

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

C. PROCESI

H. KRAFT

Classi coniugate in $Gl(n, C)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 59 (1978), p. 209-222

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__209_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__209_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Classi coniugate in $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$.

C. PROCESI (*) - H. KRAFT (**)

1. Introduzione.

Sia $X \in M_n$ una matrice $n \times n$ e sia $O_X = \{YXY^{-1} | Y \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})\}$ la sua classe coniugata. La chiusura $\bar{O}_X$ di O_X è una varietà algebrica, in generale singolare al di fuori di O_X . Il problema che vogliamo studiare è quello della normalità di $\bar{O}_X$. Tale questione sorge spontanea per vari motivi, prima di tutto ricordiamo alcuni fatti generali.

Se $\mathfrak{G}$ è un'algebra di Lie semi semplice su $\mathbb{C}$ e G è il suo gruppo aggiunto, lo studio delle classi coniugate (orbite) degli elementi di $\mathfrak{G}$ tramite G è un punto centrale della teoria delle rappresentazioni di $\mathfrak{G}$. Alcuni fatti noti di tale teoria sono:

- 1) Le classi coniugate hanno dimensione pari,
- 2) Se O è una classe coniugata, $\bar{O}$ è un'unione finita di classi coniugate (le degenerazioni di O).
- 3) Se O è una classe coniugata in $\mathfrak{G}$ di dimensione massimale (classe regolare) allora $\bar{O}$ è una intersezione completa in $\mathfrak{G}$, in particolare è di Cohen-Macaulay e da 1), 2) normale (criterio di Serre [6]).

Infatti le chiusure $\bar{O}$ delle classi regolari sono le fibre del quoziente $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/G$, dove $\mathfrak{G}/G$ è per definizione lo spettro dell'anello degli invarianti di $\mathfrak{G}$ sotto l'azione di G che, per un teorema classico di Chevalley [2], è in effetti uno spazio affine.

L'analisi precedente è parte di un fondamentale lavoro di B. Kostant su questo argomento [10].

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Roma.

(**) Indirizzo dell'A.: Math. Institut, Universität Bonn.

Lo studio delle classi non regolari è stato già oggetto di studio [7], [8], l'importanza di provare la normalità di $\bar{O}$ è stata messa anche in evidenza dalla teoria degli ideali primitivi nell'algebra involuttiva di $\mathcal{G}$ (congettura di Dixmier, cfr. [1]).

Per maggiori dettagli su tali legami rinviamo al lavoro di Borho, Kraft [1].

In questo lavoro ci proponiamo di provare, per $X \in (\mathbb{C})_n$:

TEOREMA. $\bar{O}_X$ è una varietà normale, di Cohen-Macaulay e con singolarità razionali.

Una diversa dimostrazione di questo teorema apparirà anche in: KRAFT, PROCESI, *Closures of conjugacy classes of $GL(n, \mathbb{C})$ are normal*. La dimostrazione qui data differisce dall'altra per due aspetti: da una parte è notevolmente più breve e non utilizza la teoria delle coppie nilpotenti, d'altra parte non dà informazioni altrettanto precise dell'altra dimostrazione. Abbiamo comunque ritenuto opportuno presentare entrambe le dimostrazioni per alcune caratteristiche differenti delle stesse.

Vorremmo infine fare due osservazioni:

1) Lo studio della singolarità di $\bar{O}_X$ può essere ricondotto al caso in cui X è nilpotente [1], pertanto ci porremo sempre in queste ipotesi.

2) La teoria generale per un'algebra di Lie $\mathcal{G}$ non è ancora ben sviluppata, vi sono molti risultati nel caso dei gruppi classici. Fra questi ve ne sono però di negativi, esistono classi coniugate O_X (anche con polarizzazione stabile) che non hanno $\bar{O}_X$ normale.

2. Alcuni risultati noti, schema della dimostrazione.

Sia $X \in M_n$ una matrice $n \times n$ che supporremo d'ora in poi nilpotente (cf. § 1).

