

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CATERINA CUMINO

Sulla seminormalità delle superficie algebriche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 58 (1977), p. 91-100

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__91_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulla seminormalità delle superficie algebriche.

CATERINA CUMINO (*)

SUMMARY : We give a characterization of seminormal surfaces in 4-space, in terms of their singularities. From this we deduce that, if $\text{char } \hat{k} = 0$, a generic projection in $\mathbf{P}^4(k)$ of a smooth projective surface is seminormal.

Introduzione.

In questa nota ci proponiamo di caratterizzare le superficie seminormali dello spazio a quattro dimensioni in termini di singolarità.

Il primo risultato a cui perveniamo (Teor. 1) asserisce che tali superficie possono avere solo : (1) curve al più triple e di tipo generale ; (2) punti normali isolati ; (3) punti singolari isolati in cui il cono tangente si spezza in due piani incontrantisi in un punto.

Da questo risultato si deduce (Teor. 2) che la proiezione generica in $\mathbf{P}^4(k)$ di una superficie non singolare è, se k ha caratteristica 0, una superficie seminormale.

La dimostrazione del Teor. 1 si fonda su un risultato di E. Davies per gli anelli seminormali di dimensione 1, (per quanto riguarda le curve multiple, cfr. Prop. 2), e su uno studio degli anelli locali, eccellenti, seminormali, di profondità 1, di dimensione 2 e dimensione di immersione non maggiore di 4, per i punti isolati non normali. Questo studio è riassunto nella Prop. 3 e si fonda essenzialmente sulla nozione di incollamento introdotta in [T],

(*) Indirizzo dell'A : Istituto Matematico del Politecnico, Torino.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Durante lo svolgimento del presente lavoro l'A. ha usufruito di un assegno M.P.I.

(cfr. Prop. 1), e ci permette, tra l'altro, di dare delle equazioni analitiche esplicite per tali singolarità.

Notiamo infine che risultati analoghi per le curve e per le ipersuperficie sono già noti, mentre nulla si sa ancora per le superficie di spazi di dimensione maggiore di 4, o per varietà algebriche di dimensione superiore. Per maggiori dettagli si veda il paragrafo 1.

1. – In questo paragrafo ricordiamo esplicitamente alcuni fatti preliminari ed enunciamo i risultati principali del lavoro.

Tutti gli anelli che consideriamo sono noetheriani, commutativi e dotati di identità.

DEFINIZIONE 1. Sia A un anello, B un sopraanello di A , intero su A . Diciamo *seminormalizzazione di A in B* l'anello:

$${}^+_B A = \{b \in B \mid \forall x \in \text{spec}(A), b_x \in A_x + \text{Rad}(B_x)\}$$

(dove $\text{Rad}(B_x)$ è l'intersezione di tutti gli ideali massimali di B_x). Se $A = {}^+_B A$, allora A è detto *seminormale* (abbreviato: *SN*) in B . Se B è la normalizzazione di A (cioè la chiusura di A nel suo anello totale delle frazioni) si pone ${}^+A = {}^+_B A$ e se $A = {}^+A$, A è detto *SN*.

DEFINIZIONE 2. Sia A un anello, B un sopraanello di A , finito su A (cioè intero e di tipo finito), sia $x \in \text{spec}(A)$, x_1, \dots, x_n i punti di $\text{spec}(B)$ sopra x e $\omega_i: k(x) \rightarrow k(x_i)$ gli omomorfismi canonici. Sia A' il sottoanello di B contenente A che consiste di tutti i $b \in B$ tali che per ogni i , $b(x_i) \in \omega_i k(x)$ e per ogni i, j , $\omega_i^{-1}(b(x_i)) = \omega_j^{-1}(b(x_j))$; si dice che A' si ottiene da B per *incollamento sopra il punto x di $\text{spec}(A)$* .

