CARLO DOMENICO PAGANI

# Approssimazione delle soluzioni del primo problema dei valori al contorno per equazioni paraboliche

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 58 (1977), p. 215-240
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__215_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 58 (1977)

# Approssimazione delle soluzioni del primo problema dei valori al contorno per equazioni paraboliche (*)

Carlo Domenico Pagani (**)

## 1. - Introduzione.

In questo lavoro considereremo equazioni paraboliche lineari del secondo ordine del tipo

$$u_t - \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(t, x)\, u_{x_i x_h} = f(t, x) \tag{1.1}$$

con coefficienti reali, misurabili e limitati. Per queste equazioni esamineremo il primo problema di valori al contorno in aperti $\Omega$ di $R^{m+1}$.

La letteratura riguardante questo problema è assai vasta; osserviamo però che esso viene generalmente studiato in domini cilindrici e assumendo una qualche regolarità dei coefficienti: si vedano ad esempio, i due classici testi [7], [13].

Nel caso di domini non cilindrici vari problemi sono ancora aperti; tra i molti lavori in questo campo, citiamo, a titolo d'esempio, [11], [14], [19], [20]; in particolare notiamo che anche per la semplice equazione del calore (con una sola variabile spaziale) non è noto quali condizioni di compatibilità vadano imposte sui

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

(**) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano, Via Bonardi 9, Milano (Italia).

dati al contorno perchè esista una soluzione del problema, sufficientemente regolare: [12, § 2]. Notiamo anche che questo problema rientra come caso particolare in quello della risolubilità del primo problema di valori al contorno per equazioni ellittico-paraboliche, cioè per equazioni (del secondo ordine), con forma caratteristica semidefinita: si veda, a questo proposito, [12], [15].

Quanto alle ipotesi di regolarità che generalmente si fanno sui coefficienti, citiamo, solo a titolo d'esempio: per coefficienti hölderiani [7], per coefficienti continui [8], [9], [5], per coefficienti differenziabili (in senso generalizzato) [10], [2], per coefficienti discontinui, con qualche proprietà di sommabilità (ma allora l'equazione è in forma di divergenza) [13, cap. III]. Risultati nel caso di coefficienti soltanto misurabili e limitati sono stati ottenuti in [1], [21] ma per equazioni non troppo «diverse» dall'equazione del calore.

I risultati ottenuti nel presente lavoro e i metodi utilizzati sono una «trasposizione parabolica» di risultati e metodi esposti in [18] per l'equazione ellittica. Osserviamo anche che, con gli stessi metodi, è stato studiato in [16], il primo problema di valori al contorno per l'equazione ellittico-parabolica:

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\, u_{x_i x_k} = f(x) \quad (a_{ik}(x)\, \xi_i\, \xi_k \geq 0 \text{ per ogni vettore } \xi \in R^m) .$$

Il risultato principale ottenuto consiste in ciò: se una soluzione (appartenente ad una determinata classe funzionale) del primo problema al contorno per l'equazione (1.1) esiste, questa è approssimata uniformemente dalle soluzioni di certe equazioni integrali (le quali esistono e sono uniche). Queste equazioni integrali simulano, in un certo senso, il problema differenziale. Questo metodo di approssimazione assomiglia (nel senso precisato nella sezione 3.5) al metodo Monte Carlo.

La classe funzionale alla quale si suppone debba appartenere la soluzione del problema è quella delle funzioni continue. Bisogna allora precisare in quale senso una funzione semplicemente continua sia soluzione dell'eq. (1.1): occorre cioè definire una opportuna classe di soluzioni generalizzate dell'eq. (1.1).

La generalizzazione del concetto di soluzione che viene data generalmente per le equazioni in forma di divergenza [13, cap. III] non può essere utilizzata qui, poichè supponiamo che i coefficienti

$a_{ik}$ dell'equazione (1.1) non abbiano alcuna regolarità. Si dà perciò, nel § 2, una diversa definizione di soluzione generalizzata, suggerita, come si mostra nel prossimo paragrafo, da un teorema approssimato della media per l'equazione (1.1).

Il § 3 contiene i risultati principali riguardanti il primo problema di valori al contorno per la (1): nelle sezioni 3.1 e 3.2 si imposta il problema e si enunciano i risultati (Teoremi 3.1 e 3.2); la sezione 3.3 contiene le dimostrazioni; la sezione 3.4 contiene un'osservazione sulla funzione di Green per il problema in esame. Infine, nella sezione 3.5, si mette in luce una analogia tra il procedimento di approssimazione illustrato e il « metodo Montecarlo » utilizzato per trattare il problema di Dirichlet per equazioni ellittiche (cfr., per esempio [4]).

## 2. – Operatori parabolici generalizzati.

Descriviamo ora un metodo per definire una classe di soluzioni generalizzate di equazioni paraboliche. Considereremo operatori del tipo

$$-\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(t\,,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} \tag{2.1}$$

con coefficienti misurabili e limitati e verificanti la condizione

$$\mu\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\leq\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\ (t,x)\ \xi_i\,\xi_k\leq M\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2 \tag{2.2}$$

per ogni $t\in R$, $x$ e $\xi\in R^m$, con $\mu$ e $M$ costanti positive.

### 2.1

Siano $t$, $\tau$ elementi di $R$; $x$, $\xi$ elementi di $R^m$; $y=(t\,,x)$ e $\eta=(\tau\,,\xi)$ elementi di $R^{m+1}$. Consideriamo una funzione misurabile

$$P:\ R^{m+1}\times R^{m+1}\to R$$

dotata delle seguenti proprietà:

i) $P(y\,;\,\eta) \geq 0$ per ogni $y$ e $\eta$;

ii) $\int_{R^{m+1}} P(y\,;\,\eta)\, d\eta = 1$ per ogni $y$

iii) $\int_{R^{m+1}} P(y\,;\,\eta)\, \xi_k \, d\eta = 0$ per $k = 1,2, \dots, m$ e per ogni $y$

iv) $\int_{R^{m+1}} P(y\,;\,\eta)\, \tau \, d\eta = -C$ per ogni $y$, dove $C$ è una opportuna costante;

v) $\int_{R^{m+1}} P(y\,;\,\eta)\, \xi_i\, \xi_k \, d\eta = 2\,C\, a_{ik}(y)$ $(i, k = 1, 2, \dots, m)$;

vi) $\int_{R^{m+1}} (1 + |\tau| + |\xi|^2)\, [\operatorname{ess\,sup}_{y \in R^{m+1}} P(y\,;\,\eta)]\, d\eta < +\infty$.

Nel § 2.2 daremo un esempio di funzione $P$ dotata delle richieste proprietà (i) - (vi).

