \end{cases}$$

Sussistendo (12), (13), l'operatore differenziale lineare T_L è fortemente ellittico (v. [6], p. 365).

4. Teoremi di esistenza, unicità e regolarità per il problema (PL).

Se σ è una funzione di Ω in $\mathbf{R}^{n^2}$, $(n \geqslant 2)$, indicheremo con $A\sigma$ e $L\sigma$ le funzioni di Ω in $\mathbf{R}^{n^2}$ definite da

$$A\sigma(x) = a(x, \sigma(x)), \qquad L\sigma(x) = l(x, \sigma(x)), \qquad (x \in \Omega).$$

Per ogni $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ appartenenti a $(L^2(\Omega))^{n^2}$, poniamo

$$(\sigma, \tau) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \qquad (\sigma, \sigma) = \|\sigma\|_2^2.$$

Se $u = (u_i)_{i=1,\dots n} \in (H^{k,p}(\Omega))^n$ porremo $\|u\|_{k,p} = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{k,p}$; se $u = (u_i)_{i,=1,\dots n} \in (C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ porremo $\|u\|_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{k,\lambda}$. Se le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{hk})(x, 0)$ sono misurabili e limitate in Ω, allora evidentemente T_L è un operatore (lineare e) continuo di $(H^{1,p}(\Omega))^n$ in $(H^{-1,p}(\Omega))^n$ e, in particolare, di $(H_0^1(\Omega))^n$ in $(H^{-1}(\Omega))^n$. Proviamo che

Sussistendo (12), (13), *se le funzioni* $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{hk})(x, 0)$ *sono misurabili e limitate in* Ω, *allora* $u \mapsto T_L u$ *è un isomorfismo* (*per le strutture di spazio vettoriale topologico*) *di* $(H_0^1(\Omega))^n$ *su* $(H^{-1}(\Omega))^n$.

Essendo (per l'ipotesi su *a*) T_L un operatore lineare e continuo di $(H_0^1(\Omega))^n$ in $(H^{-1}(\Omega))^n$, per provare che T_L è un isomorfismo di $(H_0^1(\Omega))^n$ su $(H^{-1}(\Omega))^n$ basta (in virtù del Teorema dell'isomorfismo di Banach) verificare che T_L: $(H_0^1(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$ è una biiezione, cioè che per ogni $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ esiste uno e un solo $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ tale che

$$(LDu, Dv) = \langle v, f \rangle \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n , \tag{14}$$

essendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità tra $(H_0^1(\Omega))^n$ e $(H^{-1}(\Omega))^n$ definita da $\langle v, f \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(v_i)$.

Si osservi che, posto

$$D_s u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\dots,n},$$

da (12) segue, per ogni $u, v \in (H_0^1(\Omega))^n$,

$$LDu = LD_s u , \qquad (LDu, Dv) = (LD_s u, D_s v);$$

pertanto (14) equivale a

$$(LD_s u, D_s v) = \langle v, f \rangle \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n . \tag{15}$$

Da (13) segue evidentemente

$$(LD_s v, D_s v) \geqslant c_1 \|D_s v\|_2^2 \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n \tag{16}$$

ove c_1 è un numero positivo indipendente da v.

Poichè, notoriamente, si ha per ogni $v \in (H_0^1(\Omega))^n$

$$\|v\|_{1,2} \leqslant c_2 \|Dv\|_2 \qquad \text{(disuguaglianza di Poincaré) e}$$

$$\|Dv\|_{1,2} \leqslant c_3 \|D_s v\|_2 \qquad \text{(disuguaglianza di Korn) (3)},$$

con c_2 e c_3 numeri positivi indipendenti da v, da (16) segue

$$(17) \qquad (LD_s v, D_s v) \geqslant c\|v\|_{1,2}^2 \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n,$$

con $c = c_1 c_2^2 c_3^2$.

La forma bilineare $(u, v) \mapsto (LD_s u, D_s v)$ su $(H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$ è continua, come si riconosce immediatamente tenendo presente il fatto che le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{hk})(x, 0)$ sono limitate e ricordando la disuguaglianza di Poincaré.

Pertanto il sussistere di (16) assicura — in base al noto Lemma di Lax-Milgram (4) — che per ogni $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ esiste uno e un solo $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ verificante (14).

