

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Risoluzione, in R^2 , della II congettura di De Giorgi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 59 (1978), p. 45-49

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__45_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__45_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Risoluzione, in R^2 , della II congettura di De Giorgi.

GIULIANO BRATTI (*)

1. Introduzione.

In altra nota, dello stesso A., è pubblicata la risoluzione della I congettura.

In questa, si risolverà la III e la V (per altro semplici conseguenze della I), nonché la II.

Per ogni cfr. si veda il « Boll. U.M.I., (4) suppl. fasc. 3 (1975), pagg. 77-79 ». E, del resto, non ci sarebbe altro da precisare se non qualche (due per l'esattezza), notazione: nel seguito:

i) si indicherà con $\bar{Q} = \bar{Q}(D) = D_x + iD_y$ l'operatore differenziale di Cauchy-Riemann in due variabili, (Q sarà il suo coniugato);

ii) se A e B sono due aperti di R^2 , tali che: $B \subseteq A$, con $L(B)$ si indicherà l'insieme aperto così ottenuto: se $(x, y) \in R^2$, $(x, y) \in L(B)$ se e solo se: esiste una curva continua semplice e chiusa, c , contenuta in B , che è la frontiera di un compatto K tale che: $(x, y) \in K$.

Per economia del lettore si ricorda, inoltre, la seguente caratterizzazione: la quaterna $(A, B, P, \bar{Q})$, ($P = P(D)$ è un operatore differenziale a coefficienti costanti), è C^∞ -compatibile se e solo se $L(B) \subseteq A$, (¹).

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni 7, I-35100 Padova.

(¹) La caratterizzazione è valida nell'ipotesi che $P(z)$ e $Q\bar{Q}(z)$ abbiano zeri complessi comuni; altrimenti, per il « Nullstellensatz » di Hilbert, le stesse congetture sarebbero banali.

2. III e V congettura.

III: Se la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile, esiste un aperto T tale che:

a) $B \subseteq T \subseteq A$;

b) la quaterna: $(T, T, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

V: Siano A e B due aperti di R^2 tali che: $B \subseteq A$.

Per ogni $y \in R^2/A$ la quaterna: $(R^2 - \{y\}, B, P, Q\bar{Q})$ sia C^∞ -compatibile.

Allora anche la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

DIMOSTRAZIONI. — Poichè la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile, si ponga: $L(B) = \{(x, y) \in R^2: \text{esiste una curva continua semplice e chiusa, } c, \text{ contenuta in } B \text{ e tale che: il compatto } K \text{ di cui essa è frontiera contenga } (x, y)\}$.

Ovvio che: $B \subseteq L(B) \subseteq A$.

La quaterna: $(L(B), L(B), P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

Se c è una curva continua semplice e chiusa contenuta in B , il compatto K di cui essa è la frontiera deve essere tutto contenuto in $R^2 - \{y\}$, per ogni $y \in R^2/A$.

Ovvio che: $K \in \bigwedge_{y \in R^2/A} (R^2 - \{y\}) = A$.

Ciò dimostra che la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

3. II congettura.

La quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ sia C^∞ -compatibile.

Sia: A_n una successione di aperti di A , tali che $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \bigcup_n A_n = A$.

Sia $A_I \cap B \neq \emptyset$.

Allora: esiste una successione di aperti di B , B_n , tali che:

a) $B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \bigcup_n B_n = B$;

b) ogni quaterna: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che la C^∞ -compatibilità della quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è condizione necessaria al fine che la congettura sia vera.

a) il caso: $A = R^2$ e B limitato.

Sia: $G_I = (Z_{I,j})$, $j \in J_I$, la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di $A_I \wedge B$ tali che: ogni quaterna: $(A_I, Z_{I,j}, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

G_I non è vuota. Infatti: se $p \in A_I \wedge B$, sia $V_p \subseteq A_I \wedge B$, un intorno convesso p . La quaterna: $(V_p, V_p, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile; lo è, quindi, anche la quaterna: $(A_I, V_p, P, Q\bar{Q})$.

Poichè la famiglia G_I soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, sia $B_I \in G_I$ un massimale: ovvio che la quaterna: $(A_I, B_I, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

Per $n > 1$, sia G_n la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $A_n \wedge B$, aperti, tali che: se $Z \in G_n$: $B_{n-I} \subseteq Z$; la quaterna: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ è C^∞ -compatibile.

Al solito: sia B_n un massimale di G_n .

Si considerino le quaterne: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ ognuna C^∞ -compatibile; dimostriamo che:

$$\bigcup_n B_n = B.$$

Infatti: sia $p \in B$ e sia $p \notin \bigcup_n B_n$. Sia V_p un intorno di p contenuto in $A_{n_0+h} \wedge B$. Poichè i B_n sono massimali in G_n , si ha:

ogni quaterna: $(A_{n_0+h}, B_{n_0+h} \cup V_p, P, Q\bar{Q})$ non può essere C^∞ -compatibile.

Ciò implica:

per ogni $h \in N$, esiste c_h , curva continua semplice e chiusa contenuta in $B_{n_0+h} \cup V_p$ frontiera di un compatto K_h tale che: esiste $p_h \in K_h$ e $p_h \notin A_{n_0+h}$.

