

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EZIO STAGNARO

**Sul massimo numero di punti doppi isolati di
una superficie algebrica di P^3**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 59 (1978), p. 179-198

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__179_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di $\mathbb{P}^3$.

EZIO STAGNARO (*)

SOMMARIO - Si dà una limitazione per il massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica F^n , di grado n , con un punto s -plo, di $\mathbb{P}^3$, valida sotto certe ipotesi. Per $s = 2$ tale limitazione è migliore di quella assegnata da A. B. Basset. Si dà inoltre un esempio di una F^6 con 64 punti doppi conici e di una F^7 con 90 punti doppi isolati, di cui 72 conici e 18 biplanari.

SUMMARY - We give a limitation for the maximum number of isolated double points of an algebraic surface F^n , of degree n , with a singular point of multiplicity s , in $\mathbb{P}^3$, which holds under certain hypotheses. For $s = 2$ such limitation is better than A. B. Basset's limitation. Moreover an example of a F^6 with 64 isolated conic double points and an example of a F^7 with 90 isolated double points: 72 conic and 18 biplanar double points, are given.

Introduzione.

In questa Nota porto qualche contributo al problema di determinare il massimo numero di punti doppi isolati che può avere una

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

superficie algebrica (irriducibile) F^n , avente ordine n , appartenente a $\mathbb{P}^3(k)$ con k campo algebricamente chiuso; massimo che è noto soltanto per $n \leq 4$.

Di questo problema trovasi in [3] una trattazione completa con tutta la bibliografia fino al 1950.

Se x_0, x_1, x_2, x_3 sono coordinate proiettive omogenee in $\mathbb{P}^3$, e se $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ è l'equazione omogenea di F^n , un punto A è multiplo per F^n se e solo se ivi si annullano le quattro derivate parziali di f ; di conseguenza, il problema di cui ci occupiamo si può leggere così: qual'è il massimo numero (finito) di classi di soluzioni (= punti di $\mathbb{P}^3$) che può avere il sistema $\partial f / \partial x_i = 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$), senza che ne abbia necessariamente infinite?

Nel n. 1 considero una superficie F^n che possiede un punto s -plo P ($s \geq 0$) e d punti doppi e dimostro che, sotto opportune ipotesi che saranno precisate nel seguito, risulta:

$$(1) \quad d \leq \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - s(s^2-1) - 5 - \\ - \sqrt{n(n-1)(3n-14) - s(s+1)(3s-2) + 25}] .$$

Questa limitazione si ottiene rappresentando F^n sopra un piano $(n-s)$ -plo π mediante la proiezione dal punto P e studiando la curva di diramazione Δ , cioè la traccia su π del cono Γ luogo delle rette che passano per P e sono tangenti altrove a F^n .

Per $s = 0$ si ritrova la disuguaglianza ottenuta da A. B. Basset fin dal 1906 (cfr. [1], [2] e anche [3]), disuguaglianza che fino ad ora non si è riusciti a migliorare se non introducendo ipotesi troppo restrittive. Se $s = 2$ la (1) dice che il numero $D = d + 1$ di punti doppi non può superare

$$1 + \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - 11 - \sqrt{n(n-1)(3n-14) + 1}] ;$$

e questo risultato migliora, sia pur per poco, quello di Basset. Il miglioramento appare particolarmente significativo per valori piccoli di n . Ad esempio per $n = 6$ trovo che il numero dei punti doppi isolati di F^6 non può superare 65 (in luogo della limitazione di Basset $d \leq 66$) e nel n. 3 di questa Nota dimostro l'esistenza di una F^6 con 64 punti doppi isolati (con un procedimento che non potrebbe condurre ad una F^6 con 65 punti doppi). Questa F^6 con 64 punti doppi possiede 26 terne di punti doppi allineati e quindi infiniti piani tritangenti

(impropri); essa dunque non verifica le ipotesi indicate in [5] da B. Segre, in accordo col fatto che una superficie F^6 verificante le ipotesi di B. Segre non può possedere più di 63 punti doppi. Si conoscono tre esempi di F^6 con 63 punti doppi isolati (cfr. [5], [9], [6]). Il punto chiave per dimostrare l'esistenza della F^6 con 64 punti doppi isolati è l'identità (7) del n. 3.

Con procedimento analogo a quello del n. 3, provo nel n. 4 che esiste una F^7 con 90 punti doppi di cui 18 biplanari. Allo scopo mi giovo dell'identità (14), simile a quella usata per la F^6 del n. 3. Non si conoscevano prima d'ora superficie F^7 con più di 88 punti doppi isolati (cfr. [7]).

Mentre i risultati del n. 1 valgono nell'ipotesi che il campo k sia di caratteristica zero, per la validità dei nn. 2, 3, 4 è sufficiente escludere certi valori della caratteristica di k .

1. — Sia F^n una superficie algebrica irriducibile, di ordine n , appartenente allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(k)$ con k campo algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Supponiamo che F^n possieda d punti doppi conici ed inoltre un punto P s -plo ($s \geq 0$) con cono tangente non singolare. Proiettando F^n dal punto P su un piano π non passante per P , si ottiene una rappresentazione di F^n su un piano $(n-s)$ -plo. Indicheremo con Γ il cono circoscritto da P a F^n e con Δ la curva di diramazione di π , cioè traccia di Γ su π ; indicheremo inoltre con C la curva delle coincidenze su F^n , cioè la curva in cui F^n è intersecata dalla prima polare $\mathcal{F}'_P$ di P rispetto a F^n .

C è una curva di ordine $n(n-1)$ ed ha P come punto multiplo di molteplicità $\geq s(s+1)$. Infatti si può supporre di aver scelto il sistema di riferimento in modo tale che le coordinate di P siano $(1, 0, 0, 0)$ e che π abbia equazione $x_0 = 0$. Rispetto a tale riferimento l'equazione di F^n sarà della forma

$$f \equiv x_0^{n-s} \alpha_s + x_0^{n-s-1} \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n = 0$$

con α_i polimoni omogenei di grado i nelle sole variabili x_1, x_2, x_3 . L'equazione di $\mathcal{F}'_P$ sarà allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \equiv (n-s)x_0^{n-s-1} \alpha_s + (n-s-1)x_0^{n-s-2} \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n = 0.$$

Ma la molteplicità in P dell'intersezione delle superficie F^n e $\mathcal{F}'_P$ coin-

cide con la molteplicità in P dell'intersezione delle due superficie:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \\ (n-s)f - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} \equiv x_0^{n-s-1} \Theta_{s+1} + \dots = 0 \end{cases}$$

ed è quindi $s(s+1) + s'$ con $s' \geq 0$.

La curva di diramazione Δ , che si ottiene proiettando C da P , ha ordine:

$$\text{ord } \Delta = n(n-1) - s(s+1) - s'$$

infatti l'ordine di Δ è uguale al numero dei punti, distinti da P , intersezione di C con un generico piano per P .