Enunciamo ora tre teoremi di regolarità per le soluzioni deboli del problema (PL), cioè per le soluzioni in $(H_0^1(\Omega))^n$ del problema (14), che utilizzeremo più avanti.

Al primo e al secondo di questi teoremi si può pervenire con una tecnica analoga a quella usata in [12] per le equazioni ellittiche; il terzo si può dimostrare utilizzando i procedimenti di regolarizzazione di [4] o di [2], [3].

TEOREMA 3. *Sussistendo* (12) (13), *se Ω è di classe C^1* (5) *e le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{hk})(x, 0)$ sono continue in $\bar{\Omega}$, allora, per ogni p reale > 1, T_L è un isomorfismo* (per le strutture di spazio vettoriale topologico) di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ *su* $(H^{-1,p}(\Omega))^n$.

(3) V. [6], p. 381.

(4) Il Lemma di Lax-Milgram afferma che, se $(u, v) \mapsto b(u, v)$ è una forma sesquilineare continua su uno spazio di Hilbert H tale che $|b(v, v)| \geqslant c\|v\|^2$, $\forall v \in H$, ove c è una costante positiva e $\|\cdot\|$ è la norma di H, allora, per ogni forma lineare continua f su H, esistono $u, w \in H$ univocamente individuati da f tali che $f(v) = b(v, w) = \overline{b(u, v)}$, $\forall v \in H$. (V. per es. [7], Th. 14.1).

(5) Ω dicesi di classe C^m $(m \geqslant 1)$ se la sua chiusura $\bar{\Omega}$ è una sottovarietà a bordo di $\mathbb{R}^n$ di classe C^m, cioè se $\forall x \in \partial\Omega$ esistono un intorno aperto U_x di x in $\mathbb{R}^n$ e un diffeomorfismo $\mathcal{T}$ di classe C^m di U_x sulla palla $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 1\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{T}(\bar{\Omega} \cap U_x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 1,\ \xi_n \geqslant 0\}$.

TEOREMA 4. *Sussistendo* (12), (13), *se* Ω *è di classe* C^{k+2} *e le funzioni* $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{hk})(x, 0)$ *appartengono a* $C^{k+1}(\bar{\Omega})$, $(k \geqslant 0)$, *allora, per ogni* p *reale* > 1, T_L *è un isomorfismo* (per le strutture di spazio vettoriale topologico) *di* $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ *su* $(H^{k,p}(\Omega))^n$.

TEOREMA 5. *Sussistendo* (12), (13), *se* Ω *è di classe* $C^{k+2,\lambda}$ *e le funzioni* $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{hk})(x, 0)$ *appartengono a* $C^{k+1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $(k \geqslant 0,\ 0 < \lambda < 1)$, *allora* T_L *è un isomorfismo* (per le strutture di spazio vettoriale topologico) *del sottospazio* $\{u \in (C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ *di* $(C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ *su* $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$.

5. Teoremi di esistenza e unicità per il problema $((D), (P))$.

Siano sempre Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, k un intero $\geqslant 0$ e p un numero reale > 1.

OSSERVAZIONE. 1. *Se* Ω *è connesso e di classe* C^1, *allora sussiste* (1).

Infatti Ω, essendo limitato e di classe C^1, è unione finita di aperti convessi oppure diffeomorfi a un convesso di $\mathbb{R}^n$ (semipalla aperta); ne segue senza difficoltà che, se $x, y \in \Omega$ e $l(x, y)$ è l'estremo inferiore delle lunghezze degli archi rettificabili in Ω congiungenti x e y, risulta $l(x, y) \leqslant K|x - y|$ ove K è un numero positivo indipendente da e x y, epperò sussiste (1).

OSSERVAZIONE 2. *Se* Ω *è di classe* C^1, *allora* Ω *ha la proprietà di cono.* (V. ad es. [7], p. 67).

Dal Teorema 1 segue immediatamente che, se Ω ha la proprietà di cono e $a \in (C^{k+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$, allora, per ogni $p > n/(k+1)$, $u \mapsto Tu$ è un'applicazione di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ in $(H^{k,p}(\Omega))^n$, differenziabile con continuità e che $T'(0) = T_L$.

Analogamente dal Teorema 2 segue che, se Ω è tale per cui sussiste (1) e $a \in (C^{k+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$, allora, per ogni $\lambda \in [0, 1]$, $u \mapsto Tu$ è un'applicazione di $(C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ in $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ differenziabile con continuità e che $T'(0) = T_L$.