Si osservi che c_h è tutta contenuta in B ; per la compatibilità della quaterna: $(R^2, B, P, Q\bar{Q})$, p_h deve stare in A .

Poichè le curve c_h sono contenute in B e B è limitato si può supporre che: p_h sia convergente verso q .

Si osservi che: poichè $p_h \in R^2/A_{n_0+h} \subseteq R^2/A_{n_0+h-I}$, q deve appartenere a: $A \bigwedge_h R^2/A_{n_0+h} = \emptyset$.

b) Sia B non limitato.

Si può supporre: $B = \bigcup_n B'_n$ con le B'_n limitate, e $B'_n \subseteq B'_{n+I}$.

Come prima:

$(A_I, B'_{I,I}, P, Q\bar{Q}), \dots, (A_I, B'_{I,n}, P, Q\bar{Q})$ siano C^∞ -compatibili con:

$$B'_{I,n} \subseteq B'_{I,n+I} \subseteq \bigcup_n B'_{I,n} = B'_I;$$

$(A_2, B'_{2,I}, P, Q\bar{Q}), \dots, (A_2, B'_{2,n}, P, Q\bar{Q}), \dots$ siano C^∞ -compatibili con: $B'_{2,n} \supseteq B'_{I,n}$ e le $B'_{2,n}$ come sopra.

Se si considerano le quaterne: $(A_n, B'_{n,n}, P, Q\bar{Q})$, esse hanno la proprietà di essere C^∞ -compatibili; ovvio che: $B'_{n,n} \subseteq B'_{n+I,n+I}$ e che, con il solito procedimento per diagonale di Hilbert-Cantor:

$$\bigcup_n B'_{n,n} = B.$$

Il caso: $A = R^2$ è completamente risolto.

b) Il caso: $A \neq R^2$ e B limitato e connesso.

Come prima: le quaterne: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ siano C^∞ -compatibili e sia: $B_n \subseteq B_{n+I}$. Sia $p \in B$ e $p \notin \bigcup_n B_n$:

Dimostriamo che ciò è assurdo.

Per qualche $n_0 \in N$ esiste un intorno, V_p , di p tale che:

$$V_p \subseteq A_{n_0+h} \wedge B, \quad \text{per ogni } h \in N.$$

Per il fatto che i B_n sono massimali, le quaterne: $(A_{n_0+h}, B_{n_0+h} \cup V_p, P, Q\bar{Q})$ non sono, nessuna di esse, C^∞ -compatibili.

Analogamente a prima:

per ogni $h \in N$ esiste una curva continua semplice e chiusa, c_h , contenuta in $B_{n_0+h} \cup V_p$ che è la frontiera di un compatto K_h con:

$$p_h \in K_h \subseteq A \quad \text{e} \quad p_h \notin A_{n_0+h}.$$

Poichè B è limitato si può supporre che: p_h converga a q .
 q , ovviamente, sta nella frontiera di A .

Infatti:

$$q \in \bigcap_h R^2/A_{n_0+h} = R^2/A.$$

1° Caso.

Sia: dist. $(c_h, q) = a \in R_+$.

Considerato il cerchio Γ di raggio $a/2$ e centro q , si deve avere: $p_h \in \Gamma$ per ogni $h \geq h_0$.

Sia r una semiretta uscente da q .

Ovvio che c_h , $h \geq h_0$, interseca r in $x_h \in B_{n_0+h} \cup V_p$.

Ovvero:

esiste almeno un « buco » di A attorno al quale c'è B .

Ciò implicherebbe che la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ non è C^∞ -compatibile. Assurdo.

2° Caso.

Sia: dist. $(c_h, q) \rightarrow 0$ con $h \rightarrow +\infty$.

Ciò implicherebbe che $q \in b(B)$ ⁽²⁾ visto che: $c_h \subset B$ e che q è di frontiera per A : $q \in b(A)$.

La conclusione è immediata se si suppone che: $b(B) \cap b(A) = \emptyset$, che B sia connesso o no.

Sempre in questo secondo caso, se B non è limitato, si può supporre che: $B = \bigcup_n B'_n$, con: $B'_n \subseteq B'_{n+1}$ e con $b(B'_n) \cap b(A) = \emptyset$.

Allora la congettura è vera di nuovo, con lo stesso procedimento di a). Rimane l'indagine nel primo caso con B qualsiasi.

Ovvio che:

$$B = \bigcup_n B'_n \text{ dove le } B'_n \text{ sono le componenti connesse di } B.$$

E tale caso si vede immediatamente che è riconducibile agli altri.

In definitiva: la seconda congettura è provata.

(2) $b(B)$ = frontiera di B .

BIBLIOGRAFIA

- [I] G. BRATTI *Risoluzione, in R^2 , di una congettura di De Giorgi*, in pubblicazione presso Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. 57.
- [II] E. DE GIORGI, *Sulle soluzioni globali di alcuni sistemi di equazioni differenziali*, Boll. U.M.I., (4), supp. fasc. 3 (1975), pp. 77-79.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° aprile 1978.