(Osserviamo che l'ordine di Δ può non coincidere con l'ordine di Γ . In generale si ha $\text{ord } \Delta \geq \text{ord } \Gamma$, e si ha $\text{ord } \Delta > \text{ord } \Gamma$, ad es., se ogni generatrice di Γ , tranne un numero finito, incontra C in un numero di punti $\nu > 1$ fuori di P . In tal caso Δ è una curva contata ν volte (di ordine $n(n-1) - s(s+1) - s'$) mentre $\text{ord } \Gamma = (\text{ord } \Delta)/\nu$. In seguito però supporremo Δ irriducibile, così in tale ipotesi si ha $\text{ord } \Delta = \text{ord } \Gamma$.)

Supponiamo Δ priva di componenti multiple.

Ci proponiamo ora di valutare la classe di Δ , cioè il numero delle rette di π che appartengono ad un generico fascio e che toccano Δ in punti semplici. Essa coincide con la classe di Γ , cioè il numero dei piani che contengono una generica retta r passante per P e che toccano Γ lungo una generatrice non singolare. Questo numero non può superare quello dei piani che passano per r e toccano F^n in punti semplici. Infatti un piano σ tangente a Γ lungo una sua generatrice non singolare g è tangente ad F^n in un punto di g che risulta semplice per F^n , in quanto i punti multipli di F^n sono multipli anche per C e quindi proiettati da P danno rette multiple di Γ . D'altra parte Γ può possedere generatrici multiple che toccano F^n in uno o più punti semplici. Dunque la classe di Δ (cl Δ) non supera il numero dei punti semplici di F^n che sono comuni a C ed alla prima polare di un punto Q di r distinto da P . Tale polare ha molteplicità $s-1$ nel punto P e passa semplicemente per ciascuno dei d punti doppi conici di F^n , i quali sono punti doppi di C , così si ha:

$$\text{cl } \Delta = \text{cl } \Gamma = n(n-1)^2 - s(s^2-1) - 2d - \lambda, \quad \text{con } \lambda \geq 0.$$

Valutiamo ora il numero $\text{cusp } \Gamma$ delle generatrici cuspidali di Γ , cioè il numero delle tangenti di C che passano per P . Poichè una di queste rette tocca C in un punto che appartiene alla seconda polare $\mathcal{T}_P''$ di P rispetto a F^n , $\text{cusp } \Gamma$ non potrà superare il numero dei punti semplici di F^n che sono comuni a C e a $\mathcal{T}_P''$. Si vede facilmente che la molteplicità di intersezione in P di C con $\mathcal{T}_P''$ è almeno $s(s+1)(s+2)$. Quindi

$$\text{cusp } \Delta = \text{cusp } \Gamma = n(n-1)(n-2) - s(s+1)(s+2) - \mu, \quad \text{con } \mu \geq 0.$$

Supponiamo ora (ipotesi restrittive) che la curva di diramazione Δ sia irriducibile, dotata di soli nodi, cuspidi ordinarie (cioè rami del tipo $(2, 1)$) e flessi ordinari (cioè rami del tipo $(1, 2)$).

Possiamo allora applicare alla curva Δ le formule di Plücker le quali forniscono per il numero delle bitangenti ($\text{bit } \Delta$) l'espressione:

$$2 \text{ bit } \Delta = \text{cl } \Delta (\text{cl } \Delta - 10) + 8 \text{ ord } \Delta - 3 \text{ cusp } \Delta.$$

Nelle ulteriori ipotesi (restrittive) $\text{cl } \Delta - 10 > 0$ e $\mu = 0$, questa uguaglianza, insieme all'espressione di $\text{cusp } \Delta$ ed alle disuguaglianze

$$\text{ord } \Delta \leq n(n-1) - s(s+1), \quad \text{cl } \Delta \leq n(n-1)^2 - s(s^2-1) - 2d,$$

conduce alla disuguaglianza:

$$2 \text{ bit } \Delta \leq [n(n-1)^2 - s(s^2-1) - 2d][n(n-1)^2 - s(s^2-1) - 2d - 10] + \\ + 8[n(n-1) - s(s+1)] - 3[n(n-1)(n-2) - s(s+1)(s+2)].$$

Ma $\text{bit } \Delta \geq 0$; dunque

$$(1) \quad d \leq \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - s(s^2-1) - 5 - \\ - \sqrt{n(n-1)(3n-14) - s(s+1)(3s-2) + 25}].$$

Se $s = 2$ si trova, per i punti doppi distinti da P , la limitazione

$$d \leq \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - 11 - \sqrt{n(n-1)(3n-14) + 1}]$$

e quindi per una superficie F^n dotata di soli punti doppi conici, la quale

soddisfi, relativamente ad almeno uno dei suoi punti doppi conici, le ipotesi di generalità di cui si è detto dianzi, il numero $D = d + 1$ dei punti doppi conici verifica la disuguaglianza

$$(2) \quad D = d + 1 \leq 1 + \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - 11 - \sqrt{n(n-1)(3n-14) + 1}].$$

Mentre la disuguaglianza di Basset, che è la (1) con $s = 0$, fornisce per $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$ rispettivamente $d \leq 34, 66, 114, 181, 270, 383, 524, 696, \dots$, la disuguaglianza (2) dà rispettivamente $D = d + 1 \leq 33, 65, 112, 179, 268, 381, 522, 694, \dots$

Il massimo numero d_n di punti doppi che fino ad ora si sia riusciti ad imporre ad una F^n è:

$$\begin{aligned} n = 5 & \quad d_5 = 31 & \quad (\text{cfr. [4]}) \\ n = 6 & \quad d_6 = 64 & \quad (\text{cfr. n. 3 seguente}) \\ n = 7 & \quad d_7 = 90 & \quad (\text{cfr. n. 4 seguente}) \\ n = 8 & \quad d_8 = 160 & \quad (\text{cfr. [6] e [10]}) \\ n \geq 9 & \quad \text{cfr. [10] e [6]}. \end{aligned}$$

2. — Supponiamo ora che k sia un campo algebricamente chiuso e di caratteristica p non divisore di $2m$ ed F^n abbia l'equazione omogenea

$$f \equiv \alpha x_0^{2m} + 2\beta x_0^m + \gamma = 0$$

con α, β, γ polinomi omogenei nelle sole variabili x_1, x_2, x_3 di grado $n - 2m, n - m, n$ rispettivamente, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Il punto $P(1, 0, 0, 0)$ ha molteplicità $n - 2m$ per F^n , ed F^n si rappresenta $2m$ -plamente sul piano π di equazione $x_0 = 0$ mediante proiezione da P .

Per semplificare i discorsi indicheremo con $\alpha, \beta, \gamma, \Phi \equiv \alpha\gamma - \beta^2, \dots$, sia i polinomi omogenei, sia i conici di vertice P rappresentati dalle equazioni $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \Phi = 0, \dots$, sia ancora le curve sezioni di questi conici con il piano π . In particolare $\Delta \equiv \gamma^{m-1}\Phi = 0$ è l'equazione della curva di diramazione del piano $2m$ -plo sul quale è rappresentata F^n .