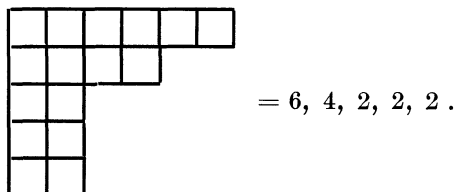
X è coniugata ad una matrice a blocchi di Jordan:

$$\begin{pmatrix} J_{h_1} & & & \\ & J_{h_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{h_t} \end{pmatrix}$$

$h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t$ dove con J_t denotiamo il blocco $t \times t$:

$$J_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

La partizione $\sigma: h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t$ determina la classe coniugata, che indicheremo anche con C_σ . Noi indicheremo una partizione con un diagramma, le cui righe hanno lunghezza $h_1, h_2, \dots, h_t$ per esempio:



La partizione duale $\check{\sigma}: p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$ è data dalle lunghezze delle colonne cioè $p_i = \# \{j | k_j \geq i\}$, nel nostro esempio

$$\sigma: 6, 4, 2, 2, 2, \quad \check{\sigma}: 5, 5, 2, 2, 1, 1.$$

Se $X \in O_\sigma$, con le colonne di σ possiamo determinare il rango di X^i per ogni i secondo la evidente formula: $\text{rk } X^i = \sum_{j \geq i} p_j$.

Indichiamo con $\gamma_i(\sigma)$ il numero $\sum_{j \geq i} p_j$, uguale al rango di X^i .

Per la degenerazione delle orbite abbiamo il seguente:

TEOREMA 2.1 [5], [8]. i) $O_\tau \subset \bar{O}_\sigma$ se e solo se $\gamma_i(\tau) \leq \gamma_i(\sigma)$ per ogni i .

ii) $\text{Dim } O_\tau = n^2 - \sum \check{p}_i^2$ ($\check{p}_i$ la partizione duale).

Il secondo fatto che vogliamo ricordare è la desingularizzazione della varietà $\bar{O}_\sigma$. Questa è ottenuta dal fatto che l'orbita O_σ è polarizzabile, esiste un sottogruppo parabolico P di $Gl(n, \mathbb{C})$ tale che, se $\mathfrak{n}$ è il radicale dell'algebra di Lie di P la varietà $G \times_P \mathfrak{n}$ fornisce una risoluzione delle singolarità di $\bar{O}_\sigma$ (tramite il morfismo proprio e birazionale $\pi: (g, n) \rightarrow g \cdot n \cdot g^{-1}$). Ora, tramite la forma di Killing, si

può provare che $G \times_P n$ non è altro che lo spazio totale del fibrato cotangente di G/P . D'altra parte se X è una qualunque varietà liscia e Y è lo spazio totale del suo fibrato cotangente l'esistenza della cosiddetta misura di Liouville mostra che il fibrato canonico di Y è banale. Ne segue che, per il teorema di Grauert-Riemenschneider, se si prova che $\bar{O}_\sigma$ è normale si ha anche [9].

TEOREMA 2.2. $\bar{O}_\sigma$ è Cohen-Macaulay con singolarità razionali.

Possiamo ora illustrare il metodo della dimostrazione. Sia h il rango di $X \in O_\sigma$, sappiamo che $h = \gamma_1(\sigma) = p_2 + p_3 + \dots$. Sia σ' la partizione di h ottenuta da σ cancellando la prima colonna, ovvero la partizione con colonne $p'_1 = p_2, p'_2 = p_3, \dots, p'_{t-1} = p_t$. La dimostrazione è per induzione su n , assumiamo quindi che $\bar{O}_{\sigma'}$ sia normale e quindi, da 2.2, anche di Cohen-Macaulay. Ora consideriamo lo spazio $M_{n,h} \times M_{h,n}$ delle coppie (A, B) di matrici $n \times h$ e $h \times n$. Abbiamo due morfismi canonici

$$\begin{array}{ccc} M_{n,h} \times M_{h,n} & \xrightarrow{\pi} & M_n \\ \downarrow e & & \\ M_h & & \end{array}$$

dati da $\pi(A, B) = AB$, $\varrho(AB) = BA$.