Vale il seguente risultato (cfr. [T], Teor. 2.1):

PROPOSIZIONE 1. *Sia A un anello ridotto avente normalizzazione \bar{A} finita. A è SN se e solo se esiste una successione $\bar{A} = A(0) \supseteq \supseteq A(1) \supseteq \dots \supseteq A(n) = A$; dove $A(i+1)$ è ottenuto da $A(i)$ con un numero finito di incollamenti sopra ideali primi di altezza $i+1$.*

Useremo inoltre le definizioni seguenti:

DEFINIZIONE 3. Sia C una curva irriducibile di una superficie V e sia x il suo punto generico (nel senso degli schemi). Sia $A = \mathcal{O}_x$, allora:

- 1) la molteplicità di C (o di x) è la molteplicità dell'anello locale A ;
- 2) diciamo che C è *di tipo generale* se la dimensione di immersione di A coincide con la sua molteplicità e il cono tangente spec $(gr(A))$ nel punto generico è ridotto.

OSSERVAZIONE 1. In particolare se C contiene un punto semplice di V , allora C è di tipo generale (di molteplicità 1).

OSSERVAZIONE 2. Supponiamo che il corpo base k abbia caratteristica 0 , allora la Def. 3 vuol dire che il cono tangente nel punto generico x di C , pensato nella chiusura algebrica di $k(x)$, si spezza in rette distinte il cui numero è uguale alla molteplicità di C , (cfr. [D], caso (b), del Cor. 1, Teor. 1).

Queste considerazioni fanno pensare che la Def. 3 equivalga a dire che esiste un aperto non vuoto $U \subseteq C$ tale che per ogni punto chiuso $y \in U$ il cono tangente a V in y si spezza in piani distinti il cui numero è uguale alla molteplicità di C e che inoltre questi piani siano disposti in posizione « sufficientemente generica ». Torneremo su questo argomento in un successivo lavoro.

DEFINIZIONE 4. Sia (V, \mathbf{O}_V) una varietà algebrica ; diciamo che è *SN* se \mathbf{O}_x è *SN* per ogni x di V .

Per gli altri concetti e notazioni usati nel seguito, rimandiamo a [M] e [ZS].

Nel presente lavoro ci proponiamo di studiare le singolarità delle superficie *SN*, dimostrando tra l'altro, i seguenti risultati :

TEOREMA 1. *Sia k un corpo algebricamente chiuso, V una superficie di $\mathbf{A}^4(k)$, (o $\mathbf{P}^4(k)$). Allora V è *SN* se e solo se le sue singolarità sono :*

- (a) *curve di tipo generale e al più triple ;*
- (b) *punti doppi isolati dove il cono tangente si spezza in due piani che si incontrano in un punto ;*
- (c) *punti normali (isolati).*

Se inoltre k ha caratteristica O :

TEOREMA 2. *La proiezione generica in $\mathbf{P}^4(k)$ di una superficie non singolare è una superficie SN , le cui singolarità si ottengono con un incollamento.*

OSSERVAZIONE 1. Per varietà SN generiche non sono noti risultati completi, salvo che in dimensione 1. (Infatti in $[D]$ e in $[Bo]$ si trova una caratterizzazione degli anelli locali SN di dimensione 1).

Qualche informazione sulle superficie SN di $\mathbf{P}^3(k)$ (k algebricamente chiuso e di caratteristica O) si può trarre dal :

TEOREMA : una ipersuperficie è SN se e solo se le sue sotto-varietà singolari di codimensione 1 sono biiperplanari. (cfr. $[GT]$, 9.1). Ossia : una superficie di $\mathbf{P}^3(k)$ è SN se e solo se contiene soltanto singolarità isolate o curve doppie biplanari ; (cfr. $[C]$).

OSSERVAZIONE 2. Per le proiezioni generiche di varietà proiettive non singolari su un corpo k algebricamente chiuso e di caratteristica O , è noto il seguente fatto :

TEOREMA : una ipersuperficie complessa, proiezione generica di una varietà non singolare, è SN ; (cfr. $[GT]$ e $[Bo]$ per le superficie).

Per curve (cfr. $[Bo]$) e superficie complesse (cfr. Teor. 2) non singolari, la proiezione generica è SN ; invece in generale non si sa.

OSSERVAZIONE 3. Il Teor. 2 asserisce che una superficie di $\mathbf{P}^4(k)$ che sia una proiezione generica di una superficie di $\mathbf{P}^5(k)$ non singolare si ottiene da questa per incollamento. Un simile risultato vale per le curve. Non è noto se ciò sia vero in generale.

