EDUARDO H. A. GONZALEZ

Regolarità per il problema della goccia appoggiata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 25-33

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__25_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Regolarità per il problema della goccia appoggiata.

EDUARDO H. A. GONZALEZ (*)

0. - Introduzione.

In un precedente lavoro (vedi [1]) ho considerato il problema di minimizzare il funzionale

$$\mathfrak{F}_\nu(E) = \int_{\{x_n > 0\}} |D\varphi_E| + \nu \int_{\{x_n = 0\}} \varphi_E \, dH_{n-1} + \int_E x_n \, dx \tag{0.1}$$

nella classe ε degli insiemi $E \subset \mathbb{R}^n$ di misura 1 e perimetro finito e contenuti nel semispazio $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, cioè

$$\varepsilon = \left\{ E \subset \mathbb{R}^n \cap \{x_n > 0\} : \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_E| < +\infty, \; H_n(E) = 1 \right\} \tag{0.2}$$

giungendo a dimostrare il seguente teorema di esistenza:

TEOREMA 0.1.

a) Per $-1 < \nu \leq 1$ esiste $E_0 \in \varepsilon$ tale che

$$P_\nu(E_0) = \inf_\varepsilon P_\nu$$

b) $E_0 \cap \{x_n = t\}$ è una sfera $(n-1)$ dimensionale (eventualmente vuota) t-quasi ovunque.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università di Trento - Povo (Trento).

c) Inoltre E_0 si può scegliere appartenente alla sottofamiglia $\varepsilon^s \subset \varepsilon$ di tutti gli insiemi che hanno sezioni orizzontali sferiche centrate sull'asse x_n.

In questo lavoro mi propongo di dimostrare

1^0) Che se E_0 minimizza (0.1) allora (a meno di traslazioni) E_0 appartiene necessariamente a ε^s.

2^0) E_0 è limitato.

3^0) Posto

$$\varrho(t) = \left(\omega_{n-1}^{-1} \int\limits_{y \in \mathbb{R}^{n-1}} \varphi_{E_0}(y\,,t)\,dy\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{0.3}$$

esiste $m > 0$ tale che $\varrho(t) > 0$ per quasi ogni $t \in (0\,,m)$ e $\varrho(t) = 0$ per quasi ogni $t > m$.

4^0) $\partial E_0 \cap \{0 < x_n < m\}$ è regolare

5^0) $(0\,,\ldots,0\,,m) = V$ è un punto regolare di ∂E_0 (regolarità al vertice).

Nota: In un prossimo lavoro (vedi [2]) sarà dimostrata la convessità della soluzione E_0 e quindi la regolarità in $x_n = 0$.

1. - Simmetria rispetto all'asse x_n della soluzione.

L'idea seguita è stata usata in [3].

Sia Π il piano ortogonale all'asse x_1 tale che, posto $P = (a\,,o,\ldots,o)$ la sua intersezione con tale asse, sia

$$H_n(E_0 \cap \{x_1 < a\}) = H_n(E_0 \cap \{x_1 > a\}). \tag{1.1}$$

Vediamo che E_0 è simmetrico rispetto al piano Π. Anzitutto, se

$$M_1 = \int\limits_{\{x_n>0\}\cap\{x_1>a\}} |D\varphi_E| + \nu \int\limits_{\{x_n=0\}\cap\{x_1>a\}} \varphi_E\,dH_{n-1} + \int\limits_{E\cap\{x_1>a\}} x_n\,dx \tag{1.2}$$

$$M_2 = \int\limits_{\{x_n>0\}\cap\{x_1<a\}} |D\varphi_E| + \nu \int\limits_{\{x_n=0\}\cap\{x_1<a\}} \varphi_E\,dH_{n-1} + \int\limits_{E\cap\{x_1<a\}} x_n\,dx\,, \tag{1.3}$$

allora $M_1 = M_2$. Infatti, se fosse ad esempio $M_1 < M_2$, posto $\tilde{E}$ l'insieme definito da

$$(1.4) \qquad x \in \tilde{E} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq a \\ \text{oppure} \\ x_1 > a \quad \text{e} \quad (a - x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_0 \end{cases}$$

si avrebbe avviamente $\mathfrak{F}_\nu(\tilde{E}) < \mathfrak{F}_\nu(E_0)$, il che, insieme alla (1.1) contraddirebbe la scelta di E_0. Quindi $M_1 = M_2$ da cui $\mathfrak{F}_\nu(\tilde{E}) = \mathfrak{F}_\nu(E_0)$ e perciò $\tilde{E}$ è un'altro minimo del funzionale $\mathfrak{F}_\nu$. Dalla parte *b*) del teorema 0.1 segue quindi che E_0 deve essere simmetrico rispetto al piano Π.