Allora, tenendo conto delle Osservazioni 1 e 2, dai Teoremi 1, 4 e 2, 5 discendono subito — in virtù del noto Teorema di inversione locale di un'applicazione di classe C^1 tra spazi di Banach (6) — i seguenti due teoremi.

(6) Questo Teorema afferma che, *se* F, F *sono spazi di Banach, se* $u_0 \in E$ *e* T *è un'applicazione definita in un intorno aperto di* u_0 *e a valori in* F *diffe-*

TEOREMA 6. *Se* $a \in (C^{k+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$, *se sussistono* (12), (13) *e se* Ω *è di classe* C^{k+2}, *allora se* $p > n/(k+1)$ (p *reale* > 1) *esistono un intorno aperto* U *all'origine nel sottospazio* $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ *di* $(H^{k+2,p}(\Omega))^n$ *e un intorno aperto* V *all'origine in* $(H^{k,p}(\Omega))^n$ *tali che* T *sia un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* U *su* V.

TEOREMA 7. *Se* $a \in (C^{k+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$, *se sussistono* (12), (13) *e se* Ω *è connesso e di classe* C^{k+3}, *allora per ogni* $\lambda \in]0, 1[$ *esistono un intorno aperto* U *dell'origine nel sottospazio* $\{u \in (C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ *di* $(C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ *e un intorno aperto* V *dell'origine in* $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ *tali che* T *sia un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* U *su* V (7).

Allo scopo di ottenere dei teoremi di esistenza e unicità per il problema $((D), (P))$, premettiamo i seguenti due lemmi.

LEMMA 1. *Se* Ω *è connesso e di classe* C^1 *e i numeri* k, p *sono tali che* $p > n/(k+1)$, *allora esiste un intorno* U *dell'origine in* $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ *tale che per ogni* $u \in U$ *la funzione* $I + u$ *è un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* $\bar{\Omega}$ *su* $(I+u)(\bar{\Omega})$ *che conserva l'orientamento.*

DIMOSTRAZIONE. Se Ω è di classe C^1 e $p > n/(k+1)$, allora $H^{2+2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ con iniezione continua: lo si deduce dal noto Teorema di immersione di Sobolev (cfr. [1], Th. 5.4). Dalla continuità dell'applicazione $v \mapsto \det Dv$, [ove $\det Dv$ è il determinante della matrice $(\partial v_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n}$], di $(H^{k+2,p}))^n$ in $C^0(\bar{\Omega})$, avendo presente che $\det DI = 1$, segue l'esistenza di un intorno V di I in $(H^{k+2,p}(\Omega))$; tale che $\sup_{x\in\bar{\Omega}} |\det Dv(x) - 1| < 1 \ \forall v \in V$, donde $\inf_{x\in\bar{\Omega}} \det Dv(x) > 0 \ \forall v \in V^n$ allora, posto $U = (V - I) \cap (H_0^{1,p}(\Omega))^n$, si ha

$$u \in U \Rightarrow \inf_{x\in\bar{\Omega}} \det (D(I+u))(x) > 0 . \tag{18}$$

Sia $u \in U$. Tenendo presente che, essendo $I + u \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$, esistono delle funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ differenziabili con continuità la cui restri-

renziabile con continuità e tale che $T'(u_0)$ *è un isomorfismo di* E *su* F, *allora esistono un intorno aperto* U *di* u_0 *e un intorno aperto* V *di* Tu_0 *tali che* T *sia un diffeomorfismo di classe* C^1 *di* U *su* V (cioè un omeomorfismo di U su V differenziabile con continuità assieme al suo inverso).

(7) Un risultato di questo tipo (con $k = 0$ e Ω convesso) è stato provato da W. VAN BUREN ([18]; cfr. anche [19]). Nel caso più difficile del « problema di trazione » sono fondamentali vari lavori di F. STOPPELLI (in particolare [13]).

zione a $\bar{\Omega}$ coincide con $I + u$ (v. per esempio [5], p. 19), da (18) segue che $I + u$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ è localmente iniettiva, cioè che ogni punto $x \in \bar{\Omega}$ ha un intorno V_x in $\bar{\Omega}$ tale che $(I + u)|_{V_x}$ è iniettiva.