Ciò premesso abbiamo il seguente

LEMMA 1 (Gallarati [8], [11]). 1) Se $A(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $A \neq P$, è un punto doppio per F^n con $\bar{x}_0 \neq 0$, la sua proiezione $A'(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ su π è punto almeno doppio per la curva $\Phi \equiv \alpha\gamma - \beta^2$.

2) Se $A'(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è punto doppio per la curva Φ ed è $\beta(A') \neq 0$ (e quindi $\alpha(A') \neq 0$) e se $\bar{x}_0$ è una qualunque delle soluzioni (tutte distinte) dell'equazione $\alpha(A')x_0^m + \beta(A') = 0$, il punto $A(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è almeno doppio per F^n ; sicchè la retta $A'P$ contiene m punti almeno doppi di F^n , distinti tra loro e da P .

3) Se $m \geq 2$, un punto $B(0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ doppio per F^n è punto almeno doppio per γ e viceversa ogni punto doppio della curva γ è punto almeno doppio della superficie.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene facilmente ricordando che un punto è multiplo per la superficie se e solo se ivi sono nulle tutte le derivate parziali prime di f , e tenendo presente l'identità

$$(3) \quad \alpha f = (\alpha x_0^m + \beta)^2 + \Phi.$$

Proviamo la 1). A è per ipotesi doppio per la superficie $\alpha f = 0$ ed annulla $\alpha x_0^m + \beta$ in quanto $\partial f / \partial x_0 = 2m x_0^{m-1}(\alpha x_0^m + \beta)$, $\bar{x}_0 \neq 0$, ed inoltre la caratteristica p di k non divide $2m$. Scrivendo che in A sono nulle le quattro derivate parziali prime di αf e tenendo conto della (3), si trova subito che nel punto A' si annullano le tre derivate parziali prime di Φ .

Proviamo la 2). Se A' è doppio per la curva Φ ed $\alpha(A')\bar{x}_0^m + \beta(A') = 0$, dalla (3), si vede subito che in A sono nulle le quattro derivate parziali prime di αf . Ma $\alpha(A) = \alpha(A') \neq 0$; e di qui l'asserto.

Infine la 3) si prova indipendentemente dalla (3) osservando che

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_B = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right)_B, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{e che} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)_B = 0.$$

E questo conclude la prova del lemma.

Scartando ulteriori valori (in numero finito se pensiamo n fissato) della caratteristica di k , i risultati del lemma ora provato possono essere precisati con il seguente

LEMMA 2. Con le notazioni del lemma 1 se $\alpha(A') \neq 0$ si ha che:

1) A è punto doppio conico (o, rispettivamente, biplanare) per F^n se e solo se A' è punto doppio a tangenti distinte (o, rispettivamente, coincidenti) per la curva Φ .

2) I. Se $m = 2$ e $\beta(B) \neq 0$, B è punto doppio conico (biplanare) per F , se e solo se la curva γ ha ivi due tangenti distinte (coincidenti).

II. Se $m \geq 3$, il punto B è doppio biplanare (uniplanare) per F^n se e solo se la curva γ ha ivi due tangenti distinte (coincidenti).

Consideriamo i coni quadrici Γ_A, Γ_B tangenti ad F^n in A e B . Mediante la proiezione da $P(1, 0, 0, 0)$, nei casi 1) e 2) I., essi vengono rappresentati doppiamente su π , si noti che essendo $\alpha(A') \neq 0$ Γ_A non passa per P , analogamente per Γ_B ; se D_A e D_B sono le relative curve di diramazione, per provare il lemma 2 sarà sufficiente provare il seguente

LEMMA 2'. 1') D_A è la coppia delle rette tangenti in A' alla curva Φ .

2') I. Se $m = 2$, D_B si spezza nelle due rette tangenti in B alla curva γ .

II. Se $m \geq 3$, Γ_B coincide con il cono tangente in B al cono γ .

DIMOSTRAZIONE. La prova di 1') poggia sull'identità (3). Poichè $\alpha(A) \neq 0$, Γ_A coincide con il cono tangente in A alla superficie $\alpha f = 0$. La sua equazione

$$\sum_{i,j=0}^3 \left(\frac{\partial^2(\alpha f)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_A x_i x_j = 0 \quad (1),$$

in forza della (3), ricordando che $(\alpha x_0^m + \beta)(A) = 0$, si può scrivere nella forma

$$2 \left[\sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial(\alpha x_0^m + \beta)}{\partial x_i} \right)_A x_i \right]^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_A x_i x_j = 0$$

e ciò prova la 1').

Per provare l'affermazione 2'), basta osservare che se $m = 2$ il cono tangente in B ad F^n ha equazione

$$\sum_{i,j=0}^3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_B x_i x_j \equiv 4\beta(B)x_0^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right)_B x_i x_j = 0.$$

La curva di diramazione di tale cono sul piano $x_0 = 0$ è chiara-

(¹) Per certi valori della caratteristica di k (in numero finito per n fissato) tale equazione può non essere l'equazione del cono tangente in A ad $\alpha f = 0$; scartando questi valori della caratteristica di k , possiamo supporre che la suddetta equazione sia effettivamente l'equazione del cono tangente in A ad $\alpha f = 0$. Analoghe considerazioni valgono per l'equazione delle rette tangenti alla curva Φ nel piano $x_0 = 0$.

mente (essendo $\beta(B) \neq 0$)

$$\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right)_B x_i x_j = 0.$$

Se $m \geq 3$ si ha

$$\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_B x_i x_j \equiv \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right)_B x_i x_j.$$

E questo conclude la prova.

OSSERVAZIONE. Con le solite notazioni, si verifica facilmente che se A' è punto doppio per Φ ma $\beta(A') = 0$, in corrispondenza su F^n , possono non esserci punti doppi. Così, senza l'ipotesi $\beta(A') \neq 0$, viene a cadere la 2) del lemma 1 e le corrispondenti affermazioni dei lemmi 2 e 2'.

3. — Consideriamo il piano π , ove x_1, x_2, x_3 sono coordinate proiettive omogenee, ed indichiamo con lo stesso simbolo $\alpha, \delta, \dots$ una curva algebrica di π ed un polinomio omogeneo che uguagliato a zero ne dà l'equazione.