Entrambi i morfismi sono quozienti in senso debole. L'anello delle funzioni dell'immagine di π (risp. ϱ) coincide con l'anello degli invarianti di $M_{n,h} \times M_{h,n}$ sotto l'azione di $\text{Gl}(h, \mathbb{C})$ (risp. $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$) data da

$$X(A, B) = (AX^{-1}, XB) \quad (\text{risp. } Y(A, B) = (YA, BY^{-1})).$$

Questo teorema è noto come *primo teorema fondamentale della teoria degli invarianti* (H. Weyl [12], cf. anche [3]).

Ora noi consideriamo la varietà $N = \varrho^{-1}(\bar{O}_{\sigma'})$. N è chiaramente invariante rispetto al gruppo $\text{Gl}(h, \mathbb{C})$ poichè $\bar{O}_{\sigma'}$ lo è. Noi proveremo:

i) $\pi(N) = \bar{O}_\sigma$, pertanto $\bar{O}_\sigma$ è quoziente di N tramite $\text{Gl}(h, \mathbb{C})$ (nel senso debole specificato precedentemente).

ii) Se $n \geq 2h$ il morfismo ϱ è un morfismo di Cohen-Macaulay.

iii) In generale avremo $\dim N = \dim \bar{O}_\sigma + 2nh - h^2$.

iv) N è non singolare in codimensione 1.

Supponiamo per un momento che le affermazioni i), ..., iv) siano provate. La dimostrazione del teorema è pertanto la seguente:

Se $n \geq 2h$ da ii) e l'ipotesi induttiva segue che N è di Cohen-Macaulay. Pertanto dalla iv) segue che N è normale e quindi da i) anche $\bar{O}_\sigma$ è normale.

Se $n < 2h$ si può prima di tutto costruire l'analoga varietà $N' \subseteq M_{2h \times h} \times M_{h \times 2h}$. La varietà N è esattamente data da

$$N = N' \cap M_{n,h} \times M_{h \times n}$$

(ove le matrici $M_{n,h}$ (risp. $M_{h,n}$) sono immerse nelle $M_{2h,h}$ (risp. $M_{h,2h}$) estendendo con zero). Ora l'intersezione data si ottiene imponendo $2(2h)h - 2nh$ equazioni lineari poichè da iii)

$$\dim N = \dim \bar{O}_\sigma + 2nh - h^2 \quad \text{e} \quad \dim N' = \dim \bar{O}_\sigma + 2(2h)h - h^2$$

si ha che N è una intersezione completa in N' e pertanto N è ancora Cohen-Macaulay, quindi come nel caso precedente segue che $\bar{O}_\sigma$ è normale.

Procederemo ora alla dimostrazione dei quattro punti precedenti.

3. L'induzione fondamentale.

Proviamo ora il punto i).

Sappiamo da 2.1 che:

$$\begin{aligned} \bar{O}_\sigma &= \{Y \mid \text{rk}(Y^i) \leq \gamma_i(\sigma') = p'_{i+1} + p'_{i+2} + \dots + p'_{t-1} = \\ &= p_{i+2} + p_{i+3} + \dots + p_t = \gamma_{i+1}(\sigma)\} . \end{aligned}$$

Consideriamo dunque $(A, B) \in N$, ovvero $(A, B) \in M_{n,h} \times M_{h,n}$ tale che $\text{rk}(BA)^i \leq \gamma_{i+1}(\sigma)$, si ha allora per

$$\pi(A, B) = AB: \text{rk}(AB)^{i+1} = \text{rk}(A(BA)^i B) \leq \text{rk}(BA)^i = \gamma_{i+1}(\sigma) .$$

Ne segue pertanto che $AB \in \bar{O}_\sigma$. Pertanto per dimostrare che $\pi(N) = \bar{O}_\sigma$ basterà provare, poichè π è un quoziente e quindi $\pi(N)$ è chiuso, che $O_\sigma \subset \pi(N)$.