Sarà utile la seguente notazione:

$$P_\varepsilon(y\,;\,y - \eta) = P(t, x\,;\, -(t - \tau)/\varepsilon\,,\ (x - \xi)/\varepsilon^{1/2}) \tag{2.3}$$

Sia $0 \leq \varepsilon \to \mathcal{S}(\varepsilon)$ la funzione a valori operatoriali così definita:

$$\text{(2.4)}\quad \begin{cases} \mathcal{S}(0) = \text{l'operatore identità} \\ \mathcal{S}(\varepsilon)\, u(y) = \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\,y - \eta)\ u(\eta) d\eta & (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

Dalle proprietà (i) e (ii) si verifica subito che $\mathcal{S}(\varepsilon)$ è una contrazione in $L^\infty(R^{m+1})$; infatti

$$\|\mathcal{S}(\varepsilon) u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{y \in R^{m+1}} \left| \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\,y - \eta)\, u(\eta)\, d\eta \right| \leq \|u\|_\infty . \tag{2.5}$$

Notiamo, per completezza, che $\mathcal{S}(\varepsilon)$ è un operatore limitato in $L^p(R^{m+1})$ per ogni $p \geq 1$ ; infatti si prova subito che $\mathcal{S}(\varepsilon)$ è limitato in $L^1(R^{m+1})$ :

$$\|\mathcal{S}(\varepsilon)\, u\|_1 \leq n(\varepsilon)\|u\|_1 \tag{2.6}$$

avendo posto

$$n(\varepsilon) = \operatorname*{ess\,sup}_{\eta \in R^{m+1}} \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\, y - \eta)dy = \tag{2.7}$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{(\tau,\xi)\in R^{m+1}} \int_{R^{m+1}} P(\tau - \varepsilon t\,,\ \xi + \varepsilon^{1/2}\, x\,;\ t\,, x)\ dt\ dx$$

$n(\varepsilon)$ è limitato essendo

$$n(\varepsilon) \leq \int_{R^{m+1}} \left[\ \operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in R^{m+1}} P(\eta\ ;\ y)\right] dy$$

ed essendo l'ultimo integrale finito grazie alla (vi).

Per interpolazione abbiamo poi

$$\|\,\mathcal{S}(\varepsilon)\, u\,\|_p \leq n(\varepsilon)^{1/p}\,\|\,u\,\|_p \tag{2.8}$$

Consideriamo ora $\mathcal{S}(\varepsilon)$ come un operatore limitato in $L^\infty(R^{m+1})$ : calcoliamo la derivata, in $\varepsilon = 0$ , della funzione $0 \leq \varepsilon \to \mathcal{S}(\varepsilon)$ e indichiamola con $C\,L$, $C$ essendo la costante che compare in (iv) e (v). Dunque l'operatore $L$ risulta così definito :

(i) il dominio $D(L)$ è l'insieme di tutte le funzioni $u$ in $L^\infty(R^{m+1})$ tali che $(\mathcal{S}(\varepsilon)\, u - u)/\varepsilon$ ammette limite in $L^\infty(R^{m+1})$ quando $\varepsilon \downarrow 0$ ;

(ii) per ogni $u \in D(L)$, $Lu$ è il limite $\big($in $L^\infty(R^{m+1})\big)$ di $\big(\mathcal{S}(\varepsilon)\, u - u\big)/C\varepsilon$ per $\varepsilon \downarrow 0$ .

TEOREMA 2.1 : *l'operatore $L$ precedentemente definito è una estensione dell'operatore differenziale*

$$-\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,(t\,, x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} :$$
$$L^\infty(R^{m+1}) \supset W^{1,2}_\infty\,(R^{m+1}) \to L^\infty\ (R^{m+1})\,. \tag{2.9}$$

$W^{1,2}_{\infty}(R^{m+1})$ è l'insieme delle funzioni limitate $u(t, x)$ definite in $R^{m+1}$, che possiedono le derivate $u_t$ e $u_{x_i x_k}$ $(i, k = 1, \dots, m)$ limitate e uniformemente continue.

DIMOSTRAZIONE: sia $u \in W^{1,2}_{\infty}(R^{m+1})$; scriviamo $\mathcal{S}(\varepsilon)\, u(y)$ nella forma seguente:

$$\mathcal{S}(\varepsilon)\, u(t, x) = \int_{R^{m+1}} P(t, x; \tau, \xi)\, u(t + \varepsilon\tau, x - \varepsilon^{1/2}\xi)\, d\tau\, d\xi .$$

Dalla formula di Taylor ricaviamo

$$u(t + \varepsilon\tau, x - \varepsilon^{1/2}\xi) = u(t, x) + \varepsilon\tau\, u_t(t, x) - \varepsilon^{1/2} \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}(t, x)\, \xi_i +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,k=1}^{m} u_{x_i x_k}(t, x)\, \xi_i \xi_k + \varepsilon(|\tau| + |\xi|^2)\, R(t, x; \varepsilon\tau, \varepsilon^{1/2}\xi)$$

e la funzione $R(y; \eta)$ è tale che

$$(2.10) \qquad \|R(\cdot\,; \eta)\|_{\infty} \text{ è limitata in } \eta \quad \text{e} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\eta| \rightarrow 0 .$$

Dunque abbiamo

$$\mathcal{S}(\varepsilon)\, u(y) = u(y) \int_{R^{m+1}} P(y; \eta)\, d\eta + \varepsilon\, u_t(y) \int_{R^{m+1}} P(y; \eta)\, \tau\, d\eta +$$

$$- \varepsilon^{1/2} \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}(y) \int_{R^{m+1}} P(y; \eta)\, \xi_i\, d\eta + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,k=1}^{m} u_{x_i x_k}(y) \int_{R^{m+1}} P(y; \eta)\, \xi_i \xi_k\, d\eta +$$

$+$ il resto

e perciò, grazie alle proprietà (ii)-(v) della funzione $P$, abbiamo

$$\mathcal{S}(\varepsilon) u(y) - u(y) = C\varepsilon \left( - u_t(y) + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(y)\, u_{x_i x_k}(y) \right) + \text{il resto} .$$

Il resto può essere stimato così:

$$\|\text{il resto}\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{(t,x)\,\in\,R^{m+1}} \Big\{ \varepsilon \Big| \int_{R^{m+1}} P(t,x;\tau,\xi)\,(|\tau| + |\xi|^2)\,R(t,x;\varepsilon\tau,\varepsilon^{1/2}\xi)\,d\tau\,d\xi \Big|$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{(t,x)\in R^{m+1}} \Big\{ \varepsilon \int_{R^{m+1}} P(t\,,x\,;\tau\,\xi)\,(|\tau| + |\xi|^2)\,\|R(\cdot\,,\cdot\,;\varepsilon\tau\,,\varepsilon^{1/2}\,\xi)\|_\infty\,d\tau\,d\xi \Big\}$$

$$= o\,(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \downarrow 0$$

grazie alla proprietà (vi) della funzione $P$ e alla (2.10).

Il teorema 2.1 è così dimostrato. Esso ci consente di definire una specie di soluzioni generalizzate delle equazioni paraboliche.