D'altra parte $I + u$ induce l'identità su $\partial\Omega$, perchè se Ω è di classe C^1, $u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}))^n \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$ (v. [11], Th. 4.10). Pertanto, per le ipotesi fatte su Ω, dal Th. 1 di [10] si deduce che $I + u$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ è (globalmente) iniettiva. Allora, sussistendo (18), $I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ che conserva l'orientamento.

Con considerazioni analoghe si perviene al

LEMMA 2. *Se Ω è connesso e di classe C^1, esiste un intorno U dell'origine in $(C^1(\bar{\Omega}))^n$ tale che, per ogni $u \in U$ verificante $u|_{\partial\Omega} = 0$, la funzione $I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ conservante l'orientamento.*

Nelle ipotesi del Teorema 6, esistono due numeri positivi ξ, η tali che per ogni $f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$, $(p > n/(k+1))$, con $\|f\|_{k,p} < \xi$ esiste unico $u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ con $\|u\|_{k+2,p} < \eta$ per cui $Tu = f$; inoltre, supposto Ω connesso, per il Lemma 1 è possibile scegliere ξ e η tali che u sia un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ conservante l'orientamento. Poniamoci in tale situazione.

Allora, se $f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$, $\|f\|_{k,p} < \xi$, per ogni $t \in [0, 1]$ esiste unico $u_t \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ tale che $Tu_t = tf$ e $\|u_t\|_{k+2,p} < \eta$; $I + u_t$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ conservante l'orientamento.

Consideriamo la funzione Φ: $\bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ definita ponendo

$$\Phi(x, t) = (I + u_t)(x)\,, \qquad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]\,.$$

Φ è di classe C^1 in $\bar{\Omega} \times [0, 1]$: per convincersene basta pensare che l'applicazione $f \mapsto u$, di $\{f \in (H^{k,p}(\Omega)^n\colon \|f\|_{k,p} < \xi\}$ su $\{u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n\colon \|u\|_{k+2,p} < \eta\}$ è differenziabile con continuità e che, essendo Ω di classe C^1 e $p > n/(k+1)$, risulta $H^{k+2}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ con iniezione continua. Inoltre risulta $\Phi(x, 0) = x$, $\forall x \in \bar{\Omega}$ (perchè $T0 = 0$) e $\Phi(x, 1) = (I + u)(x)$ $\forall x \in \bar{\Omega}$.

Pertanto Φ è un'omotopia di classe C^1 dell'identità I: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ nella funzione $I + u$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$. Allora — ricordando che, per ogni $t \in [0, 1]$, $I + u_t$ è un omeomorfismo di $\bar{\Omega}$ su $(I + u_t)(\bar{\Omega})$ che su $\partial\Omega$ coincide con la funzione identica I — si riconosce senza difficoltà che

risulta $(I + u_t)(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ e, di conseguenza, $(I + u_t)(\Omega) = \Omega$, per un noto Teorema di Brouwer (v. [8], p. 95-97).

Detto $\mathcal{A}$ *l'insieme* delle « deformazioni ammissibili », cioè *dei diffeomorfismi di classe* C^1 *di* $\bar{\Omega}$ *su* $\bar{\Omega}$ *che conservano l'orientamento e inducono l'identità su* $\partial\Omega$, da quanto s'è detto sopra segue che Φ *è una* $\mathcal{A}$*-omotopia*, nel senso che, per ogni $t \in [0, 1]$, la funzione $\bar{\Omega} \in x \mapsto \mapsto \Phi(x, t)$ appartiene ad $\mathcal{A}$.

Abbiamo già notato che, se Ω è di classe C^1 e $p > n/(k + 1)$ si ha $H^{k+2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$. Notiamo inoltre che, se Ω è di classe C^1, $u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap \cap C^0(\bar{\Omega}))^n \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$, nonchè $u \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$, $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n$, (v. ad esempio [11], Th. 4.10). Pertanto, se Ω è di classe C^1 e $p > > n/(k + 1)$, risulta $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n = \{u \in (H^{k+2,p}(\Omega))^n : u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

In base a tutte queste considerazioni, dal Teorema 6 e dal Lemma 1 si deduce il seguente

TEOREMA A. *Se* $a \in (C^{k+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$, *se sussistono* (12), (13) e Ω *è connesso e di classe* C^{k+2}, *allora se* $p > n/(k + 1)$, (p reale >1), *esistono due numeri positivi* ξ, η *tali che per ogni* $f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$, *con* $\|f\|_{k,p} < \xi$, *il problema* $((D), (P))$ *del* § 3 *ha una e una sola soluzione* $u \in (H^{k+2,p}(\Omega))^n$ *con* $\|u\|_{k+2,p} < \eta$ *e per i quali esiste una* $\mathcal{A}$*-omotopia di classe* C^1 *dell'identità* $I: \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ *in* $I + u: \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$.