2. - In questo paragrafo studiamo le curve irriducibili di una superficie di $\mathbf{A}^n(k)$ e ne diamo una caratterizzazione applicando un risultato di E. Davies (cfr. $[D]$, Teor. 1) sugli anelli SN di dimensione 1.

PROPOSIZIONE 2. *Sia V una superficie ridotta di $\mathbf{A}^n(k)$, (k anche non algebricamente chiuso). Sia C una curva irriducibile di V ; se V è SN , C è una curva di tipo generale avente molteplicità al più $n - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A l'anello delle coordinate di V ; poniamo $B = k[X_1, \dots, X_n]$, allora risulta $A = B/I$, con I ideale di B ; e, per ogni ideale primo \mathfrak{p} di A , $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}/I$, dove \mathfrak{P} è un ideale primo di B che contiene I . Come è noto la dimensione di immersione di un anello locale è il minimo numero di generatori del suo ideale massimale; si ha quindi, se \mathfrak{p} è un ideale primo di altezza 1, $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = 1$ e $\dim(B_{\mathfrak{P}}) = \text{ht}(\mathfrak{P}) = n - 1$; da cui, essendo B regolare:

$$1 \leq \text{endim}(A_{\mathfrak{p}}) \leq n - 1.$$

Inoltre $A_{\mathfrak{p}}$ è *SN* (cfr. [T] Cor. 2.2); d'altra parte $A_{\mathfrak{p}}$ è *SN* (cfr. [D] Teor. 1) se e solo se $\text{gr}(A_{\mathfrak{p}})$ è ridotto e $e(A_{\mathfrak{p}}) = \text{emdim}(A_{\mathfrak{p}})$, dunque:

$$1 \leq e(A_{\mathfrak{p}}) \leq n - 1$$

ossia quanto si voleva, tenendo conto della Def. 3.

ESEMPIO. Per ogni n esiste una superficie *SN* di $\mathbb{A}^n(k)$, avente una curva di tipo generale di molteplicità massima, ossia $n-1$. Ad esempio consideriamo la sottovarietà di $\mathbb{A}^{n-1}(k)$ costituita dagli assi coordinati, cioè la sottovarietà associata all'ideale $I = (\dots, X_i X_j, \dots)$, ($i \neq j$). Sia A l'anello delle coordinate della sottovarietà, allora abbiamo:

$$A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]/I = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$$

e $\dim(A) = 1$. Sia poi $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ l'ideale massimale di A corrispondente all'origine; si ha:

$$\text{emdim}(A_{\mathfrak{m}}) = e(A_{\mathfrak{m}}) = n - 1$$

ne segue, per [D], che la sottovarietà considerata è *SN*, essendo normali tutti gli altri suoi punti. Consideriamo ora l'anello dei polinomi nella indeterminata X_n :

$$A[X_n] = k[x_1, \dots, x_{n-1}][X_n] = k[X_1, \dots, X_n]/J.$$

Abbiamo che $\dim(A[X_n]) = 2$ e inoltre, (cfr. [GT] 5.1 e 5.2), $A[X_n]$ è *SN*. La superficie che ha $A[X_n]$ come anello delle coordinate possiede una curva di tipo generale e di molteplicità $n - 1$, cioè l'asse X_n .

3. — Per poter giungere alla dimostrazione dei teoremi enunciati nel paragrafo 1, prendiamo ora in esame alcune proprietà degli anelli locali; in particolare caratterizziamo gli anelli locali SN di punti di profondità 1 di una superficie di $\mathbf{A}^4(k)$.

LEMMA 1. *Sia A un anello locale con ideale massimale \mathfrak{m} e corpo residuo k , B un sopraanello di A finito su A ; siano $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ gli ideali massimali di B . Se A è ottenuto incollando $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ sopra \mathfrak{m} , allora, posto $K_i = B/\mathfrak{m}_i$, si ha.*