Poniamo:

$$\alpha = ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2,$$

$$\delta = bx_1^2 + ax_2^2 - cx_3^2,$$

$$R = r_1 r_2 r_3 r_4 = [ab(x_1 + x_2)^2 - c(a + b)x_3^2][ab(x_1 - x_2)^2 - c(a + b)x_3^2],$$

$$\varrho = ab(a + b)(x_1^2 + x_2^2) - c(a^2 + b^2)x_3^2,$$

$$\sigma = d(x_1^2 + x_2^2) - ex_3^2,$$

$$\xi = [a(be - cd) + b(ae - cd)](x_1^2 + x_2^2) + 2(a - b) \cdot \\ \cdot \sqrt{-(ae - cd)(be - cd)}x_1 x_2 - c[(ae - cd) + (be - cd)]x_3^2,$$

$$\eta = [a(be - cd) + b(ae - cd)](x_1^2 + x_2^2) - 2(a - b) \cdot \\ \cdot \sqrt{-(ae - cd)(be - cd)}x_1 x_2 - c[(ae - cd) + (be - cd)]x_3^2,$$

con $a, b, c, d, e \in k$ e tali che tutti i coefficienti dei polinomi $\alpha, \delta, R, \varrho, \sigma, \xi, \eta$ siano non nulli e inoltre $a \neq b$.

Risulta:

$$(4) \quad \lambda_1 r_1 r_2 r_3 r_4 \equiv \lambda_2 \alpha \delta - \lambda_3 \varrho^2$$

con $\lambda_1 = -(a-b)^2$, $\lambda_2 = 4a^2b^2$, $\lambda_3 = 1$;

$$(5) \quad \mu_1 \xi \eta \equiv \mu_2 \alpha \delta - \mu_3 \sigma^2$$

con $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4(ae - cd)(be - cd)$, $\mu_3 = -c^2(a-b)^2$; di qui moltiplicando membro a membro e tenendo conto, ad esempio, della (4) si ha l'identità:

$$(6) \quad \lambda_1 \mu_1 r_1 r_2 r_3 r_4 \xi \eta \equiv \alpha \delta (\lambda_1 \mu_2 r_1 r_2 r_3 r_4 - \lambda_2 \mu_3 \sigma^2) + \lambda_3 \mu_3 \varrho^2 \sigma^2.$$

La configurazione delle curve $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $r_i = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ si presenta come nella figura.

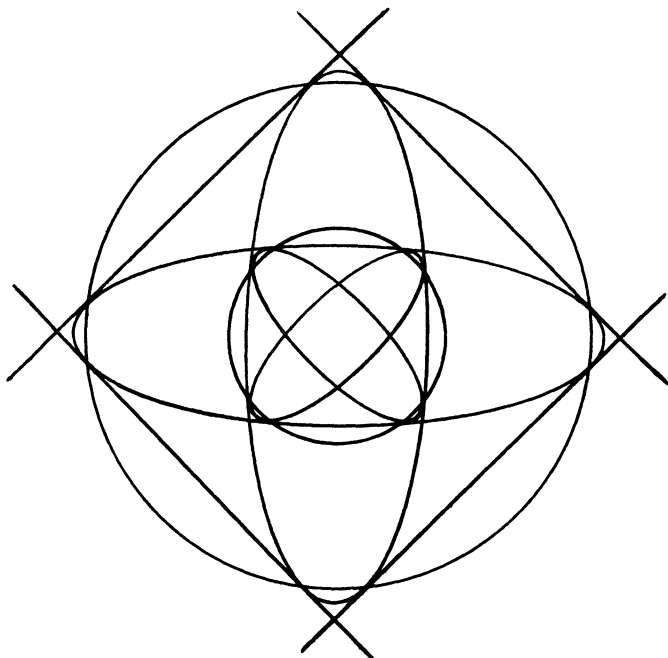


Fig. 1

Assumiamo ora $e = -(cd(a+b))/ab$ ed $a^2 + 3ab + b^2 = 0$ (sicchè $a = b(-3 \pm \sqrt{5})/2$). Con tale scelta speciale di e e di a la (6) diventa:

$$(7) \quad \lambda_1 \mu_1 r_1 r_2 r_3 r_4 \xi \eta \equiv \alpha \delta \varphi + \lambda_3 \mu_3 \varrho^2 \sigma^2$$

con

$$\varphi = -80a^2b^2c^2d^2[abx_1^2x_2^2 + c(a+b)(x_1^2 + x_2^2)x_3^2]$$

dove abbiamo tralasciato di sostituire ulteriormente a per non complicare troppo l'espressione.

Osserviamo che con tale scelta di e ed a le curve $\alpha, \delta, \dots$ rimangono irriducibili e distinte fra loro; inoltre tutti i coefficienti di $x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^2$ nonchè λ_i, μ_j ($\forall i, j$) rimangono diversi da zero (scartando ovviamente un numero finito di valori della caratteristica di k). Infatti $a(be - cd) + b(ae - cd)$, $(ae - cd)(be - cd)$, $(ae - cd) + (be - cd)$ diventano rispettivamente $-3cd(a+b)$, c^2d^2 , $-cd$; inoltre ϱ e σ rimangono distinte perchè diventano

$$\varrho = ab[(a+b)(x_1^2 + x_2^2) + 3cx_3^2] \quad \text{e} \quad \sigma = d\left[x_1^2 + x_2^2 + \frac{c(a+b)}{ab}x_3^2\right]$$

e se fosse $3c/(a+b) = (c(a+b))/ab$ ne seguirebbe $a^2 - ab + b^2 = 0$ e ciò è incompatibile con la $a^2 + 3ab + b^2 = 0$ (se la caratteristica di k è $\neq 2$).

PROPOSIZIONE 1. *Scartando un numero finito di valori della caratteristica di k , abbiamo:*

a) La curva $r_1r_2r_3r_4\xi\eta$ possiede 26 punti doppi a tangenti distinte, tutti distinti; nessuno dei quali appartiene alla curva $\varrho\sigma$.

b) La curva $\delta\varphi$ ha 11 punti doppi a tangenti distinte, distinti tra loro (e dai precedenti e $\varrho\sigma$ non passa per alcuno di essi).

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la *a*). È facile vedere che dei 26 punti doppi di $r_1r_2r_3r_4\xi\eta$, 24 stanno su 4 circonferenze C_1, C_2, C_3, C_4 , con centro $(0, 0, 1)^{(2)}$, e gli altri due punti doppi sono $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$. Le 4 circonferenze sono $C_1 = ab(x_1^2 + x_2^2) - c(a+b)x_3^2$ passante per i 4 punti doppi di $r_1r_2r_3r_4$ (diversi da $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$) $C_2 = ab[3(a+b) + i(a-b)](x_1^2 + x_2^2) - c[ab + i(a^2 - b^2)]x_3^2$, con $i = \sqrt{-1}$, passante per i 4 punti comuni a ξ e a $r_1r_2 = ab(x_1 + x_2)^2 - c(a+b)x_3^2$ (e quindi per i 4 punti comuni a η e a $r_3r_4 = ab(x_1 - x_2)^2 -$

⁽²⁾ Affinchè il lettore segua meglio il discorso chiamiamo circonferenza una conica di $\mathbb{P}^2$ avente equazione $A(x_1^2 + x_2^2) + Bx_3^2 = 0$ e chiamiamo centro di una conica il polo della retta $x_3 = 0$, prendendo a prestito l'usuale nomenclatura della geometria euclidea.