## 2.2

Forniamo ora un esempio di funzione $P$ verificante le proprietà (i) ... (vi) del precedente paragrafo. A questo scopo dimostreremo innanzitutto un « teorema della media » approssimato per le soluzioni dell'equazione $Lu = f$, dove $L$ è un operatore del tipo (2.1).

TEOREMA 2.2: *Sia $L$ l'operatore differenziale definito dalla* (2.1) *ove $a(y)$ è una matrice simmetrica i cui coefficienti* (*misurabili e limitati in $R^{m+1}$*) *verificano la condizione* (2.2). *Sia $u = u(t\,,x)$ una funzione della classe $C^{1,2}\,(\Omega_y)$, cioè una volta differenziabile con continuità rispetto a $t$ e due volte rispetto a $x$ in un intorno $\Omega_y$ del punto $y = (t\,,x)$. Allora risulta*:

$$\text{(2.10)} \qquad \frac{1}{mis\,Q(y\,;a)} \int_{Q(y\,;a)} u(\eta)\,d\eta - u(y) = \frac{a^2}{2(m+2)}\,Lu(y) + o\,(a^2)\,.$$

Nella (2.10) $Q(y\,;a)$ è un tronco di cilindro così definito:

$$\text{(2.11)} \qquad Q(y\,;a) = Q(t\,,x\,;a) \equiv \mathcal{E}(y\,;a) \times ]\,t - a^2/(m+2), t\,[$$

dove si è posto

$$\text{(2.12)} \qquad \mathcal{E}(y\,;a) \equiv \{\,\eta = (\tau\,,\xi) \in R^{m+1} : \tau = t\,,\ |a(t\,,x)^{-1/2}\,(\xi - x)| < a\,\}\,;$$

$|\xi|$ indica la lunghezza (in $R^m$) del vettore $\xi$. Dalle precedenti definizioni otteniamo:

(2.13) mis $Q(y\,;\,\alpha)$, la misura (in $R^{m+1}$) del cilindro $Q(y\,;\,\alpha)$, $=$

$$= \alpha^2/(m+2) \text{ mis } \mathcal{E}(y\,;\,\alpha) = \frac{\alpha^{m+2}\,\omega_m}{m(m+2)} \det\, a(t\,,x)^{\frac{1}{2}}$$

Dimostrazione : dalla formula di Taylor ricaviamo

$$(2.14)\quad u\big(t-\tau, x+a(t,x)^{1/2}\xi\big)=u(t,x)-\tau u_t(t,x)+\big(a(t,x)^{1/2}\xi, D_x u(t,x)\big)+ \\ +\frac{1}{2}\big(a(t\,,x)^{1/2}\,\xi\,,\ a(t\,,x)^{1/2}\,\xi\ D_x^2\,u(t\,,x)\big)+o(|\xi|^2+\tau|\xi|+\tau^2)\,;$$

$D_x u$ indica il gradiente (rispetto a $x$) e $D_x^2 u$ la matrice Hessiana di $u$; cosicchè, indicando con $b_{ik}$ gli elementi della matrice $a^{\frac{1}{2}}$ abbiamo :

$$(a^{1/2}\,\xi\,,\ D_x u) = \sum_{i,k=1}^{m} b_{i_k}\, u_{x_i}\, \xi_k$$

$$(a^{1/2}\,\xi\,,\ a^{1/2}\,\xi\, D_x^2 u) = \sum_{i,j,k,l=1}^{m} u_{x_i x_k}\, b_{ij}\, b_{kl}\, \xi_j\, \xi_l\,.$$

Integriamo ora ambo i membri della (2.14) nella regione $\{0<\tau<\alpha^2/(m+2)\,,\ |\xi|<\alpha\}$; otteniamo, indicando con $\omega_m$ la misura della superficie della sfera unitaria in $R^m$:

$$\frac{m(m+2)}{\omega_m\,\alpha^{m+2}} \int_0^{\alpha^2/(m+2)} d\tau \int_{|\xi|<\alpha} u(t-\tau\,,\ x+a(t\,,x)^{1/2}\,\xi)\,d\xi =$$

$$= u(t\,,x) + \frac{\alpha^2}{2(m+2)}\,Lu(t\,,x) + o(\alpha^2)$$

Dalla precedente formula la (2.10) si deduce con un facile cambiamento delle variabili di integrazione.

Tenendo ora presente il risultato del Teorema 2.2, definiamo una funzione $P : R^{m+1} \times R^{m+1} \to R$, nella maniera seguente :

$$(2.15)\quad \begin{cases} P(y\,;\,\eta) = [\text{mis}\; Q(y\,;\,1)]^{-1} \text{ se } \dfrac{-1}{m+2} \le \tau \le 0,\ |a(y)^{-1/2}\,\xi| \le 1 \\ P(y\,;\,\eta) = 0 \text{ per gli altri valori di } \tau \text{ e } \xi\,. \end{cases}$$

Notiamo che, con questa definizione, e tenendo conto anche della notazione introdotta con la (2.3), la (2.10) prende la forma

$$(2.16)\qquad \alpha^{-(m+2)} \int_{R^{m+1}} P_{\alpha^2}(y\,;\,y-\eta)\,u(\eta)\,d\eta - u(y) = \\ = \frac{\alpha^2}{2(m+2)}\,Lu(y) + o(\alpha^2)$$

Si verifica con facili calcoli che la funzione definita con le (2.15) soddisfa le proprietà (i)-(vi) del § 2.1, con $C = 1/2(m+2)$. Inoltre la stessa funzione possiede anche la proprietà seguente:

$$(2.17)\qquad \text{supp}\; P(y\,;\cdot)\,,\ \text{il supporto di } R^{m+1} \ni \eta \to P(y\,;\,\eta)\,, \\ \subseteq \text{ un insieme compatto indipendente da } y\,.$$

Più precisamente, supponendo di normalizzare la matrice $a(y)$ imponendo che il suo massimo autovalore sia uguale a 1, possiamo scrivere

$$(2.18)\qquad \text{supp}\; P(y\,;\cdot) \subseteq \{\,\eta \in R^{m+1} :\ -2C \le \tau \le 0\,,\ |\xi| \le 1\,\}\,.$$

Osserviamo che la (2.18) ci garantisce che la media

$$(2.19)\qquad \alpha^{-(m+2)} \int_{R^{m+1}} P_{\alpha^2}(y\,;\,y-\eta)\,u(\eta)\,d\eta$$

di una funzione $u$, localmente integrabile in un dominio $\Omega \subset R^{m+1}$, è ben definita per ogni $y \in \Omega$ tale che

$$\inf_{\eta \in R^{m+1} \setminus \Omega} |x - \xi| > \alpha$$

$$\inf_{\substack{\eta \in R^{m+1} \setminus \Omega \\ \tau < t}} (t - \tau) > 2C\,\alpha^2\,.$$

Notiamo ancora che la media (2.19) è, nel nostro caso, niente altro che la media aritmetica di $u$ nel cilindro $Q(y\,;\,\alpha)$.