$$\text{emdim}(A) = \sum_i \text{emdim}(B_{\mathfrak{m}_i}) [K_i : k].$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi che A sia un incollamento segue subito che $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$. D'altra parte, poichè B è finito su A , il corpo K_i è, per ogni i , una estensione di grado finito del corpo k ; sia $[K_i : k]$ il grado di questa estensione e $\{a_{ij} | 1 \leq j \leq [K_i : k]\}$ una k -base per K_i . Consideriamo il k -spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; si ha $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$, dove $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$ è uno spazio vettoriale su K_i per ogni i . Sia poi $\{e_{is} | 1 \leq s \leq K_i\text{-dim}(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2)\}$ una K_i -base per $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$; allora $\{a_{ij} e_{is}\}$ è, per ogni i , una k -base per $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$. Siccome ogni elemento di questa base si può identificare con un elemento di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, l'insieme $\{a_{ij} e_{is} | 1 \leq i \leq n\}$ può essere assunto come k -base per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Segue allora che:

$$k\text{-dim}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \sum_i K_i\text{-dim}(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2) [K_i : k]$$

e quindi la tesi per definizione di dimensione di immersione.

COROLLARIO 1. *Sia A un anello locale quoziente di un anello regolare, di dimensione d , con ideale massimale \mathfrak{m} , corpo residuo k , normalizzazione \bar{A} finita e regolare. Siano poi $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ gli ideali massimali di \bar{A} . Se A è ottenuto incollando $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ sopra \mathfrak{m} , allora, posto $K_i = \bar{A}/\mathfrak{m}_i$, si ha:*

(a) $\text{emdim}(A) = d \sum_i [K_i : k]$

(b) $e(A) = \sum_i [K_i : k]$

DIMOSTRAZIONE. Risulta, per ogni i , $\text{dim}(\bar{A}_{\mathfrak{m}_i}) = d$, (cfr. EGA, IV, parte 2^a, 5.4.3); essendo poi gli $\bar{A}_{\mathfrak{m}_i}$ regolari per ipotesi, posto

$B = \bar{A}$, la (a) segue subito dal Lemma 1 precedente. Siamo inoltre nelle ipotesi del Cor. 1 del Teor. 24, Vol. II, [ZS] e quindi :

$$e(A) = \sum_i e(\bar{A}_{m_i}) [K_i : k]$$

da cui, visto che per ogni i $e(\bar{A}_{m_i}) = 1$, segue immediatamente la (b).

COROLLARIO 2. *Con le notazioni del Lemma 1 sia A un anello locale ridotto, quoziente di un anello regolare. Supponiamo che $\dim(A) = 2$ e $\text{emdim}(A) \leq 4$, allora se A si ottiene incollando m_1, \dots, m_n su m , vale uno e uno solo dei seguenti casi :*

- (a) $A = B$.
- (b) B è locale regolare con $[K : k] = 2$ (e quindi $\text{emdim}(A) = 4$).
- (c) B è regolare e ha due ideali massimali m_1 e m_2 con $K_1 = K_2 = k$ (e quindi $\text{emdim}(A) = 4$).

DIMOSTRAZIONE. Infatti si ha per ogni i , (cfr. EGA, IV, parte 2^a, 5.4.3), $\text{emdim}(B_{m_i}) \geq \dim(B_{m_i}) = 2$; e per il Lemma 1 può verificarsi solo una delle seguenti possibilità :

- (a) $n = 1$; $\text{emdim}(B_{m_1}) = 2, 3, 4$; $K_1 = k$ e quindi $m = m_1$.
- (b) $n = 1$; $\text{emdim}(B_{m_1}) = 2$; $[K_1 : k] = 2$.
- (c) $n = 2$; $\text{emdim}(B_{m_1}) = \text{emdim}(B_{m_2}) = 2$; $K_1 = K_2 = k$.

PROPRIETÀ 3. *Sia A un anello locale eccellente con ideale massimale m e corpo residuo k ; supponiamo che $\dim(A) = 2$, $\text{prof}(A) = 1$ e $\text{emdim}(A) \leq 4$. Sono equivalenti :*

- 1) A è SN;
- 2) A è ottenuto da \bar{A} per incollamento sul massimale m ;
- 3) $m = \text{rad}(\bar{A})$ e vale uno dei casi seguenti :
 - (a) \bar{A} è locale regolare e il corpo residuo è una estensione quadratica di k ;
 - (b) \bar{A} è regolare con due ideali massimali e i corpi residui coincidono con k ;

- 4) $A = k[[X, Y, Z, T]]/(Z^2 + bXZ + cX^2, T^2 + bTY + cY^2, dXY - ZT, XT - YZ)$ con $b, c, d \in k$ e $(b^2 - ac) \neq 0$ oppure $\text{char } k = 2, b = 0, c$ non quadrato in k ;
- 5) $\text{gr}(A)$ è ridotto, $e(A) = 2, \text{emdim}(A) = 4$.