In maniera analoga, dal Teorema 7 e dal Lemma 2 si perviene al seguente

TEOREMA B. *Se* $a \in (C^{k+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$, *se sussitono* (12), (13) *e* Ω *è connesso e di classe* C^{k+3}, *allora per ogni* $\lambda \in]0, 1[$ *esistono due numeri positivi* ξ, η *tali che per ogni* $f \in (C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$, *con* $\|f\|_{k,\lambda} < \xi$, *il problema* $((D), (P))$ *del* § 3 *ha una e una sola soluzione* $u \in (C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ *con* $\|u\|_{k+2,\lambda} < \eta$ *e per i quali esiste una* $\mathcal{A}$*-omotopia di classe* C^1 *dell'identità* $I: \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ *in* $I + u: \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$.

6. Osservazioni sulla linearizzazione del problema (P).

I Teoremi 6 e 7, non sono solo dei teoremi di omeomorfismo locale (attorno a 0) per l'operatore T (e quindi di esistenza e unicità locali per il problema (P)), ma sono teoremi di diffeomorfismo locale (attorno a 0) e quindi, associati ai Teoremi A e B, forniscono una giustificazione della teoria lineare dell'elastostatica nell'ambito della teoria finita, limitatamente al « problema di posto » che abbiamo studiato.

Nelle ipotesi del Teorema 6, ad esempio, si ha (tra l'altro) che:

(*a*) T è un omeomorfismo di un intorno U di 0 in $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su un intorno V di 0 in $(H^{k,p}(\Omega))^n$ [e quindi $\forall f \in V$ esiste, in U, una e una sola soluzione $u(f)$ del problema (P)],

(*b*) T_L è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su $(H^{k,p}(\Omega))^n$ [e quindi $\forall f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$ esiste, in $(H^{k+2,p}(\Omega))^n$ una e una sola soluzione $u_L(f)$ del problema linearizzato (PL)],

$$(c) \qquad \lim_{\|f\|_{k,p} \to 0} \frac{\|u(f) - u_L(f)\|_{k+2,p}}{\|f\|_{k,p}} = 0 \qquad (f \in V).$$

La proprietà (*b*) discende dal Teorema 4, ma anche dal Teorema 6 in quanto, se T è un diffeomorfismo di U su V, allora, $\forall u \in U$, $T'(u)$ è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su $(H^{k,p}(\Omega))^n$, donde (*b*) ricordando che (per il Teorema 1) $T'(0) = T_L$.

La proprietà (*c*) esprime il fatto che T^{-1}: $V \to U$ è differenziabile in 0 e che $(T^{-1})'(0) = T_L^{-1}$; ciò è vero in quanto, per il Teorema 6, T è un diffeomorfismo di U su V e quindi $\forall u \in U$ si ha $(T^{-1})'(Tu) = (T'(u))^{-1}$ donde [ricordando che $T0 = 0$] $(T^{-1})'(0) = (T'(0))^{-1} = T_L^{-1}$.

Osserviamo, poi, che il Teorema A aggiunge (nell'ulteriore ipotesi che Ω sia connesso) che U e V possono essere scelti in maniera tale che ogni $u \in U$ verifichi la condizione (D) e che per ogni $u \in U$ si possa passare dall'identità I: $\bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ alla « deformazione » $I + u$ attraverso una famiglia continua (anzi di classe C^1) di « deformazioni ammissibili », cioè di elementi di $\mathcal{A}$.

* * *

Sia $a \in (C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}))^{n^2}$ tale che $|a(x, y)| \leqslant b + c|y|$ $\forall (x, y) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{n^2}$, con b e c costanti positive e sussistano (12), (13).