## 3. – Il primo problema di valori al contorno.

**3.1** Consideriamo ora il problema di valori al contorno per l'operatore

$$(3.1) \qquad L - \lambda \equiv - \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k} - \lambda$$

dove i coefficienti $a_{ik}(t, x)$, misurabili e limitati in $R^{m+1}$, soddisfano la condizione (2.2), cioè $L$ è un operatore uniformemente parabolico; $\lambda$ è un parametro non negativo.

Sia $\Omega$ un insieme aperto di $R^{m+1}$ tale che (*)

$$(3.2) \qquad \sup_{\bar{t} \in R} \operatorname{diam} \{ \Omega \cap \{ t = \bar{t} \} \} < +\infty$$

Come vedremo, l'ipotesi (3.2) è essenziale se $\lambda = 0$, mentre può essere lasciata cadere se $\lambda > 0$. Indicheremo con $\Sigma$ la frontiera di $\Omega$ : $\Sigma_1$ (rispettivamente $\Sigma_2$) è l'insieme dei punti di $\Sigma$ in cui esiste il versore normale $\nu$ (diretto verso l'interno di $\Omega$) ed ha verso opposto a quello dell'asse $t$ (rispettivamente, ha lo stesso verso dell'asse $t$); $\Sigma_3 = \Sigma \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Sia infine $h : R^{m+1} \to R$ una funzione continua e $f$ una funzione di classe $L^\infty(R^{m+1})$.

Consideriamo soluzioni del seguente problema

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} & Lu - \lambda u = f \quad \text{in } \Omega \\ & (u - h)|_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3}, \ \text{la restrizione di } u - h \text{ a } \Sigma_2 \cup \Sigma_3, = 0 \end{aligned}$$

che siano funzioni (reali) con le seguenti proprietà:

(i) $u$ è continua in $\bar{\Omega}$

(ii) $Lu \in L^\infty(\Omega)$.

---

(*) Modificando lievemente il procedimento sotto riportato, si può trattare il caso in cui $\Omega$ sia un cilindro : $\Sigma_2 \, X ] \, O, \, T \, [$ con $\Sigma_2$ aperto (anche illimitato) di $R^m$.

La (ii) significa che, in corrispondenza di $u$, esiste in $L^\infty(\Omega)$ una funzione, che chiameremo $Lu$, tale che

$$\text{(3.4)} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Omega(\varepsilon)} \left| Lu(y) - \frac{1}{C\varepsilon}\left(\varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\,y-\eta)\, u(\eta)\, d\eta - u(y)\right)\right|$$

$\to 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Nella (3.4) $\Omega(\varepsilon)$ è il sottoinsieme di $\Omega$ così definito:

$$\text{(3.5)} \qquad \Omega(\varepsilon) \equiv \{\, y = (t\,,x) \in \Omega : \inf_{\eta=(\tau,\xi)\in\Sigma} |x-\xi| > \varepsilon^{1/2}\,,$$

$$\inf_{\eta\in\Sigma,\ \tau<t} (t-\tau) > 2\, C\varepsilon \,\}$$

$P(y\,;\eta)$ è una qualunque funzione dotata delle proprietà (i)-(vi) del § 2.1 e inoltre della proprietà (2.18); quest'ultima ci garantisce che l'integrale che compare nella (3.4) è ben definito per ogni $y$ appartenente a $\Omega(\varepsilon)$.

Noi mostreremo che ogni soluzione $u$ del problema (3.3), dotata delle proprietà (i)-(ii) (ammesso che una tale soluzione esista) può essere approssimata, nella metrica di $L^\infty(\Omega)$, dalle soluzioni di certe equazioni integrali, descritte nel seguente paragrafo.

## 3.2

Consideriamo il problema di trovare una funzione $v(\varepsilon\,;y)$, definita in $\bar\Omega$ per $\varepsilon > 0$, e soddisfaciente il sistema:

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \varepsilon^{-(m+2)/2} \displaystyle\int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\,y-\eta)\, v(\varepsilon\,;\eta)\,d\eta = \\ = (1 + C\,\lambda\,\varepsilon)\, v(\varepsilon\,;y) + C\,\varepsilon\, f(y) & \text{se } y \in \Omega(\varepsilon) \\ v(\varepsilon\,;y) = h(y) & \text{se } y \in \Sigma(\varepsilon) \end{cases}$$

dove si è posto

$$\text{(3.7)} \qquad \Sigma(\varepsilon) = \bar\Omega \setminus \Omega(\varepsilon)\,.$$

Nella (3.6) $f$ e $h$ sono funzioni assegnate, definite in $R^{m+1}$; $P(y\,;\eta)$ è una qualsiasi funzione verificante le condizioni (i)-(vi) del § 2.1 e la (2.18) (e $C$ è la costante collegata con $P$). Se $\lambda > 0$, non avremo bisogno di imporre altre condizioni sulla $P$; se invece $\lambda = 0$, allora supporremo che la funzione $P$, oltre alle già ricordate proprietà, possegga anche le seguenti:

($a$) il supporto di $P$ contenga un tronco di cilindro; precisamente supporremo che esistano due numeri positivi, $\bar{t}$ e $r$, tali che:

$$\text{supp } P(y\,;\,\cdot) \supseteq \{\, \eta \in R^{m+1} : -\bar{t} \leq \tau \leq 0 \,,\ |\xi| \leq r \,\} \tag{3.8}$$

($b$) per ogni coppia $A, B$ di aperti di $R^{m+1}$ con la proprietà:

$$\begin{aligned} \bar{B} \cap \{\, t = t_1 \,\} & \text{ compatto in } R^m \ \forall\ t_1 \in R \subseteq \\ & \subseteq \{\, y \in R^{m+1} : \inf_{\eta \in \{A \cap \{t = t_1\}\}} |x - \xi| < r\, \varepsilon^{1/2} \,\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

noi supporremo che la funzione

$$y \to \int_A \varepsilon^{-(m+2)/2}\, P_\varepsilon(y\,;\,y - \eta)\, d\eta \tag{3.10}$$

sia uniformemente positiva in $B$, cioè che

$$\operatorname*{ess\,inf}_{y \in B} \int_A \varepsilon^{-(m+2)/2}\, P_\varepsilon(y\,;\,y - \eta)\, d\eta > 0\,. \tag{3.11}$$

La funzione $P$ definita dalle (2.15) chiaramente soddisfa la condizione ($a$) con $\bar{t} \leq 1/(m+2)$ e $r \leq \mu$ (la costante che compare nella (2.2)); essa soddisfa anche la condizione ($b$): infatti, ponendo

$$\psi_\varepsilon(y - \eta\,;\,\bar{t}\,,r) = \psi\big(-(t - \tau)/\bar{t}\varepsilon\,,\,(x - \xi)/r\varepsilon^{1/2}\big)$$

dove $y \to \psi(y)$ è la funzione caratteristica del cilindro $\{\, y \in R^{m+1}:$ $-1 < t < 0\,,\ |x| < 1\,\}$, abbiamo

$$P_\varepsilon(y\,;\,y - \eta) \geq (\text{costante positiva})\ \psi_\varepsilon(y - \eta\,;\,\bar{t}\,,r)$$

e la funzione

$$(3.10a) \qquad y \to \int_A \psi_\varepsilon(y - \eta\,; \bar{t}\,, r)\, d\eta$$

è continua e positiva in ogni punto di $\bar{B}$. Infatti la funzione (3.10$a$) coincide con la misura dell'insieme

$$\{ A \cap \{ \eta \in R^{m+1} : 0 < t - \tau < \bar{t}\varepsilon\,, |x - \xi| < r\varepsilon^{1/2} \} \}$$

e tale insieme è un aperto non vuoto per ogni $(t\,, x) \in \bar{B}$.