Ora sia $X \in \bar{O}_\sigma$, X è un morfismo $X: V \rightarrow V$, $\dim V = n$. È facile verificare, ponendo X in forma canonica di Jordan, che X ristretto all'immagine $X(V)$ è una matrice di $\bar{O}_\sigma$. Pertanto la coppia di morfismi $V \xrightleftharpoons[A]{B} X(V)$ con B coincidente con X , A l'inclusione, è in N e $AB = X$. Questo prova l'ultima asserzione.

4. Calcolo delle dimensioni delle fibre.

Sia ora $m = \dim U \leq n = \dim V$ indichiamo, per semplicità con $L(U, V)$ lo spazio delle trasformazioni lineari da U a V , con $L(U) = L(U, U)$ e con

$$\pi: L(U, V) \times L(V, U) \rightarrow L(U)$$

la composizione. Abbiamo visto che π è quoziente rispetto a $\text{Gl}(V)$, inoltre π è $\text{Gl}(U) \times \text{Gl}(U)$ equivariante per le azioni canoniche:

$$(g_1, g_2)(\varphi, \psi) = (\varphi g_2^{-1}, g_1 \psi), \quad (g_1, g_2)\varrho = g_1 \varrho g_2^{-1}.$$

Per ogni $i \in N$ definiamo

$$L_i(U) = \{\varphi \in L(U) \mid \text{rk } \varphi \leq i\} \quad \text{e} \quad L'_i(U) = L_i(U) - L_{i-1}(U).$$

$L'_i(U)$ è una sottovarietà localmente chiusa di $L(U)$, vogliamo studiare il morfismo indotto $\pi_i = \pi|_{\pi^{-1}(L'_i(U))} \pi^{-1}(L'_i(U)) \rightarrow L'_i(U)$.

PROPOSIZIONE 4.1. Per ogni $i \in N$ le fibre di π_i hanno tutte la stessa dimensione, sia $d(i)$. Precisamente:

i) Per $i \geq 2m - n$ le fibre di π_i sono ridotte, irriducibili, normali e Cohen-Macaulay di dimensione $d(i) = 2mn - m^2$.

ii) Per $i = 2m - n - j$, $0 \leq j \leq 2m - n$ si ha

$$d(i) = 2mn - m^2 + \left[\frac{j}{2} \right] \left[\frac{j+1}{2} \right]$$

$[x]$ denota il massimo intero $\leq x$.

DIM. Sia

$$L = L(U, V) \times L(V, U), \quad L'_i(V, U) = \{\psi \in L(V, U) \mid \mathrm{rk} \psi = i\}.$$

Sia $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq m$, e $\varrho \in L'_r(U)$, poniamo $F = \pi^{-1}(\varrho)$. Consideriamo il morfismo $\mu: F \rightarrow L(V, U)$ dato dalla proiezione

$$L \rightarrow L(V, U), \quad (\varphi, \psi) \rightarrow \psi.$$

a) $\mu(F) = \{\psi \in L(V, U) \mid \psi(V) \supseteq \varrho(U)\}$ quindi per ogni $(\varphi, \psi) \in F$ si ha $\mathrm{rk} \psi \geq r$.

b) $\mu(F) \cap L'_{r+i}(V, U) = \{\psi \in L(V, U) \mid \psi(V) \supseteq \varrho(U) \text{ e } \dim \psi(V) = r + i\}$, per $0 \leq i \leq m - r$.