DIMOSTRAZIONE. (1) \Rightarrow (2). Infatti A è *SN* se e solo se esiste una successione del tipo $\bar{A} = A(0) \supseteq A(1) \supseteq A(2) = A$, (cfr. Prop. 1); inoltre se $A = A(i)$, allora gli ideali primi di A di profondità 1 hanno altezza al più i (cfr. [T], Teor. 2.3), e quindi nel nostro caso deve essere $A = A(2)$. Abbiamo poi $A(1) = \bar{A}$; altrimenti \mathfrak{m} conterrebbe ideali primi di altezza 1 sui quali c'è stato incollamento, ma allora avremmo per il Lemma 1:

$$\text{emdim}(A) = \sum_i \text{emdim}(A(1)_{\mathfrak{p}_i}) [\mathcal{K}_i : k] \leq 4$$

(dove \mathfrak{p}_i sono gli ideali massimali di $A(1)$ sopra \mathfrak{m}), e quindi, posto $B = A(1)$, per il Cor. 2 si avrebbe un assurdo. Ne segue che A si ottiene da \bar{A} con un incollamento sopra \mathfrak{m} .

(2) \Rightarrow (3). Per il Cor. 2 e per il fatto che non può essere $A = \bar{A}$, altrimenti (cfr. [M] cap. 6), non sarebbe $\text{prof}(A) = 1$.

(3) \Rightarrow (4). In queste ipotesi non è restrittivo supporre A completo, infatti, siccome $\mathfrak{m} \subseteq \text{rad}(\bar{A})$, le proprietà (a) e (b) valgono per \hat{A} se e solo se valgono per \bar{A} (cfr. [GS], Prop. 6.4 e Teor. 8.3); e $\hat{A} = \bar{A}$; allora, nell'ipotesi (b) $\bar{A} = k[[X, Y]] \oplus k[[Z, T]]$ e quindi

$$A = A + \text{rad}(\bar{A}) = k[[X, Y, Z, T]]/(XZ, XT, YZ, YT);$$

nell'ipotesi (a), $\bar{A} = k(u)[[U, V]]$, dove u è un elemento algebrico di grado 2 su k ; quindi $\text{rad}(\bar{A}) = (U, V)\bar{A}$ e $A = A + \text{rad}(\bar{A}) = k + (U, V)\bar{A}$. Sia $C = k[[U, V, uU, uV]]$; se $F \in A$, $F = f_0 + f_1 + \dots + f_i + \dots$, dove $f_0 \in k$ e per $i > 0$, f_i è un polinomio omogeneo di grado i di $k(u)[U, V]$; poichè F si può identificare con un elemento di C e viceversa, abbiamo $A = C$. Inoltre per le relazioni:

$$u^2 + bu + c = 0; u^2UV = (uU)(uV); U(uV) = (uU)V,$$

si ha: $C = k[[X, Y, Z, T]]/(Z^2 + bXZ + cX^2, T^2 + bTY + cY^2, dXY - ZT, XT - YZ)$ con $b, c, d \in k$.

(4) \Rightarrow (5). È noto che se $\mathfrak{m} = (m_1, \dots, m_q)$, posto $R = \text{gr}(A)$, gli elementi $\bar{m}_i = m_i \bmod \mathfrak{m}^2$ generano l'ideale massimale omogeneo \mathfrak{M} di R e che inoltre si ha :

$$\mathfrak{M} R_{\mathfrak{M}} / (\mathfrak{M} R_{\mathfrak{M}})^2 = \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2 ; \quad e(\text{gr}(A)_{\mathfrak{M}}) = e(A).$$