Definiamo ora l'insieme

$$(3.12) \qquad \Sigma_1(\varepsilon) = \{ y \in \Sigma_1 : \text{dist}\ (y\,, \partial\Sigma_1) > \varepsilon^{1/2} \}$$

dove dist $(y\,, \partial\Sigma_1)$ indica la distanza (nella metrica di $R^{m+1}$) di $y$ dalla frontiera $\partial\Sigma_1$ di $\Sigma_1$ (frontiera di $\Sigma_1$ va inteso ovviamente nella topologia relativa di $\Sigma$). Porremo anche

$$(3.13) \qquad \Sigma_{23}(\varepsilon) = \Sigma(\varepsilon) \diagdown \Sigma_1(\varepsilon)$$

Nota che, per $\varepsilon \downarrow 0$, $\Sigma_{23}(\varepsilon)$ tende a $\overline{\Sigma_2 \cup \Sigma_3}$. Inoltre osserviamo che:

$$(3.14) \qquad \text{supp}\ P_\varepsilon\,(y\,; y - \cdot\,) \cap \Sigma_1(\varepsilon) = \varnothing \qquad \forall\ y \in \Omega(\varepsilon)$$

Spezziamo ora l'integrale che compare nella prima delle (3.6) nel modo seguente:

$$\int_{R^{m+1}} \ldots d\eta = \int_{\Omega(\varepsilon)} \ldots d\eta + \int_{\Sigma(\varepsilon)} \ldots d\eta$$

e riscriviamo il sistema (3.6) così (tenendo conto della (3.14)):

$$3.15) \qquad \begin{cases} \varepsilon^{-(m+2)/2} \displaystyle\int_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,; y - \eta)\, v(\varepsilon\,; \eta)\, d\eta = \\ \quad = (1 + C\,\lambda\varepsilon)\, v\,(\varepsilon\,; y) + C\,\varepsilon f(y) - \\ \quad - \varepsilon^{-(m+2)/2} \displaystyle\int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,; y - \eta)\, h(\eta)\, d\eta & \text{se } y \in \Omega(\varepsilon) \\ v(\varepsilon\,; y) = h\,(y) & \text{se } y \in \Sigma(\varepsilon) \end{cases}$$

TEOREMA 3.1 : *siano* $f \in L^\infty(\Omega)$ *e* $h \in C^0(R^{m+1})$ *funzioni assegnate. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una sola soluzione* $v(\varepsilon, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$ *del sistema* (3.15). *Tale soluzione soddisfa la seguente stima* :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Omega} |v(\varepsilon\,;y)| \leq \text{(costante indipendente da } \varepsilon, f, h).$$

$$\cdot \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Omega(\varepsilon)} |f(y)| + \max_{y\in\Sigma_{23}(\varepsilon)} |h(y)| \tag{3.16}$$

TEOREMA 3.2 : *siano* $f \in L^\infty(\Omega)$ *e* $h \in C^0(R^{m+1})$ *funzioni assegnate* ; *sia* $u$ *una soluzione del problema* (3.3) *con le proprietà* (*i*)-(*ii*). *Allora, se* $v(\varepsilon\,;\cdot)$ *è la soluzione* $\big(\in L^\infty(\Omega)\big)$ *del sistema* (3.15), *abbiamo* :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Omega} |u(y) - v(\varepsilon\,;y)| \to 0 \quad \text{per } \varepsilon \downarrow 0 \tag{3.17}$$

COROLLARIO : *il problema* (3.3) *possiede al più una soluzione con le proprietà* (i)-(ii).

## 3.3

Il corollario è un'immediata conseguenza del teorema 3.2 e dell'unicità della soluzione $v(\varepsilon\,;\cdot)$ del sistema (3.15) (cfr. teorema 3.1). Al fine di dimostrare il teorema 3.1 riscriviamo la prima delle (3.15) ponendo :

$$w(\varepsilon\,;\cdot) = v(\varepsilon\,;\cdot)\,\big|_{\Omega(\varepsilon)} \tag{3.18}$$

$$z(\varepsilon\,;y) = -f(y) + \frac{1}{C\varepsilon}\,\varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;y-\eta)\,h(\eta)\,d\eta \tag{3.19}$$

$$K(\varepsilon)\,u(y) = \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;y-\eta)\,u(\eta)\,d\eta \tag{3.20}$$

Allora la (4.15*a*) prende la forma seguente

$$w(\varepsilon\,;y) = (1 + C\lambda\varepsilon)^{-1} K(\varepsilon)\,w(\varepsilon\,;y) + \frac{C\varepsilon}{1 + C\lambda\varepsilon}\,z(\varepsilon\,;y) \tag{3.21}$$

Se si tengono presenti le proprietà (i) e (ii) del nucleo $P$ (cfr. paragrafo 2.1) si vede immediatamente che:

$$|\, z(\varepsilon\,;\,\cdot)\,| \leq \operatorname{ess\,sup} |f| + \frac{1}{C\varepsilon} \max_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} |h| \tag{3.22}$$

e che l'operatore $K(\varepsilon)$ è una contrazione in $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Omega(\varepsilon)} |K(\varepsilon)\, u(y)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Omega(\varepsilon)} |u(y)| \tag{3.23}$$

Lemma 3.1:

(i) *l'operatore* $(1 + C\lambda\varepsilon)^{-1} K(\varepsilon)$, *con* $\lambda > 0$, *è strettamente contrattivo in* $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$ (*cioè la sua norma è* $< 1$).

(ii) *l'operatore* $K(\varepsilon)$ *è strettamente contrattivo in* $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$ *se il* $\sup_{\bar t\in R} \operatorname{diam} \{\, \Omega \cap \{\, t = \bar t\,\}\,\}$ *è sufficientemente piccolo.*

(iii) *se* $\Omega$ *è un qualunque insieme dotato della proprietà* (3.2), *cioè tale che*:

$$\sup_{\bar t\in R} \operatorname{diam} \{\, \Omega \cap \{\, t = \bar t\,\}\,\} < +\infty$$

*allora esiste un intero positivo* $n$ (*dipendente da* $\varepsilon$ *e da* $\Omega$) *tale che* $K(\varepsilon)^n$ *è strettamente contrattivo in* $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$.