Consideriamo

$$\tau: \mu(F) \cap L'_{r+i}(V, U) \rightarrow \mathrm{Gr}_i(U/\varrho(U))$$

definita da $\tau: \psi \rightarrow \psi(V)/\varrho(U)$ (Gr_i la Grassmanniana). Allora τ è suriettiva con fibre irriducibili

$$\tau^{-1}(\tau(\psi_0)) = \{\psi \in L(V, \psi_0(V)) \mid \psi \text{ è suriettivo}\}$$

di dimensione

$$(1) \quad \dim \tau^{-1} \tau(\psi_0) = n(r + i).$$

c) Da b e (1) si ha (per $0 \leq i \leq m - r$)

$$(2) \quad \dim(\mu(F) \cap L'_{r+i}(V, U)) = n(r + i) + i(m - r - i).$$

d) Per $(\psi_0, \varphi_0) \in F$ abbiamo

$$\mu^{-1}\mu(\varphi_0, \psi_0) = \{\varphi \in L(U, V) \mid \psi_0 \cdot \varphi = \varrho\} \times \{\psi_0\} \cong \varphi_0 + L(U, \ker \psi_0).$$

Queste fibre sono dunque irriducibili e di dimensione

$$(3) \quad \dim \mu^{-1}\mu(\varphi_0, \psi_0) = m(n - \mathrm{rk} \psi_0).$$

e) La formula di dimensione (2) e le (3) implicano

$$(4) \quad \dim \mu^{-1}(\mu(F) \cap L'_{r+i}(V, U)) = n(r+i) + i(m-r-i) + \\ + m(n-r-i) = mn + (n-m)r + i(n-m-i)$$

per $0 \leq i \leq m-r$ da cui

$$(5) \quad \dim F = mn + (n-m)r + \mathbf{Max}_{i=0}^{m-r} (i(n-r-i)).$$

f) Sia ora $r \geq 2m-n$. Allora

$$\mathbf{Max}_{i=0}^{m-r} (i(n-r-i)) = (m-r)(n-m)$$

da cui $\dim F = 2mn - m^2$ (per $r \geq 2m-n$).

g) Se $r \leq 2m-n$ poniamo $j = 2m-n-r$ ($0 \leq j \leq 2m-n$). Si ha allora

$$\mathbf{Max}_{i=0}^{m-r} i(n-r-i) = i_0(n-r-i_0)$$

con

$$i_0 = \left[\frac{n-r}{2} \right] = n-m + \left[\frac{j}{2} \right]$$

da cui

$$\mathbf{Max}_{i=0}^{m-r} (i(n-r-i)) = \left(n-m + \left[\frac{j}{2} \right] \right) \left(n-m + \left[\frac{j+1}{2} \right] \right)$$

da cui la formula richiesta è facilmente verificata.

h) Ora assumiamo $r \geq 2m-n$. Allora dalla f)

$$\dim F = 2mn - m^2$$

per tutte le fibre $F = \mu^{-1}(\varrho)$, $\varrho \in L'_r(U)$.

Poichè chiaramente F è data da m^2 equazioni, questo implica che F è una intersezione completa e pertanto Cohen-Macaulay.

i) Consideriamo

$$L' = \{(\varphi, \psi) \in L \mid \text{rk } \varphi = m \text{ o } \text{rk } \psi = m\}.$$

L' è aperto e denso in L , inoltre il morfismo π è liscio nei punti di L' poichè il differenziale di π è chiaramente suriettivo nei punti di L' . Questo implica che le fibre F è liscia nell'aperto $F' = F \cap L'$. Ora se prendiamo $F = \mu^{-1}(\varrho)$, $\varrho \in L'_r(U)$, $r \geq 2m - n$ sosteniamo che $F_0 = F - F'$ ha codimensione ≥ 2 in F . Questo implica che F è liscia in codimensione 1 e pertanto dalle precedenti osservazioni F è normale.

Per provare $\mathrm{codim}_F F_0 \geq 2$ procediamo con le formule già trovate.

Dato $(\varphi_0, \psi_0) \in L$ con $\mathrm{rk}(\varphi_0 \cdot \psi_0) \geq 2m - n - 1$ vi è certamente un $\varphi \in L(U, V)$ tale che $\mathrm{rk} \varphi = m$ e $\varphi \cdot \psi_0 = \varphi_0 \cdot \psi_0$.