2. - Limitatezza di E_0.

In [1] si è già dimostrato che esiste $R > 0$ tale che, posto

$$(2.1) \qquad B_R(0) = \{ y \in \mathbf{R}^{n-1} : |y| < R \}$$

si ha $E_0 \subset B_R(0) \times [0, +\infty]$. Dimostriamo ora che esiste $L > 0$ tale che

$$(2.2) \qquad E_0 \subset B_R(0) \times [0, L].$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbe una sfera B centrata sull'asse x_n,

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} B &= \{(y, t) : y \in \mathbf{R}^{-1}, |y|^2 + |t - c|^2 \leq R_1^2 \} = \\ &= \{(y, t) : y \in \mathbf{R}^{-1}, |y| \leq r(t) = \sqrt{\mathrm{R}_1^2 - t^2} \} \end{aligned}$$

tale che, posto

$$(2.4) \qquad B^+ = B \cap \{ x_n > 0 \},$$

si ha

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} & r(0) = \varrho(0) \\ & H_n \{ x \in E_0 : x_n > c + R_1 \} = H_n(B^+ - E_0). \end{aligned}$$

Siano

$$E_1 = B^+ \cup \left(E_0 \cap \{ x_n \leq c + R_1 \}\right) \tag{2.6}$$

$$E_2 = (B^+ \cap E_0) \cup \{ x \in E_0 : x_n > c + R_1 \}. \tag{2.7}$$

È chiaro allora che $H_n(E_2) = H_n(B^+)$. Da questo fatto e dal fatto che $r(0) = \varrho(0)$, segue, in virtù della proprietà isoperimetrica della sfera (vedi [4] oppure [5]) che

$$\int_{\{x_n > 0\}} |D\varphi_{E_2}| \geq \int_{\{x_n > 0\}} | D\varphi_{B^+} |$$

e cioè

$$\int_{\{x_n>0\}} |D\varphi_{E_2}| = \int_{\{x_n > c+R_1\}} |D\varphi_{E_0}| + \int_{\substack{\{x:r(x_n)>\varrho(x_n)\}\cap\\ \cap\{0<x_n\leqslant c+R_1\}}} |D_{E_0}| + \int_{\substack{\{x:r(x_n)\leqslant\varrho(x_n)\}\cap\\ \cap\{0<x_n\leqslant c+R_1\}}} |D\varphi_{B^+}| \geq \tag{2.8}$$

$$\geq \int_{\{x_n>0\}} |D\varphi_{B^+}|$$

per cui

$$\int_{\{x_n>c+R_1\}} |D\varphi_{E_0}| + \int_{\substack{\{x:r(x_n)>\varrho(x_n)\}\cap\\ \cap\{0<x_n\leqslant c+R_1\}}} |D\varphi_{E_0}| \geq \int_{\substack{\{x:r(x_n)>\varrho(x_n)\}\cap\\ \cap\{0<x_n\leqslant c+R_1\}}} |D\varphi_{B^+}|. \tag{2.9}$$

Quindi :

$$\int_{\{x_n>0\}} |D\varphi_{E_1}| = \int_{\substack{\{x:r(x_n)>\varrho(x_n)\}\cap\\ \cap\{0<x_n\leqslant c+R_1\}}} |D\varphi_{E^+}| + \int_{\substack{\{x:r(x_n)\leqslant\varrho(x_n)\}\cap\\ \cap\{0<x_n\leqslant c+R_1\}}} |D\varphi_{E_0}| \leq \int_{\{x_n>0\}} |D\varphi_{E_0}| \tag{2.10}$$

Da questa, notando che

$$\int_{E_1} x_n\, dx < \int_{E_0} x_n\, dx \tag{2.11}$$

segue che $\mathfrak{F}_\nu(E_1) < \mathfrak{F}_\nu(E_0)$, assurdo poichè $H_n(E_1) = H_n(E_0)$ c.v.d.