*Dimostrazione del teorema* 3.1: l'esistenza e l'unicità di una soluzione $w(\varepsilon\,;\,\cdot) \in L^\infty(\Omega(\varepsilon)$ dell'equazione (3.21) segue immediatamente dal lemma 3.1, tenendo conto anche della (3.22). Allora, dalla definizione (3.18) di $w$ e dalla (3.15$b$), otteniamo l'esistenza e l'unicità della soluzione $v(\varepsilon\,;\,\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ del sistema (3.15).

Per ottenere una stima della soluzione, cominciamo col rappresentare la soluzione $w$ dell'equazione (3.21) nella forma

$$w(\varepsilon\,;\,\cdot) = H(\varepsilon)\, z(\varepsilon\,;\,\cdot) \tag{3.24}$$

$$H(\varepsilon) = \frac{C\varepsilon}{1 + C\lambda\varepsilon}\left(1 - \frac{K(\varepsilon)}{1 + C\lambda\varepsilon}\right)^{-1} \qquad \text{se } \lambda > 0 \tag{3.25}$$

$$H(\varepsilon) = C\varepsilon\,\bigl(1 - K(\varepsilon)^n\bigr)^{-1} \sum_{l=1}^{n} K(\varepsilon)^{l-1} \qquad \text{se } \lambda = 0 \tag{3.26}$$

(qui $n$ è l'intero che compare in (iii) del lemma 3.1); grazie al lemma 3.1, $H(\varepsilon)$ è un operatore limitato in $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$ per ogni $\varepsilon > 0$. Più precisamente, possiamo scrivere, per $\lambda \geq 0$,

$$H(\varepsilon)\, u(y) = \frac{C\varepsilon}{1 + C\lambda\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} (1 + C\lambda\varepsilon)^{-l} K(\varepsilon)^l\, u(y) \tag{3.27}$$

e la serie che compare nella (3.27) è assolutamente convergente nella metrica di $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$.

Notiamo anche che se $u$ è non-negativa, tutti i termini della serie sono non-negativi. Abbiamo allora:

$$|H(\varepsilon)\, u(y)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega(\varepsilon)} |u(y)|\, H(\varepsilon)\,(1) \tag{3.28}$$

Osserviamo ora che, se $f = -\lambda$ e $h = 1$, ricaviamo, dalla (3.21), $w = 1$, cioè:

$$1 = H(\varepsilon)\,(\lambda) + H(\varepsilon)\left(\frac{1}{C\varepsilon}\, \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;\, y - \eta)\, d\eta\right) \tag{3.28}$$

Ciascuno dei due termini a secondo membro, essendo non negativo è $\leq 1$. Abbiamo così:

$$\begin{aligned} |w(\varepsilon\,;\, y)| &\leq |H(\varepsilon) f(y)| + \left| H(\varepsilon)\, \frac{1}{C\varepsilon}\, \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} P_\varepsilon\,(y\,;\, y - \eta)\, h(\eta)\, d\eta \right| \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega(\varepsilon)} |f| + \max_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} |h| \cdot H(\varepsilon)\left(\frac{1}{C\varepsilon}\, \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;\, y - \eta)\, d\eta\right) \end{aligned}$$

E perciò, se $\lambda > 0$, otteniamo

$$|w\,(\varepsilon\,;\, y)| \leq \frac{1}{\lambda} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega(\varepsilon)} |f| + \max_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} |h|\,. \tag{3.29}$$

Più in generale, per $\lambda \geq 0$, osserviamo che, ponendo

$$f(t, x) = -\lambda (k - |x|^2) - 2 \sum_{i=1}^{m} a_{ii} (t, x)$$

$$h(t, x) = k - |x|^2$$

($k$ costante) otteniamo

$$w(\varepsilon ; t, x) = k - |x|^2$$

Prendiamo ora $k$ in maniera che risulti $(k - |x|^2) \geq 0$ in ogni punto di $\overline{\Omega}$; con considerazioni simili a quelle fatte precedentemente otteniamo

$$|w(\varepsilon ; y)| \leq \frac{k}{2 \inf \sum_{i=1}^{m} a_{ii} (y)} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega(\varepsilon)} |f| + \max_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} |h| \tag{3.30}$$

Dalla (3.29) e (3.30) otteniamo infine

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega(\varepsilon)} |w(\varepsilon ; y)| \leq (\text{costante}) \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega(\varepsilon)} |f(y) + \max_{y \in \Sigma_{23}(\varepsilon)} |h(y)| \tag{3.31}$$

da cui immediatamente segue la (3.16).

Il teorema 3.1 è così dimostrato.

*Dimostrazione del teorema* 3.2 : la differenza $v(\varepsilon ; y) - u(y)$ soddisfa le seguenti equazioni

$$\tag{3.32} \begin{cases} \varepsilon^{-(m+2)/2} \displaystyle\int_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y ; y\text{-}\eta) \left[v(\varepsilon ; \eta) - u(\eta)\right] d\eta = \\ = (1 + C\lambda\varepsilon) \left[ v(\varepsilon ; y) - u(y) \right] + \\ + C\varepsilon \left[ Lu(y) - \dfrac{1}{C\varepsilon} \left( \varepsilon^{-(m+2)/2} \displaystyle\int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y ; y\text{-}\eta)\, u(\eta)\, d\eta - u(y) \right) \right] - \\ - \varepsilon^{-(m+2)/2} \displaystyle\int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} P_\varepsilon(y ; y\text{-}\eta) \left[h(\eta) - u(\eta)\right] d\eta \qquad \text{se } y \in \Omega(\varepsilon) \\ v(\varepsilon ; y) - u(y) = h(y) - u(y) \qquad \text{se } y \in \Sigma_{23}(\varepsilon) \end{cases}$$

Ora basterà applicare al sistema (3.32) la stima (3.16) ; otteniamo

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega} |v(\varepsilon\,; y) - u(y) \leq \max_{y \in \Sigma_{23}(\varepsilon)} | h(y) - u(y) | +$$

$$+ (\text{costante}) \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega(\varepsilon)} \left| Lu(y) - \frac{1}{C\varepsilon}\left(\varepsilon^{-(m+2)/2} \int\limits_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta)\, u(\eta)\, d\eta\text{-}u\,(y)\right)\right|$$

e pertanto, facendo tendere $\varepsilon$ a zero, otteniamo la (3.17).

*Dimostrazione del lemma* 3.1 : la proposizione (i) è banale, poichè, essendo $\|K(\varepsilon)\| \leq 1$ (vedi la (3.23)), segue subito che

$$\| (1 + C\lambda\varepsilon)^{-1} K(\varepsilon) \| \leq (1 + C\lambda\varepsilon)^{-1} \tag{3.33}$$

Con $\|\cdot\|$ abbiamo indicato la norma nell'algebra degli operatori lineari limitati in $L^\infty(\Omega(\varepsilon))$.

