

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO EMALDI

Una caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizzabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 59 (1978), p. 17-18

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__17_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Una caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizzabili.

MAURIZIO EMALDI (*)

Ricordiamo che un gruppo G si dice completamente fattorizzabile [1] se e solo se per ogni sottogruppo H di G esiste un sottogruppo K di G tale che $H \cap K = 1$ e $HK = G$; un gruppo G lo diremo poi supercomplementato se e solo se ogni sottogruppo H di G ha un supercomplemento in G nel senso che esiste un sottogruppo K di G tale che $H \cap K = 1$ e $\langle H, X \cap K \rangle = X$ per ogni sottogruppo X di G contenente H .

Come è facile vedere, la classe dei gruppi supercomplementati è chiusa rispetto alla formazione dei sottogruppi e dei gruppi fattoriali. Ora, poichè il reticolo dei sottogruppi di un gruppo ciclico è complementato se e solo se il gruppo è h lderiano cio  d'ordine finito non divisibile per quadrati di numeri primi, un gruppo supercomplementato dovr  avere i sottogruppi ciclici tutti h lderiani e i sottogruppi di Sylow dei suoi sottogruppi finiti dovranno essere abeliani elementari.

LEMMA. *I sottogruppi normali minimali e abeliani di un gruppo supercomplementato sono ciclici d'ordine primo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia N un sottogruppo normale minimale e abeliano del gruppo supercomplementato G . Allora N   un gruppo primario abeliano elementare. Sia M un sottogruppo massimale di N e sia C un supercomplemento di M in G . Abbiamo $N = M \times (N \cap C)$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, Seminario Matematico, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi matematici di ricerca del C.N.R.

con $N \cap C$ normale in $NC = G$. Perciò $N = N \cap C$, quindi $M = 1$ ed N risulta ciclico d'ordine primo.

Tenuto presente che un gruppo finito è risolubile se tutti i suoi sottogruppi propri sono supersolubili [3], dal lemma è facile dedurre, usando induzione, che è supersolubile un gruppo finito e supercomplementato. In particolare un gruppo finito e supercomplementato è metabeliano.

Diamo ora la seguente caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizzabili:

TEOREMA. *Un gruppo è completamente fattorizzabile se e solo se è localmente finito e supercomplementato.*

DIMOSTRAZIONE. I gruppi completamente fattorizzabili sono localmente finiti [1] e, come è facile vedere, supercomplementati. Inversamente, supponiamo che G sia un gruppo localmente finito e supercomplementato. Allora G è metabeliano poichè tale è ogni suo sottogruppo finitamente generato. Allora ogni gruppo fattoriale non identico di G contiene un sottogruppo normale minimale [2]. Perciò, per il lemma, G risulta iperciclico e, quindi [2], completamente fattorizzabile.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. N. CERNIKOV, *Groups with systems of complemented subgroups*, Mat. Sbornik, **35** (1954), pp. 93-128.
- [2] M. EMALDI, *Sui gruppi risolubili complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **42** (1969), pp. 123-128.
- [3] B. HUPPERT, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Z., **60** (1954), pp. 409-434.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 febbraio 1978.