3. - Notiamo che

$$\min_{t \to t_0} \lim \omega_{n-1} \varrho^{n-1}(t) = 0 \Rightarrow \varrho(t) = 0 \quad \text{per quasi ogni } t > t_0 . \tag{3.1}$$

Infatti, essendo E_0 di perimetro finito (vedi ad esempio [6]), esistono i limiti

$$\lim_{t \to t_0^+} \omega_{n-1} \varrho^{n-1}(t) \quad , \quad \lim_{t \to t_0^-} \omega_{n-1} \varrho^{n-1}(t) \tag{3.2}$$

ed il minimo limite (3.1) è uguale al più piccolo dei limiti (3.1). Ma allora uno di questi due limiti deve essere zero e questo vuol dire che si verifica una delle due possibilità seguenti:

$$(3.3) \begin{cases} H_{n-1} \text{ della traccia di } E_0 \cap \{x_n > t\} \text{ su } \{x_n = t_0\} \text{ è nulla} \\ H_{n-1} \text{ della traccia di } E_0 \cap \{x_n < t\} \text{ su } \{x_n = t_0\} \text{ è nulla.} \end{cases}$$

Ma allora, posto $\tilde{E}$ l'insieme definito da

$$\tilde{E} \cap (B_R(0) \times [0 , L]) = E_0 \cap \{x_n < t\}$$

$$E - (B_R(0) \times [0 , L]) = \left\{ x : (x_1 - R , x_2 , \ldots , x_{n-1} , x_n + t_0) \in E_0 \cap \{x_n > t_0\} \right\}$$

si avrebbe che

$$\mathfrak{F}_\nu(\tilde{E}) < \mathfrak{F}_\nu(\tilde{E}_0)$$

il che contraddirebbe la scelta di E_0. Quindi, vale la (3.1).

Ne segue che esiste $m \in (0 , L]$ tale che

$$\min_{t \to t_0} \lim \varrho(t) > 0 \quad \forall\ t_0 < m \tag{3.4}$$

$$H_1 \{ t > m : \varrho(t) > o \} = 0 . \tag{3.5}$$

4. - Regolarità (primo passo).

Consideriamo adesso il punto $(a, 0, \ldots, 0, b)$ con $0 < b < m$ e $a^2 = \varrho^2(b)$ appartenente a $\partial E_0 \cap \{0 < x_n < m\}$ (essendo E_0 simmetrico rispetto all'asse x_n la scelta $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ non toglie alcuna generalità al discorso). Allora, fissato $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo $\left(\varepsilon < \min \lim\limits_{t \to b} \varrho(t)\right)$ esiste $\delta > 0$ tale che $\varrho(t) > \varepsilon \ \forall\, t \in (b - \delta, b + \delta)$.

Sia $\delta_0 < \min\{\delta, \varepsilon, b\}$. Si vede subito che, posto

$$B_{\delta_0}(0, b) = \{(x_2, \ldots, x_n) : x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + (x_n - b)^2 < \delta_0^2\}$$

esiste una funzione $f : B_{\delta_0}(0, b) \to (\varepsilon, R)$, $f \in BV(B_{\delta_0})$ tale che

$$\begin{aligned}(4.1) \qquad & \partial E_0 \cap \left(B_{\delta_0} \times [0, +\infty]\right) = \\ & = \{(x_1, \ldots, x_n) : (x_2, \ldots, x_n) \in B_{\delta_0} \text{ e } x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)\}.\end{aligned}$$

I discorsi fatti finora ci permettono di dire che in particolare f minimizza il funzionale

$$(4.2) \qquad \mathfrak{L}_\nu(g) = \int\limits_{B\delta_0} \sqrt{1 + |Dg|^2}\, dx_2 \ldots dx_n + \int\limits_{\partial B_{\delta_0}} |g - f|\, dH_{n-2} + \int\limits_{B_{\delta_0}} \int\limits_0^g x_n\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

nella classe

$$(4.3) \qquad \mathcal{C} = \left\{ g \in BV(B_{\delta_0}) : \int\limits_{B_{\delta_0}} g\, dx_2 \ldots dx_n = \text{costante} \right\}$$

Allora è noto che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (moltiplicatore di Lagrange) tale che il problema di minimizzare il funzionale (4.2) nella classe (4.3) sia equivalente a minimizzare il funzionale

$$(4.4) \qquad \mathfrak{L}_\nu^{(\lambda)}(g) = \int\limits_{B_{\delta_0}} \sqrt{1 + |Dg|^2}\, dx_2 \ldots dx_n + \int\limits_{\partial B_{\delta_0}} |g - f|\, dH_{n-2} \int\limits_{B_{\delta_0}} \int\limits_0^g (x_n + \lambda)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \text{ in } BV(B_{\delta_0}).$$

Ricordo ora il seguente teorema di [7], p. 7:

TEOREMA: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto, sia f un minimo in $BV(\Omega)$ del funzionale

$$L(g) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dg|^2}\, dx + \int_{\Omega} \int_0^g H(x, t)\, dt\, dx + \int_{\partial\Omega} |f - g|\, dH_{n-2}\,.$$

Supponiamo inoltre che $H \in C^{0,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ sia strettamente crescente in t. Allora f è localmente lipschitriana (e quindi analitica) in Ω.