Questo implica (cf. d))

$$\mu^{-1}\mu(\varphi_0, \psi_0) \cap F_0 \subsetneq \mu^{-1}\mu(\varphi_0, \psi_0)$$

per cui $(\varphi_0, \psi_0) \in F$, da cui

$$\dim(\mu^{-1}\mu(\varphi_0, \psi_0) \cap F_0) \leq \dim \mu^{-1}\mu(\varphi_0, \psi_0) - 1.$$

Poichè $F_0 \subseteq \mu^{-1}(\mu(F) \cap L_{m-1}(V, U))$ abbiamo come in e):

$$\begin{aligned} \dim F_0 &\leq mn + (n - m)r + \max_{i=0}^{m-r-1} (i(n - r - i)) - 1 = \\ &= 2mn - m^2 - 2 - (r - (2m - n)). \end{aligned}$$

Ma per ipotesi $r - (2m - n) \geq 0$ da cui si ha la formula desiderata.

j) Possiamo finalmente concludere che, dal criterio di Serre ([6], Th. 5, 8, 6) e i risultati di h), j); F è normale.

Poichè π è quoziente rispetto ad un gruppo connesso le fibre di π sono connesse, pertanto F è anche irriducibile.

Finalmente come conseguenza dell'analisi svolta abbiamo:

TEOREMA 4.2. Se $\dim V \geq 2 \dim U$ il morfismo

$$\pi: L(U, V) \times L(V, U) \rightarrow L(U)$$

è fedelmente piatto, normale e Cohen-Macaulay ([6], Def. 6.8.1).

DIM. Usando i risultati della Proposizione 4.1 basta provare che π è piatto. Poichè π è equidimensionale ((4), i)) questo segue da un fatto generale ([6], Prop. 15.4.2 (a) $\approx$ (e)). (Si potrebbe ugualmente usare il « metodo dei coni associati » per provare la piattezza, cf. [1]).

5. L'induzione fondamentale 2.

Siano ora in generale dati U, V con $\dim U = m \leq \dim V = n$ e consideriamo il morfismo di composizione

$$\pi: L(U, V) \times L(V, U) \rightarrow L(U).$$

PROPOSIZIONE 5.1. Sia $\eta \in L(U)$ un endomorfismo nilpotente tale che $\dim \ker \eta \leq n - m$. Supponiamo che $\bar{O}_\eta$ sia normale e di Cohen-Macaulay. Allora $\pi^{-1}(\bar{O}_\eta)$ è normale e di Cohen-Macaulay.

DIM. a) Per ipotesi $\text{rk } \eta \geq 2m - n$. Ne segue dalla 4.1 i) che $\pi^{-1}(O_\eta)$ è liscia in codimensione 1 e

$$\dim \pi^{-1}(O_\eta) = 2mn - m^2 + \dim O_\eta.$$

b) Consideriamo $X = \bar{O}_\eta - O_\eta$. Dal Lemma 5.2 che proveremo in seguito si ha

$$\dim \pi^{-1}(O) \leq \dim \pi^{-1}(O_\eta) - 2$$

per ogni orbita $O \subseteq X$, da questo

$$\dim \pi^{-1}X \leq \dim \pi^{-1}(O_\eta) - 2$$

(poichè X è unione finita di orbite).

c) Da a) e b) segue che $\pi^{-1}(\bar{O}_\eta)$ è liscia in codimensione 1 e che

$$\dim \pi^{-1}(\bar{O}_\eta) = \dim \bar{O}_\eta + 2mn - m^2.$$

d) Definiamo $V_1 = V + C^s$, $s = 2m - n$ in modo tale che

$$\dim V_1 = 2m, \quad \text{sia} \quad L_1 = L(U, V_1) \times L(V_1, U) \supseteq L.$$

Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & & \\ \uparrow & \searrow \pi_1 & \\ L & \xrightarrow{\pi} & L(U) \end{array}$$