(ii) Osserviamo anzitutto che prendendo $u = 1$ nella (3.20) otteniamo

$$\| K(\varepsilon) \| = \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega(\varepsilon)} \varepsilon^{-(m+2)/2} \int\limits_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta)\, d\eta$$

e pertanto (per la proprietà (ii) della funzione $P$)

$$\|K(\varepsilon)\| = 1 - \operatorname*{ess\,inf}_{y \in \Omega(\varepsilon)} \varepsilon^{-(m+2)/2} \int\limits_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta)\, d\eta \tag{3.34}$$

Mostreremo che, se

$$\sup_{\bar{t} \in R} \operatorname{diam} \{ \Omega \cap \{ t = \bar{t} \} \} < r\varepsilon^{1/2} \tag{3.35}$$

essendo $r$ il numero che compare nella condizione (3.8),

$$\operatorname*{ess\,inf}_{y \in \Omega(\varepsilon)} \varepsilon^{-(m+2)/2} \int\limits_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta)\, d\eta > 0 \tag{3.36}$$

Per ottenere la (3.36) basta applicare la proprietà ($b$) del paragrafo 3.2 (vedi formule (3.9) e (3.11)) con $A = R^{m+1} \setminus \overline{\Omega(\varepsilon)}]$ e $B = \Omega(\varepsilon)$: questi due insiemi soddisfano evidentemente la (3.9), grazie all'ipotesi (3.35) (se vale la quale ne vale anche una analoga con $\Omega(\varepsilon)$ al posto di $\Omega$).

(iii) Osserviamo che, per $n \geq 1$,

$$\| K(\varepsilon)^n \| = \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \Omega(\varepsilon)} \varepsilon^{-(m+2/2)} \int_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta_1)\, d\eta_1 \ldots \tag{3.37}$$

$$\ldots\ \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(\eta_{n-1}\,;\, \eta_{n-1} - \eta_n)\, d\eta_n \leq$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{y \in R^{m+1}} \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta_1)\, d\eta_1 \ldots$$

$$\ldots\ \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon\,(\eta_{n-2}\,;\, \eta_{n-2} - \eta_{n-1})\, d\eta_{n-1}\,\cdot$$

$$.\ \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{\Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon\,(\eta_{n-1}\,;\, \eta_{n-1} - \eta_n)\, d\eta_n\ \cdot$$

Dunque abbiamo

$$\|K(\varepsilon)^n\| \leq 1 - \operatorname*{ess\,inf}_{y \in R^{m+1}} \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(y\,;\, y\text{-}\eta_1)\, d\eta_1 \ldots \tag{3.38}$$

$$\ldots\ \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1}} P_\varepsilon(\eta_{n-2}\,;\, \eta_{n-2} - \eta_{n-1})\, d\eta_{n-1} \cdot \varepsilon^{-(m+2)/2} \int_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} P_\varepsilon(\eta_{n-1}\,;\, \eta_{n-1} - \eta_n)\, d\eta_n$$

Mostreremo che l'ess inf che appare nella (3.38) è positivo se $n$ è sufficientemente grande. Sia

$$U_0 = \varnothing \text{ (l'insieme vuoto)}$$

$$\{ U_k \}_{k=1,\ldots,n}$$

una famiglia di cilindri circolari retti coassiali, con l'asse parallelo all'asse $t$, così definiti.

$$U_k \equiv \{ y \in R^{m+1} : | x | < \varrho_k \}$$

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_n$$

$$\varrho_1 < r \, \varepsilon^{1/2}$$

$$\varrho_k - \varrho_{k-1} < r \, \varepsilon^{1/2} \qquad (k = 2 , \dots , n)$$

Scegliamo $n$ come il primo intero tale che

$$U_n \supset \overline{\Omega} (\varepsilon)$$

(un tale $n$ esiste, grazie all'ipotesi (3.2)).

Allora abbiamo :

$$\operatorname*{ess\,inf}_{y \in R^{m+1}} \int_{R^{m+1}} \dots d\eta_1 \dots \int_{R^{m+1}} \dots d\eta_{n-1} \int_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} \dots d\eta_n \geq$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{y \in R^{m+1}} \int_{R^{m+1} \setminus U_1} \dots d\eta_1 \dots \int_{R^{m+1} \setminus U_{n-1}} \dots d\eta_{n-1} \int_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} \dots d\eta_n$$

D'altra parte, applicando la proprietà (3.11) agli insiemi

$$A = R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon) \quad , \quad B = U_n \setminus U_{n-1}$$

e quindi nuovamente agli insiemi

$$A = R^{m+1} \setminus U_{n-1} \quad , \quad B = U_{n-1} \setminus U_{n-2}$$

e così via fino a

$$A = R^{m+1} \setminus U_1 \quad , \quad B = U_1$$

abbiamo

$$\operatorname*{ess\ inf}_{\eta_{n-1} \in R^{m+1} \setminus U_{n-1}} \int\limits_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} \ldots d\eta_n \geq c_n > 0$$

$$\operatorname*{ess\ inf}_{\eta_{n-2} \in R^{m+1} \setminus U_{n-2}} \int\limits_{R^{m+1} \setminus U_{n-1}} \ldots d\eta_{n-1} \int\limits_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} \ldots d\eta_n \geq c_{n-1} > 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$\operatorname*{ess\ inf}_{y \in R^{m+1}} \int\limits_{R^{m+1} \setminus U_1} \ldots d\eta_1 \ldots \int\limits_{R^{m+1} \setminus \Omega(\varepsilon)} \ldots d\eta_n \geq c_1 > 0$$

Il lemma è dimostrato.

## 3.4

Osserviamo anzitutto che le potenze $K(\varepsilon)^l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ sono operatori integrali

(3.39) $$K(\varepsilon)^l\, u(y) = \int\limits_{\Omega(\varepsilon)} k_l(\varepsilon\,; y\,, \eta)\; u(\eta)\,, d\eta$$

i cui nuclei sono

(3.40) $$\begin{aligned} k_1(\varepsilon\,; y\,, \eta) &= \varepsilon^{-(m+2)/2}\, P_\varepsilon(y\,; y\text{-}\eta) \\ k_l(\varepsilon\,; y\,, \eta) &= \int\limits_{\Omega(\varepsilon)} k_{l-1}(\varepsilon; y, \eta')\, k_1(\varepsilon; \eta', \eta)\, d\eta' \quad (l=2\,, 3, \ldots) \end{aligned}$$

Osserviamo esplicitamente che tutti questi nuclei sono non negativi

(3.41) $$k_l\,(\varepsilon\,; y\,, \eta) \geq 0$$

e inoltre

(3.42) $$\operatorname{supp}\; k_l(\varepsilon\,; y\,, \cdot\,) \subset \{\, \eta \in R^{m+1} : \tau < t \,\}$$

Per quanto abbiamo dimostrato nel precedente paragrafo, la serie

$$\sum_{l=1} k_l(\varepsilon\,;y\,,\eta)\,(1+C\,\lambda\varepsilon)^{-l} \tag{3.43}$$