Allora, qualunque sia $p > 1$, risulta evidentemente $A\sigma \in (L^p(\Omega))^{n^2}$ $\forall \sigma \in (L^p(\Omega))^{n^2}$, ove A è l'operatore definito da (5); anzi, in base a un noto teorema (v. per es. [9], Th. 17.1), A: $(L^p(\Omega))^{n^2} \to (L^p(\Omega))^{n^2}$ è continuo; di conseguenza *T è un operatore continuo di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ in $(H^{-1,p}(\Omega))^n$.*

Sia Ω di classe C^1. Allora il problema (PL) è ben posto assumendo $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ come spazio delle soluzioni e $(H^{-1,p}(\Omega))^n$ come spazio dei dati, nel senso che *T_L è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ su $(H^{-1,p}(\Omega))^n$*; lo afferma il Teorema 3.

Tuttavia, se a non è lineare in y, *non esiste alcuna coppia* (U, V), *con* U *intorno dell'origine in* $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ *e* V *intorno dell'origine in* $(H^{-1,p}(\Omega))^n$, *tale che* T *sia un omeomorfismo di* U *su* V *e valga*

$$\lim_{\|f\|_{-1,p}\to 0} \frac{\|u(f) - u_L(f)\|_{1,p}}{\|f\|_{-1,p}} = 0 \qquad (f \in V)\,, \tag{19}$$

ove $u(f)$ *è l'elemento di* U *tale che* $Tu(f) = f$ *e* $u_L(f)$ *è l'elemento di* $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ *tale che* $T_L u_L(f) = f$.

Infatti, se T è un omeomorfismo di U su V ed è vera (19), allora $T^{-1}\colon V \to U$ è differenziabile in 0 [si ricordi che $T0 = 0$] e il suo differenziale in 0 è $T_L^{-1}\colon (H^{-1,p}(\Omega))^n \to (H_0^{1,p}(\Omega))^n$; tenendo presente che T è un omeomorfismo di U su V, che $A\colon (L^p(\Omega))^{n^2} \to (L^p(\Omega))^{n^2}$ è continua e che $D^*\colon (L^p(\Omega))^{n^2} \to (H^{-1,p}(\Omega))^n$ è lineare e continua, dalla differenziabilità in 0 di $T^{-1}\colon V \to U$ segue facilmente (*v.* [16], § 3) la differenziabilità nell'origine di $A \circ D\colon (H_0^{1,p}(\Omega))^n \to (L^p(\Omega))^{n^2}$; ma, per il Teorema del § 1 di [17], ciò accade (se e) solo se a è lineare in y.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press (1975).

[2] F. E. Browder, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), pp. 365-372.

[3] F. E. Browder, *A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems*, Indag. Math., **22** (1960), pp. 145-169.

[4] S. Campanato, *Equazioni ellittiche del II ordine e spazi* $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}$, Annali di Matematica, **69** (1965), pp. 321-381.

[5] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, vol. 3, Gauthier-Villars (1970).

[6] G. Fichera, *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, Bd. VI A/2, Springer-Verlag (1972).

[7] A. Friedmann, *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1969).

[8] W. Herewicz - H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton (1948).

[9] M. Krasnoselskij et al., *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff Int. Publ. Leyden (1976).

[10] H. Meisters - C. Olech, *Locally one-to-one mappings and a classical theorem on schlicht functions*, Duke Math. J., **30** (1963), pp. 63-80.

[11] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*, Masson et C.ie Ed. (1967).

[12] C. G. SIMADER, *On Dirichlet's boundary value problem*, Lectur Notes in Math., Springer-Verlag (1972).

[13] F. STOPPELLI, *Un teorema di esistenza e di unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite*, Ricerche Matematiche, **3** (1954), pp. 247-267.

[14] C. TRUESDELL, *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*, Masson et C.ie Ed. (1974).

[15] T. VALENT, *Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **65**, fasc. 1-2 (1978).

[16] T. VALENT, *Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **65**, fasc. 3-4 (1978).

[17] T. VALENT - G. ZAMPIERI, *Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 311-322.

[18] W. VAN BUREN, *On the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems in finite elasticity*, Thesis, Dep. ot Math., Carnegie-Mellon University, 1968. Research Report 68-ID7 - MEKMA-RI, Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, Pa. (1968).

[19] C. C. WANG - C. TRUESDELL, *Introduction to rational elasticity*, Noordhoff, Groningen (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 febbraio 1979.