$-c(a+b)x_3^2$; $C_3 = ab[3(a+b) - i(a-b)](x_1^2 + x_2^2) - c[ab - i(a^2 - b^2)]x_3^2$ passante per i 4 punti comuni a η e a r_1r_2 (e quindi per i 4 punti comuni a ξ e a r_3r_4); $C_4 = 3(a+b)(x_1^2 + x_2^2) - cx_3^2$ passante per i 4 punti comuni a ξ e a η .

Facendo i calcoli si vede che C_1, C_2, C_3, C_4 sono distinte tra loro e dalle (circonferenze) ϱ e σ . A titolo di esempio verifichiamo che C_1 è distinta da ϱ . Infatti se C_1 coincidesse con ϱ si avrebbe $-(c(a+b))/ab = = 3c/(a+b)$ da cui $a^2 + 5ab + b^2 = 0$ incompatibile con $a^2 + 3ab + b^2 = 0$ (se la caratteristica di k è $\neq 2$).

Ora per provare che i punti doppi di $r_1r_2r_3r_4\xi\eta$ sono tutti distinti basta verificare che $\xi\eta$ non passa per i punti doppi di $r_1r_2r_3r_4$ (e ciò è vero perchè C_1 è distinta da C_2 e C_3), che $r_1r_2r_3r_4$ non passa per i punti doppi di $\xi\eta$ (e ciò è vero perchè C_4 è distinta da C_2 e C_3) e infine che ξ ed η non sono tangenti (tra loro e) ad alcuna $r_j = \sqrt{ab}(x_1 \pm x_2) \pm \pm \sqrt{c(a+b)}x_3$, $j = 1, 2, 3, 4$, e cioè che C_2 e C_3 non sono tangenti ad alcuna r_j ; e quest'ultimo fatto è vero perchè il discriminante, rispetto a x_2/x_3 , di $C_2 = r_j = 0$, $\forall j$, è $\Delta_2 = 4abc[3(a+b) + i(a-b)] \cdot [5ab + i(a^2 - b^2)] \neq 0$, e il discriminante, rispetto a x_2/x_3 , di $C_3 = = r_j = 0$, $\forall j$, è $\Delta_3 = 4abc[3(a+b) - i(a-b)][5ab - i(a^2 - b^2)] \neq 0$.

Inoltre i punti doppi di $r_1r_2r_3r_4\xi\eta$ non appartengono alla curva $\varrho\sigma$, perchè le circonferenze C_1, C_2, C_3, C_4 sono distinte dalle circonferenze ϱ e σ .

E ciò prova la a).

Dimostriamo la b). φ è una quartica con 3 punti doppi a tangenti distinte in $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Inoltre δ incontra φ in 8 punti distinti, infatti il discriminante, rispetto a x_2/x_3 , di $\delta = \varphi = 0$ è $\Delta/4 = a^2b^2c^2$. (Infine i punti doppi di $r_1r_2r_3r_4\xi\eta$ sono distinti da quelli di $\delta\varphi$, anzi $\delta\varphi$ non passa neanche semplicemente per i punti doppi di $r_1r_2r_3r_4\xi\eta$ perchè dalla (7) anche $\varrho\sigma$ passerebbe per tali punti, contro la a); analogamente $\varrho\sigma$ non passa per alcun punto doppio di $\delta\varphi$).

E questo conclude la prova della proposizione.

NOTA 1. Abbiamo imposto alla quartica $\lambda_1\mu_2r_1r_2r_3r_4 - \lambda_2\mu_3\sigma^2$ tre punti doppi (in $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$) e non è possibile imporre ad essa un maggior numero di punti doppi, ad esempio quattro punti doppi, imponendo che tale quartica sia spezzata in due coniche, senza che vengano a cadere le proprietà della prop. 1; e ciò anche se considerassimo le curve $\alpha, \delta, r_1r_2r_3r_4, \varrho, \xi, \eta, \sigma$ nel caso più generale possibile (cfr. figura del n. 4), cioè α, δ del tipo $\alpha = ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2$, $\delta = a'x_1^2 + b'x_2^2 - c'x_3^2$, e le altre curve definite di conseguenza (cfr. anche la nota 2, n. 4).

Ora posto $\beta = \sqrt{-\lambda_3 \mu_3} \varrho \sigma = c(a-b) \varrho \sigma$, $\gamma = \delta \varphi$, si ha:

TEOREMA 1. *La superficie F^6 di equazione $\alpha x_0^4 + 2\beta x_0^2 + \gamma = 0$ ha 64 punti doppi conici (distinti) e non ha altre singolarità al di fuori di tali punti doppi.*

DIMOSTRAZIONE. Per la 2) del lemma 1, n. 2 (considerando $m = 2$, $n = 6$), per la 1) del lemma 2, n. 2 e per la a) della prop. 1, la F^6 ha 52 punti doppi conici distinti in corrispondenza dei 26 punti doppi distinti di $r_1 r_2 r_3 r_4 \xi \eta$; infatti la (7) con le notazioni di sopra si scrive $\lambda_1 \mu_1 r_1 r_2 r_3 r_4 \xi \eta \equiv \alpha \gamma - \beta^2 \equiv \Phi$.

Per la 3) del lemma 1, n. 2, per la 2) del lemma 2, n. 2 e per la b) della prop. 1, la F^6 ha 11 punti doppi conici distinti nei punti doppi della curva $(\delta \varphi \equiv \gamma) = x_0 = 0$.

La F^6 ha ancora un punto doppio conico in $P(1, 0, 0, 0)$ (distinto dai precedenti).

Infine la F^6 non ha altre singolarità al di fuori dei 64 punti doppi per la 1) del lemma 1, n. 2.

E questo conclude la prova del teorema.

4. — Consideriamo il piano π di coordinate proiettive omogenee x_1, x_2, x_3 , e indichiamo, come al solito, con uno stesso simbolo una curva algebrica di π e un polinomio omogeneo che uguagliato a zero ne dà l'equazione. Chiamiamo s_1, s_2, s_3, s_4 le 4 rette rappresentate dai 4 polinomi lineari omogenei $ux_1 \pm vx_2 \pm wx_3$ e poniamo

$$\begin{aligned} \delta_i &= (a_i v^2 + b_i u^2)(a_i x_1^2 + b_i x_2^2) - a_i b_i w^2 x_3^2 \\ \beta_{ij} &= [(a_i b_j + a_j b_i) u^2 + 2a_i a_j v^2] x_1^2 + \\ &\quad + [(a_i b_j + a_j b_i) v^2 + 2b_i b_j u^2] x_2^2 - (a_i b_j + a_j b_i) w^2 x_3^2 \end{aligned}$$

dove $u, v, w, a_i, b_i \in k$ e tali che tutti i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2 nelle δ_i e β_{ij} siano non nulli ed inoltre $a_i \neq b_i$.

Risulta:

$$(8) \quad \lambda_{ii} \delta_i \delta_j + \mu_{ij} \beta_{ij}^2 \equiv \nu_{ij} s_1 s_2 s_3 s_4 \quad \text{con } \lambda_{ii} = -4, \mu_{ij} = 1,$$

$\nu_{ij} = (a_i b_j - a_j b_i)^2$; al solito supponiamo $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$.