Poichè $\eta_1 = \dim V_1 = 2m = 2 \dim U$ si ha, dal Teorema 4.2, che $\pi_1^{-1}(\bar{O}_\eta)$ è normale e Cohen-Macaulay ([6], Prop. 6.8.3 (i)) e

$$\dim \pi_1^{-1}(\bar{O}_\eta) = \dim \bar{O}_\eta + 2mn_1 - m^2.$$

Ora $\pi^{-1}(\bar{O}_\eta) = \pi_1^{-1}(\bar{O}_\eta) \cap L$ è dato da $t = \text{codim}_L L_1 = 2m(n_1 - n)$ equazioni.

Poichè $t = \text{codim}_{\pi_1^{-1}(\bar{O}_\eta)} \pi^{-1}(\bar{O}_\eta)$ (da (1) e (2)), ne segue che

$$\pi^{-1}(\bar{O}_\eta) \text{ è di Cohen-Macaulay ([3], Cap. 0, Cor. 16.5.6).}$$

Dal criterio di Serre ([6], Theorem 5.8.6) segue da c) che $\pi^{-1}(\bar{O}_\eta)$ è anche normale.

Resta da dimostrare il lemma annunciato.

LEMMA 5.2. Sia $\eta \in L(U)$ un endomorfismo nilpotente con

$$\dim \ker \eta \leq n - m.$$

Allora si ha

$$\dim \pi^{-1}(O_{\eta'}) \leq \dim \pi^{-1}(O_\eta) - 2$$

per ogni $\eta' \in \bar{O}_\eta - O_\eta$.

DM. Consideriamo le partizioni duali associate ad η , η' siano $p_\eta = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ e $p_{\eta'} = (p'_1, p'_2, \dots, p'_t)$. Dalla Prop. 4.1 si ha

$$\dim \pi^{-1}(O_\eta) = d(\text{rk } \eta) + \dim O_\eta$$

e similmente per η' . Dobbiamo mostrare che

$$(**) \quad d(\text{rk } \eta') + \dim O_{\eta'} \leq d(\text{rk } \eta) + \dim O_\eta - 2.$$

Poichè le orbite nilpotenti hanno dimensione pari, possiamo assumere che $\text{rk } (\eta') < \text{rk } (\eta)$ o, equivalentemente, che $\Delta = p'_1 - p_1 > 0$.

Dal successivo Lemma 5.3 abbiamo

$$(1) \quad \dim O_\eta - \dim O_{\eta'} = \sum p_i'^2 - \sum p_i^2 \geq \Delta^2 + 1.$$

Per ipotesi $\text{rk } \eta = m - \dim \ker \eta = m - p_1 \geq 2m - n$ da cui dalla 4.1

$$(2) \quad d(\text{rk } \eta) = 2mn - m^2.$$

In modo analogo troviamo $\text{rk } \eta' = \text{rk } \eta - \Delta \geq 2m - n - \Delta$ e dunque dalla 4.1

$$(3) \quad d(\text{rk } \eta') \leq 2mn - m^2 + \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{\Delta + 1}{2} \right\rfloor.$$

Da (1), (2), (3) finalmente segue che la disuguaglianza (**) è una conseguenza di

$$\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{\Delta + 1}{2} \right\rfloor \leq \Delta^2 - 1$$

che si verifica facilmente non appena $\Delta > 0$.

LEMMA 5.3. Siano $p' \geq p$ due partizioni di m e assumiamo che

$$\Delta = p'_1 - p_1 > 0$$

allora

$$\sum p_i'^2 - \sum p_i^2 \geq \Delta^2 + 1.$$

Dim. Possiamo assumere una « condizione di minimalità ». Per ogni $p'' \geq p$ con $p''_1 = p'_1$ si ha $\sum_1^m p_i''^2 \geq \sum_1^m p_i'^2$.