Applicando questo teorema al funzionale $L_\nu^{(\lambda)}$ (con $H(x, t) = t + \lambda$ e tenendo conto che E_0 è simmetrico rispetto all'asse x_n si ottiene subito il seguente risultato di regolarità:

TEOREMA 4.1.

$\partial E_0 \cap \{0 < x_n < m\}$ è una varietà analitica $(n-1)$ dimensionale.

5. - Regolarità al vertice.

Dimostreremo adesso che se $a_0 > 0$ è un punto di minimo relativo stretto per ϱ, allora $\varrho(t) = 0$ per quasi ogni $t > a_0$. Dal teorema 4.1 sappiamo che la funzione $\varrho : (0, m) \to \mathbb{R}$ è regolare.

Se $\varrho(a_0) = 0$, non c'è niente da dimostrare (vedi 3.1). Supponiamo quindi $\varrho(a_0) > 0$. Ma allora dovrà esistere almeno un punto $a_1 \in (a_0, m]$ di massimo relativo per ϱ con $\varrho(a_1) > \varrho(a_0)$. Allora un piccolo argomento di continuità mostra l'esistenza di a_2, a_3, a_4, r tali che

$$\begin{aligned} &a_2 < a_0 < a_3 < a_1 < a_4 \\ &\varrho(a_0) < r = \varrho(a_2) = \varrho(a_3) = \varrho(a_4) < \varrho(a_1). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Quindi, posto

$$\hat{\varrho}(t) = \begin{cases} \varrho(t) \text{ per } 0 \le t \le a_2, & a_4 \le t < +\infty \\ \varrho(t - a_4 + a_3) & \text{per } a_2 + a_4 - a_3 \le t \le a_4 \\ \varrho(t + a_3 - a_2) & \text{per } a_2 \le t \le a_2 + a_4 - a_3 \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\hat{E}_0 = \{(y\,,t) \in \mathbb{R}^n \;:\; |y|^2 \le \hat{\varrho}^2(t)\}$$

si ha che

$$(5.3) \qquad \int_{\{x_n>0\}} |D\varphi_{E_0}| = \int_{\{x_n>0\}} |D\varphi_{\hat{E}_0}| \quad , \quad \int_{\{x_n=0\}} \varphi_{E_0}\, dH_{n-1} = \int_{\{x_n=0\}} \varphi_{\hat{E}_0}\, dH_{n-1}$$

$$\int_{\hat{E}_0} x_n\, dx < \int_{E_0} n_n\, dx$$

e ovviamente $H_n(\hat{E}_0) = H_n(E_0)$, il che contraddirebbe la scelta di E_0.

Da questo discorso segue che esiste $a \in [0\,, m)$ con $\varrho(a) > 0$ tale che $\varrho(t)$ è non crescente per $t > a$ e quindi, posto

$$(5.4) \qquad G = \{\, y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y|^2 < \varrho^2(a) \,\}$$

si ha che $\partial E_0 \cap \{t > a\}$ si può rappresentare come il grafico di una funzione $f \in BV\,(G)$. La regolarità di tale f discende da un discorso del tutto analogo a quello fatto nel paragrafo 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] GONZALEZ E., *Sul problema della goccia appoggiata*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. 55 (1976).

[2] GONZALEZ E., TAMANINI I., *Convessità della goccia appoggiata*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 58 (1977).

[3] SERAPIONI R., *Proprietà di minimo della catenoide nella classe degl insiemi di perimetro finito* (in corso di stampa).

[4] DE GIORGI E., *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Memorie Accad. Naz. Lincei, Ser. 8 Vol. 5 (1958).

[5] GONZALEZ E., GRECO G., *Una nuova dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera*. Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII, Sc. Mat. Vol. XXIII, 251-256 (1977).

[6] MIRANDA M., *Comportamento delle successioni Convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. di Padova, Vol. 38 (1967).

[7] Gerhardt C., *Existence and Regularity of Capillary Surfaces.* Boll. U.M.I. (4) **10** (1974).
[8] Massari U., *Esistenza e Regolarità delle Ipersuperfici di Curvatura Media Assegnata in* R^n , Arch. Rat. Mech. and Analysis, vol. 55, 4 (1974).

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 maggio 1977.