Fissando $i = 1, j = 2$ si ottiene

$$(9) \quad \lambda_{12} \delta_1 \delta_2 + \mu_{12} \beta_{12}^2 \equiv \nu_{12} s_1 s_2 s_3 s_4$$

e fissando $i = 3, j = 4$

$$(10) \quad \lambda_{34} \delta_3 \delta_4 + \mu_{34} \beta_{34}^2 \equiv \nu_{34} s_1 s_2 s_3 s_4,$$

e di qui moltiplicando membro a membro la (9) e la (10) si ha l'identità:

$$(11) \quad \lambda_{12} \lambda_{34} \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \equiv s_1 s_2 s_3 s_4 (\lambda_{12} \nu_{34} \delta_1 \delta_2 - \nu_{12} \mu_{34} \beta_{34}^2) + \mu_{12} \mu_{34} \beta_{12}^2 \beta_{34}^2.$$

La configurazione delle curve $s_1, s_2, s_3, s_4, \delta_i, \delta_j, \beta_{ij}$ si presenta come nella figura.

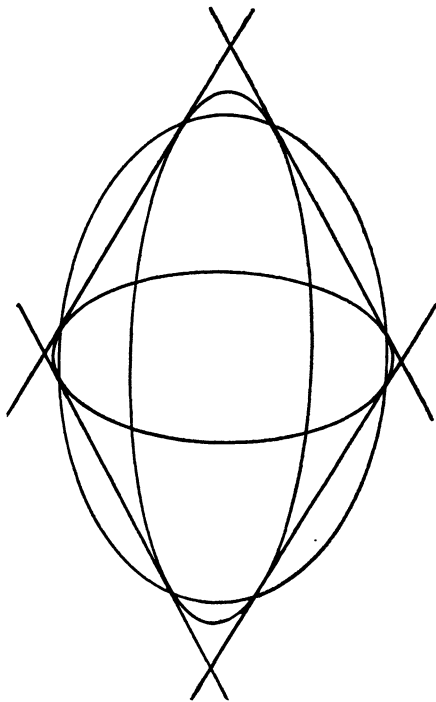


Fig. 2

Consideriamo ora la quartica $\lambda_{12} \nu_{34} \delta_1 \delta_2 - \nu_{12} \mu_{34} \beta_{34}^2$ e imponiamo che essa abbia tre punti doppi rispettivamente in $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Occorre allora annullare i coefficienti di x_1^4, x_2^4 e x_3^4 nella $\lambda_{12} \nu_{34} \delta_1 \delta_2 -$

— $\nu_{12}\mu_{34}\beta_{34}^2$, cioè occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 4a_1a_2(a_3b_4 - a_4b_3)^2(a_1v^2 + b_1u^2)(a_2v^2 + b_2u^2) + \\ \quad + (a_1b_2 - a_2b_1)^2[(a_3b_4 + a_4b_3)u^2 + 2a_3a_4v^2]^2 = 0, \\ 4b_1b_2(a_3b_4 - a_4b_3)^2(a_1v^2 + b_1u^2)(a_2v^2 + b_2u^2) + \\ \quad + (a_1b_2 - a_2b_1)^2[(a_3b_4 + a_4b_3)v^2 + 2b_3b_4u^2]^2 = 0, \\ 4a_1a_2b_1b_2(a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2(a_3b_4 + a_4b_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Poichè a noi interessa un esempio particolare di superficie, risolviamo il sistema di sopra in un caso particolare, perchè vedremo che tale caso ci consentirà di trovare la superficie che cerchiamo. Non ci siamo messi subito nel caso particolare per poter dimostrare in seguito, cfr. nota 2, che anche nel caso generale non si possono imporre alla quartica $\lambda_{12}\nu_{34}\delta_1\delta_2 - \nu_{12}\mu_{34}\beta_{34}^2$ più di tre punti doppi, senza che succedano «inconvenienti».

Consideriamo allora il caso particolare: $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1$, $a_3 = b_4$, $a_4 = b_3$, $u = v$. (Per tali valori β_{12} e β_{34} sono due circonferenze).

Il sistema diventa

$$\begin{cases} 4b_1b_2(b_3 - b_4)^2 + (b_1 - b_2)^2(b_3 + b_4)^2 = 0, \\ 4b_1^2b_2^2(b_3^2 - b_4^2) + (b_1^2 - b_2^2)^2(b_3^2 + b_4^2) = 0. \end{cases}$$

E con facili calcoli si ottiene

$$(12) \quad \begin{cases} 16b_1b_2b_3b_4 - (b_1 + b_2)^2(b_3 + b_4)^2 = 0, \\ [4b_1b_2b_3b_4 + (b_1^2 + b_2^2)(b_3^2 + b_4^2)][4b_1b_2b_3b_4 - (b_1^2 + b_2^2)(b_3^2 + b_4^2)] = 0. \end{cases}$$

Motivi simili a quelli indicati nella nota 2 seguente mostrano che deve essere $4b_1b_2b_3b_4 - (b_1^2 + b_2^2)(b_3^2 + b_4^2) \neq 0$.

Ricavando b_1 dalla seconda equazione del sistema e sostituendolo nella prima si ottiene

$$(13) \quad 8b_3b_4(b_3^2 + b_4^2) - (b_3^2 - b_4^2)^2 = 0.$$

Posto $x = b_3/b_4$ l'equazione si scrive $x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 8x + 1 = 0$. Poichè si tratta di un'equazione simmetrica (nei coefficienti) possiamo risolverla ponendo $x + 1/x = y$, quindi $y^2 - 2 = x^2 + 1/x^2$. In conclusione otteniamo $x = b_3/b_4 = 2 \pm \sqrt{5} \pm 2\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$.

Abbiamo l'arbitrarietà di scelta dei segni $\oplus$ e $\pm$. Per semplicità scegliamo $\oplus = \pm = +$. Ponendo $a = 2 + \sqrt{5}$ abbiamo:

$$\left. \begin{array}{l} b_3 = a + 2\sqrt{a} \\ b_4 = 1 \end{array} \right\} \text{ equivale a dire } 8b_3b_4(b_3^2 + b_4^2) - (b_3^3 - b_4^3)^2 = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} b_1 &= i(a + 2\sqrt{a} + i)^2, \\ b_2 &= (a + 2\sqrt{a})^2 + 1, \quad \text{con } i = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Con tale scelta speciale di b_i (e quindi di a_i) la (11) diventa:

$$(14) \quad \lambda_{12}\lambda_{34}\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 \equiv s_1s_2s_3s_4\psi + \mu_{12}\mu_{34}\beta_{12}^2\beta_{34}^2$$

con

$$\psi = -4(b_1 + b_2)^2(b_3^2 - b_4^2)^2u^2[(b_1 + b_2)^2u^2x_1^2x_2^2 + b_1b_2w^2(x_1^2 + x_2^2)x_3^2]$$

Ora e nel seguito non sostituiamo ulteriormente i valori di b_i per non complicare troppo l'espressione.