Allora affermiamo che si avrà

$$(*) \quad p'_i \leq p_i \quad \text{per } i \geq 1.$$

Altrimenti, poniamo

$$j_0 = \min \{j \geq 2 \mid p'_j > p_j\}$$

e

$$j_1 = \max \{j \geq j_0 \mid p'_i > p_i \text{ per } j_0 \leq i \leq j\}.$$

Si ha allora

$$p'_{j_1+1} \leq p_{j_1+1} \leq p_{j_1} < p'_{j_1}.$$

Poichè $p' \geq p$ questo implica

$$(2) \quad \sum_1^{j_1} p'_i > \sum_1^{j_1} p_i$$

ed anche che $p'_j < p'_{j_1} - 1$ per qualche $j > j_1$.

Definiamo

$$j_2 = \min \{j \geq j_1 \mid p'_j \leq p'_{j_1} - 2\} > j_1.$$

Allora (1) implica $p'_j = p'_{j_1+1} = p'_{j_1} - 1 \geq p_{j_1} \geq p_j$ per ogni j tale che $j_1 < j < j_2$.

Usando la (2) abbiamo

$$(3) \quad \sum_1^j p'_i > \sum_1^j p_i \quad \text{per } j_1 \leq j < j_2,$$

e

$$(4) \quad p'_{j_1} - 1 \geq p'_j \geq p'_{j_2} + 1 \quad \text{per } j_1 < j < j_2.$$

Così possiamo costruire una nuova partizione p'' di m definita da

$$p''_j = \begin{cases} p'_j & j \neq j_1, j_2, \\ p'_{j_1} - 1 & j = j_1, \\ p'_{j_2} + 1 & j = j_2. \end{cases}$$

Segue da (3) che $p'' \geq p$. Poichè $p'_{j_1} \geq p'_{j_2} + 2$ abbiamo

$$\sum p_i'^2 < \sum p_i''^2,$$

questo contraddice l'ipotesi di minimalità e prova (*).

Ponendo $\Delta_i = p_i - p'_i$ per $i \geq 2$, si ha $\Delta_i \geq 0$ e $\sum_{i=2}^m \Delta_i = \Delta$.

Da cui

$$\sum_1^m p_i'^2 - \sum_1^m p_i^2 = 2p_1\Delta + \Delta^2 - \sum_2^m 2p_i\Delta_i + \sum_2^m \Delta_i^2 \geq \Delta^2 + 1$$

($p_i \leq p_1$ e $\Delta > 0$).

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. BORHO - H. KRAFT, *Über Bahnen und deren deformationen bei linearen aktionen reductiver gruppen*, Comm. Math. Helv., **54** (1979), pp. 61-104.
- [2] C. CHEVALLEY, *Invariants of finite groups generated by reflections*, Am. J. Math., **67** (1955), pp. 778-782.

- [3] C. DE CONCINI - C. PROCESI, *A characteristic free approach to invariant theory*, Advances in Math., **2**, no. 3 (1976), pp. 330-354.
- [4] R. ELKIK, *Singularités des adhérences d'orbites polarisables*, preprint.
- [5] M. GERSTENHABER, *Dominance over the classical groups*, Ann. of Math., (2), **74** (1961), pp. 532-569.
- [6] A. GOTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, EGA 0-IV, Publ. Math. I.H.E.S., 11, 20, 24, 32, Paris, 1961-1967.
- [7] W. HESSELINK, *Singularities in the nilpotent scheme of a classical group*, T.A.M.S., **222** (1976), pp. 1-32.
- [8] W. HESSELINK, *Closures of orbits in a Lie algebra*, preprint, Groningen, 1976.
- [9] G. KEMPF et al., *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Mathematics **339**, Springer-Verlag, 1973.
- [10] B. KOSTANT, *Lie groups representations on polynomial rings*, Amer. J. Math., **85** (1963), pp. 327-404.
- [11] H. KRAFT, *Parametrisierung von Konjugationsklassen in sl_n* , preprint, Bonn, 1977.
- [12] H. WEYL, *Classical groups*, Princeton Math., s. 1 (1946).

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 novembre 1978.