(5) \Rightarrow (1). Siano ${}^+A$ la seminormalizzazione di A , \mathfrak{m}' il suo ideale massimale. L'inclusione $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$ ci permette di definire una applicazione di k -spazi vettoriali $f: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ con $\text{Ker } f = (\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{m})/\mathfrak{m}^2$. Per il lemma di Nakayama abbiamo che A è SN se e solo se f è un isomorfismo. Siccome poi $e(A) = e({}^+A)$, (cfr. [ZS], vol. II, Cor. 1 del Teor. 24, pag. 299) e $\dim(A) = 2$, si ha, per il Lemma 1, $\text{emdim}({}^+A) = 4$ e perciò dalle ipotesi segue che $k\text{-dim}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = k\text{-dim}(\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2)$. Supponiamo ora per assurdo che A non sia SN ; allora deve essere $\mathfrak{m}'^2 \cap \mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$ e quindi esiste $x \in \mathfrak{m}$, $x \in \mathfrak{m}'^2$, con $x \notin \mathfrak{m}^2$. Allora $x^n \in \mathfrak{m}'^{2n}$, ma per n abbastanza grande $\mathfrak{m}'^n \subseteq \mathfrak{m}$, in quanto ${}^+A$ è un incollamento di \bar{A} su \mathfrak{m} e perciò \mathfrak{m}' è il radicale del conduttore di A in \bar{A} . Per un tale n si ha $x^n \in \mathfrak{m}$, $x^n \in \mathfrak{m}^2$, ossia la forma iniziale di x in $\text{gr}(A)$ è nilpotente, contro l'ipotesi che $\text{gr}(A)$ sia ridotto.

COROLLARIO 1. *Se x è un punto k -razionale di profondità 1 di una superficie ridotta di $\mathbf{A}^4(k)$, allora O_x è SN se e solo se x è un punto doppio in cui il cono tangente è spezzato in due piani distinti che si incontrano in un punto.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti posto $A = O_x$, se \mathfrak{m} è l'ideale massimale di A , abbiamo $A/\mathfrak{m} = k$ ed $\text{emdim}(A) \leq 4$; allora siamo nel caso 4) della Prop. 3.

COROLLARIO 2. *Sulle curve multiple di una superficie ridotta e SN di $\mathbf{A}^4(k)$ non esistono punti di profondità 1.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teor. 2.3, [T].

Dimostriamo ora i teoremi enunciati nel paragrafo 1.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOR. 1. È noto che un anello A è SN se e solo se lo sono gli anelli $A_{\mathfrak{p}}$, quando \mathfrak{p} è un ideale primo di A di profondità 1 ([GT] Cor. 2.7). La tesi del teorema segue quindi dal precedente Cor. 1 e dalla Prop. 2.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOR. 2. Consideriamo una superficie V' non singolare di $\mathbf{P}^5(k)$, (k algebricamente chiuso e di caratteristica O). Si sa che, considerata la sua proiezione generica V in $\mathbf{P}^4(k)$, V' risulta essere la normalizzazione di V , ([S], cap. III). Se inoltre x è un punto singolare di V , allora x è un punto doppio isolato in cui il cono tangente è spezzato in due piani distinti che si incontrano in un punto e al di sopra di x ci sono esattamente due punti di V' (cfr. [B], cap. IX, § 12). D'altra parte la proiezione generica di una superficie non singolare di $\mathbf{P}^N(k)$, $N > 5$, in $\mathbf{P}^5(k)$, è non singolare; si ha quindi la tesi per il Teor. 1 e per la Prop. 3.

BIBLIOGRAFIA

- [B] E. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1927.
- [Bo] E. BOMBIERI, *Seminormalità e singolarità ordinarie*, Symp. Math. XI (1973), 205-210.
- [C] N. CHIARLI, *Sulla seminormalità di certe superfici algebriche*, Atti Acc. Scienze di Torino 108 (1973-74), 605-611.
- [D] E. DAVIES, *On the geometric interpretation of seminormality*, Proc. AMS (to appear).
- [GS] S. GRECO, P. SALMON, *Topics in m-adic topologies*, Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [GT] S. GRECO, C. TRAVERSO, *On seminormal schemes* (in preparation).
- [EGA] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique*, ch. IV, Publ. Math. 20, 24, 28, 32; I.H.E.S. 1964-67.
- [M] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, Benjamin, New York 1970.
- [S] I. R. SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
- [T] C. TRAVERSO, *Seminormality and Picard Group*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 24(1970), 585-595.
- [ZS] O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand Company, Princeton 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 giugno 1977.