Osserviamo che con tale scelta di b_i (e di a_i) le curve $\delta_1, \delta_2, \beta_{12}, \dots$ rimangono irriducibili e distinte tra loro, inoltre i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2 nonchè ν_{12}, ν_{34} , rimangono diversi da zero. Tutto ciò si verifica facilmente. L'unica difficoltà, forse, è verificare che le nuove espressioni di β_{12}, β_{34} non coincidono a meno di una costante. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= (b_1 + b_2)^2u^2(x_1^2 + x_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)w^2x_3^2, \\ \beta_{34} &= (b_3 + b_4)^2u^2(x_1^2 + x_2^2) - (b_3^2 + b_4^2)w^2x_3^2 \end{aligned}$$

e se fosse

$$\frac{(b_1 + b_2)^2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{(b_3 + b_4)^2}{b_3^2 + b_4^2}$$

ne seguirebbe $4b_1b_2b_3b_4(b_3^2 + b_4^2) = 4b_3^2b_4^2(b_1 + b_2)$ e sostituendo la seconda del sistema (12) si avrebbe $b_3^4 + 6b_3^2b_4^2 + b_4^4 = 0$ che è incompatibile con la (13).

PROPOSIZIONE 2. *a) La curva $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ possiede 24 punti doppi a tangenti distinte, tutti distinti; nessuno dei quali appartiene alla curva $\beta_{12}\beta_{34}$.*

b) *La curva $s_2 s_3 s_4 \psi$ ha 18 punti doppi a tangenti distinte, distinti tra loro (e dai precedenti).*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la a). È facile vedere che i 24 punti doppi di $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$ stanno su 4 circonferenze di centro $(0, 0, 1)$; esse passano per i 4 punti comuni a due curve δ_i, δ_j e sono da essi individuate. Indicando con C_{ij} la circonferenza passante per i punti comuni a δ_i e δ_j , si ha:

$$C_{12} = (b_1 + b_2)^2 u^2 (x_1^2 + x_2^2) - 2b_1 b_2 w^2 x_3^2$$

$$C_{13} = (b_1 + b_2)(b_3 + b_4)(b_2 b_3 - b_1 b_4) u^2 (x_1^2 + x_2^2) - [b_1 b_2 (b_3^2 - b_4^2) - b_3 b_4 (b_1^2 - b_2^2)] w^2 x_3^2$$

$$C_{14} = (b_1 + b_2)(b_3 + b_4)(b_2 b_4 - b_1 b_3) u^2 (x_1^2 + x_2^2) - [b_1 b_2 (b_4^2 - b_3^2) - b_3 b_4 (b_1^2 - b_2^2)] w^2 x_3^2$$

$$C_{34} = (b_3 + b_4)^2 u^2 (x_1^2 + x_2^2) - 2b_3 b_4 w^2 x_3^2.$$

Si verifica immediatamente che $b_2 b_3 - b_1 b_4 \neq 0$ e $b_2 b_4 - b_1 b_3 \neq 0$.

Facendo i calcoli si vede che le circonferenze C_{ij} sono tutte distinte tra loro e dalle circonferenze β_{12} e β_{34} . A titolo di esempio verifichiamo che C_{12} non coincide con C_{13} e che C_{13} non coincide con β_{12} . (È utile osservare, per risparmiare qualche calcolo, nelle ulteriori verifiche, che C_{34} si ottiene da C_{12} sostituendo b_3 a b_1 e b_4 a b_2 e che C_{14} si ottiene da C_{13} sostituendo b_4 a b_3 e b_3 a b_4). Verifichiamo che C_{12} è distinta da C_{13} . Infatti se le due circonferenze coincidessero, si avrebbe

$$\frac{(b_1 + b_2)(b_3 + b_4)(b_2 b_3 - b_1 b_4)}{b_1 b_2 (b_3^2 - b_4^2) - b_3 b_4 (b_1^2 - b_2^2)} = \frac{(b_1 + b_2)^2}{2b_1 b_2}$$

e svolgendo i calcoli $16b_1 b_2 b_3 b_4 (b_3 + b_4)^2 = 16b_3^2 b_4^2 (b_1 + b_2)^2$. Dalla prima equazione del sistema (12) se ne deduce

$$(b_1 + b_2)^2 (b_3 - b_4)^2 [(b_3 + b_4)^2 + 4b_3 b_4] = 0.$$

Ma si ha $b_1 + b_2 \neq 0$, $b_3 - b_4 \neq 0$ e abbiamo già detto che $(b_3 + b_4)^2 + 4b_3 b_4 = 0$ è incompatibile con la (13).

Verifichiamo che C_{13} è distinta da β_{12} . Infatti se le due circonferenze

coincidessero, si avrebbe

$$\frac{(b_1 + b_2)(b_3 + b_4)(b_2b_3 - b_1b_4)}{b_1b_2(b_3^2 - b_4^2) - b_3b_4(b_1^2 - b_2^2)} = \frac{(b_1 + b_2)^2}{b_1^2 + b_2^2}$$

e svolgendo i calcoli $(b_1 - b_2)(b_2b_3 - b_1b_4)^2 = 0$. E questo non è possibile perchè, come abbiamo già detto, $b_1 - b_2 \neq 0$ e $b_2b_3 - b_1b_4 \neq 0$.

Ora per verificare che i punti doppi della curva $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ sono tutti distinti, basta verificare che le circonferenze C_{ij} sono tutte distinte tra loro e che δ_1, δ_2 non sono bitangenti nè a δ_3 nè a δ_4 . Abbiamo già verificato che le C_{ij} sono tutte distinte tra loro; facendo i calcoli si vede che δ_1, δ_2 non sono tangenti nè a δ_3 nè a δ_4 . Verifichiamo, ad esempio, che δ_1 non è bitangente a δ_3 . Infatti consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \delta_1 \equiv (b_1 + b_2)u^2(b_2x_1^2 + b_1x_2^2) - b_1b_2w^2x_3^2 = 0 \\ \delta_3 \equiv (b_3 + b_4)u^2(b_4x_1^2 + b_3x_2^2) - b_3b_4w^2x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Moltiplico la prima per $b_3(b_3 + b_4)$, dalla seconda ricavo

$$b_3(b_3 + b_4)u^2x_2^2 = b_3b_4w^2x_3^2 - u^2b_4(b_3 + b_4)x_1^2$$

che sostituito nella prima dà

$$(b_1 + b_2)(b_3 + b_4)(b_2b_3 - b_1b_4)u^2x_1^2 + b_1b_3(b_1b_4 - b_2b_3)w^2x_3^2 = 0$$

dove i coefficienti di x_1^2 e di x_3^2 sono diversi da zero e quindi le due radici sono distinte. Analogamente per l'equazione in x_2^2 e in x_3^2 .

I punti doppi di $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ non appartengono alla curva $\beta_{12}\beta_{34}$ perchè, come abbiamo visto, le circonferenze C_{ij} sono distinte dalle circonferenze β_{12} e β_{34} .

Dimostriamo la b). I 18 punti doppi a tangenti distinte della curva $s_2s_3s_4\psi$ sono i 3 punti comuni alle 3 rette s_j , i punti comuni a s_j e a ψ ($j=2, 3, 4$) e i 3 punti doppi di ψ . Per dimostrare che sono tutti distinti tra loro basta far vedere che nessuna delle rette s_j è tangente a ψ . Infatti si ha

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ s_j = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} (b_1 + b_2)^2u^2x_1^2x_2^2 + b_1b_2w^2(x_1^2 + x_2^2)x_3^2 = 0 \\ u(x_1 \pm x_2) \pm wx_3 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo wx_3 nella prima equazione, si ottiene,

$$b_1b_2x_1^4 \pm 2b_1b_2x_1^3x_2 + [(b_1 + b_2)^2 + 2b_1b_2]x_1^2x_2^2 \pm 2b_1b_2x_1x_2^3 + b_1b_2x_2^4 = 0.$$

Ponendo $x = x_1/x_2$, dividendo per x^2 e ponendo ancora $x + 1/x = y$, si ottiene $b_1b_2y^2 \pm 2b_1b_2y + (b_1 + b_2)^2 = 0$. Ora se fosse $\Delta/4 = 0$ ne seguirebbe $b_1b_2[b_1b_2 - (b_1 + b_2)^2] = 0$. Ricordando che $b_1 = i(b_3 + ib_4)^2$, $b_2 = b_3^2 + b_4^2$ si avrebbe allora $(b_3^2 + b_4^2 - 4b_3b_4)[i(b_3^2 - b_4^2) - 2b_3b_4] = 0$, che è incompatibile con la (13).

Ricavando

$$y = \frac{-(\pm b_1b_2) \pm \sqrt{b_1^2b_2^2 - b_1b_2(b_1 + b_2)^2}}{b_1b_2},$$

occorre ancora verificare che il discriminante Δ di $x + 1/x = y$ è diverso da zero. Infatti se fosse $\Delta = 0$ ne seguirebbe $8b_1b_2 + (b_1 + b_2)^2 = 0$ da cui scrivendo b_1 e b_2 in funzione di b_3 e b_4 , si avrebbe

$$[2b_3b_4 - 5(b_3^2 + b_4^2)][2b_3b_4 - i(b_3^2 - b_4^2)] = 0$$

incompatibile con la (13).

(Infine i punti doppi di $s_2s_3s_4\psi$ sono distinti dai punti doppi di $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$, perchè la curva $s_2s_3s_4\psi$ non passa per alcuno dei punti doppi di $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ altrimenti, dalla (14), anche $\beta_{12}\beta_{34}$ passerebbe per tali punti, contro la a)).

E questo conclude la prova della proposizione.

NOTA 2. Non si possono imporre alla quartica $\lambda_{12}\nu_{34}\delta_1\delta_2 - \nu_{12}\mu_{34}\beta_{34}^2$ (che compare nella (11)) più di tre punti doppi senza far cadere le proprietà della prop. 2. Infatti facendo i calcoli si può vedere che se imponiamo a tale quartica di avere quattro punti doppi, cioè di spezzarsi in due coniche $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, queste risultano degeneri e poichè $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ è tangente alle otto rette $s_1s_2s_3s_4\varepsilon_1\varepsilon_2$ nei punti dove $\beta_{12}\beta_{34}$ incontra $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$, un certo numero di punti di contatto è doppio per $s_1s_2s_3s_4\varepsilon_1\varepsilon_2$ oppure per $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ e $\beta_{12}\beta_{34}$ passa per tali punti doppi.

Ora posto $\alpha = s_1$, $\beta = \sqrt{-\mu_{12}\mu_{34}\beta_{12}\beta_{34}}$ e $\gamma = s_2s_3s_4\psi$, si ha:

TEOREMA 2. *La superficie F^7 di equazione $\alpha x_0^6 + 2\beta x_0^3 + \gamma = 0$ ha 90 punti doppi isolati (distinti) di cui 72 sono punti doppi conici e 18 punti doppi biplanari. Inoltre non ha altre singolarità al di fuori di tali punti doppi.*

DIMOSTRAZIONE. Per la 2) del lemma 1, n. 2 (considerando $m = 3$, $n = 7$), per la 1) del lemma 2, n. 2 e per la a) della prop. 2, la F^7 ha 72 punti doppi conici distinti in corrispondenza dei 24 punti doppi distinti (a tangenti distinte) di $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$; infatti la (14) con le notazioni di sopra si scrive $\lambda_{12} \lambda_{34} \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \equiv \alpha \gamma - \beta^2$.

Per la 3) del lemma 1, n. 2, per la 2) del lemma 2, n. 2 e per la b) della prop. 2, la F^7 ha 18 punti doppi biplanari distinti tra loro e dai precedenti nei punti doppi della curva $(s_2 s_3 s_4 \psi \equiv \gamma) = x_0 = 0$. Infine la F^7 non ha altre singolarità, al di fuori dei 90 punti doppi, per la 1) del lemma 1, n. 2.

E questo conclude la prova del teorema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. B. BASSET, *The maximum number of double points on a surface*, Nature, **73** (1906), p. 246.
- [2] A. B. BASSET, *On the singularities of surfaces*, Quart. Journ., **38** (1907), pp. 63-83.
- [3] E. G. TOGLIATTI, *Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi*, Rend. Sem. Mat., Torino, **9** (1950), pp. 47-59.
- [4] E. G. TOGLIATTI, *Una notevole superficie del 5° ordine con soli punti doppi isolati*, Festschrift R. Fueter, Zürich (1940), pp. 127-132.
- [5] B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche*, Atti Acc. Ligure, **10**, fasc. 1 (1952), pp. 15-22.
- [6] H. O. KREISS, *Über syzygetische Flächen*, Annali di Mat., (4), **41** (1955), pp. 105-111.
- [7] E. STAGNARO, *Sopra certe superficie algebriche con singolarità isolate*, Le Matematiche, **23**, fasc. 2 (1968), pp. 338-343.
- [8] D. GALLARATI, *Intorno a certe superficie algebriche aventi un elevato numero di punti singolari isolati*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, **11**, fasc. 6 (1951), pp. 344-347.
- [9] D. GALLARATI, *Alcune riflessioni intorno ad una nota del prof. B. Segre*, Atti Acc. Ligure, **9**, fasc. 1 (1952), pp. 1-7.
- [10] D. GALLARATI, *Una superficie dell'ottavo ordine con 160 nodi*, Atti. Acc. Ligure, **14** (1957), pp. 1-7.
- [11] D. GALLARATI, *Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, **12**, fasc. 1 (1952), pp. 70-75.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 ottobre 1978.