*converge* a un nucleo $k(\varepsilon\,;y\,,\eta)$ con le proprietà

$$k(\varepsilon\,;y\,,\eta)\geq 0 \tag{3.44a}$$

$$\operatorname{supp} k(\varepsilon\,;y\,,\cdot)\subset\{\eta\in R^{m+1}:\tau<t\} \tag{3.44b}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega(\varepsilon)}\int_{\Omega(\varepsilon)} k(\varepsilon\,;y\,,\eta)\,d\eta<\infty \tag{3.44c}$$

La convergenza della serie (3.43) significa

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega(\varepsilon)}\int_{\Omega(\varepsilon)}\Big|\sum_{l=1}^{N}(1+C\lambda\varepsilon)^{-l}k_l(\varepsilon\,;y\,,\eta)-k(\varepsilon\,;y\,,\eta)\Big|\,d\eta \tag{3.45}$$

$$\to O \qquad \text{per} \qquad N\to\infty$$

Allora la soluzione $v(\varepsilon\,;y)$ del sistema (3.15) può essere rappresentata nella forma seguente:

$$v(\varepsilon\,;y)=h(y) \qquad \text{se } y\in\Sigma(\varepsilon)$$

$$v(\varepsilon\,;y)=\int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)}k(\varepsilon\,;y\,,\eta)\,h(\eta)\,d\eta- \tag{3.46}$$

$$-\frac{C\varepsilon}{1+C\lambda\varepsilon}\left[f(y)+\int_{\Omega(\varepsilon)}k(\varepsilon\,;y\,,\eta)\,f(\eta)\,d\eta\right] \qquad \text{se } y\in\Omega(\varepsilon)$$

Supponiamo ora che $\Omega$ sia un cilindro : $\Sigma_2\times\,]\,O\,,\,T\,[$, essendo $\Sigma_2$ un aperto (limitato) di $R^m$ con contorno sufficientemente regolare, e che i coefficienti $a_{ik}(t\,,x)$ siano hölderiani con esponente $\alpha/2$ rispetto a $t$ e $a$ rispetto a $x$. In queste ipotesi, è noto [17] [13, Cap. IV, § 16] che il problema

$$(3.47)\qquad \begin{gathered} -u_t + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(t, x)\, u_{x_i x_k} = f(t, x) \\ u|_{\Sigma_3} = 0 \qquad\qquad u|_{\Sigma_2} = 0 \end{gathered}$$

ha una soluzione classica $C^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che si può rappresentare mediante la « funzione di Green » per il problema (3.47), nella forma

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_2} G(t, x; \xi, \tau) f(\tau, \xi)\, d\xi$$

per ogni $f$ hölderiana (per la definizione della funzione di Green $G$ e le sue proprietà, cfr. [13, Cap. IV, § 16]).

Posto allora

$$G(\varepsilon; t, x; \xi, \tau) = -C\varepsilon\, k(\varepsilon; t, x; \xi, \tau)$$

quando $\quad (t, x) \in \Omega(\varepsilon) \quad$ e $\quad (\tau, \xi) \in \Omega(\varepsilon) \quad$ e

$$G(\varepsilon; t, x; \xi, \tau) = 0$$

quando $\quad (t, x) \in \Sigma(\varepsilon) \quad$ oppure $\quad (\tau, \xi) \in \Sigma(\varepsilon)$

possiamo affermare, per quanto esposto nei paragrafi precedenti, che *la famiglia di funzioni* $G(\varepsilon; t, x; \xi, \tau)$ *tende alla funzione di Green* $G(t, x; \xi, \tau)$ *nel senso che*

$$(3.48)\quad \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_2} G(\varepsilon; t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi \to \int_0^t d\tau \int_{\Sigma_2} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi$$

*per* $\varepsilon \downarrow 0$, *uniformemente rispetto a* $(t, x)$, *per ogni* $f$ *hölderiana.*

Per l'esistenza di una funzione di Green con ipotesi diverse da quelle qui ricordate, vedi anche [3].

**3.5**

Analogamente a quanto si è fatto in [18] e in [16], il procedimento di approssimazione sopra descritto può essere paragonato al noto « metodo Monte-Carlo » usato per approssimare la soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni ellittiche. Questo consiste essenzialmente dei seguenti due stadi : I. discretizzazione del problema differenziale per mezzo di uno schema a differenze finite ; II. soluzione del problema discretizzato per mezzo di « cammini casuali » (random walks).

Similmente il procedimento di approssimazione descritto nei paragrafi precedenti si sviluppa in due stadi. Innanzitutto si cerca di « simulare » il problema differenziale (3.3) per mezzo delle equazioni integrali (3.15). Il teorema 3.2 mostra che una soluzione $u$ di (3 3) (se questa esiste in una opportuna classe funzionale) è approssimata (nella topologia della convergenza uniforme) dalle soluzioni delle equazioni integrali (3.55).

Il secondo stadio consiste nel risolvere il sistema (3.15) : il procedimento adottato (cfr. soprattutto la dimostrazione del lemma 3.1) può essere descritto in termini probabilistici. Supponiamo, per semplicità, che sia $f = 0$ e $\lambda = 0$. La soluzione del sistema (3.15) (cfr. la formula (3.46)) si scrive

$$v(\varepsilon\,;y) = \int_{\Sigma_{23}(\varepsilon)} k(\varepsilon\,;y\,,\eta)\,h(\eta)\,d\eta \qquad \text{per } y \in \Omega(\varepsilon) \tag{3.49}$$

Qui, per fissare le idee, supporremo che la funzione $P$ sia quella definita con le formule (2.15).

Consideriamo allora dei cammini casuali $\omega = (y_0\,, y_1\,, \dots\,, y_n)$ tali che :

*a*) il punto di partenza $y_0$ sia un qualsiasi punto di $\Omega(\varepsilon)$ ;

*b*) ogni punto $y_k$ è scelto a caso, con probabilità uniforme, nel cilindro $Q(y_{k-1}\,;\varepsilon^{1/2})$ (definito dalla (2.11)) ;

*c*) tutti i punti $y_1\,, \dots\,, y_{n-1}$ devono appartenere a $\Omega(\varepsilon)$ ;

*d*) il punto d'arrivo $y_n$ appartiene a $\Sigma(\varepsilon)$. Si noti che la probabilità di terminare il cammino in $\Sigma_1(\varepsilon)$ è nulla, mentre la probabilità di trovare $y_n$ in $\Sigma_{23}(\varepsilon)$ tende ad un limite positivo per $\varepsilon \downarrow 0$.

Definiamo ora una variabile casuale $X$ nel modo seguente.

$$X(\omega) = h(y_n)$$

Si vede così che la soluzione $v(\varepsilon\,;y)$, data dalla (3.49), dove il nucleo $k(\varepsilon\,;y\,,\eta)$ è dato dalla somma della serie (3.43) (con $\lambda = 0$) è il valore di aspettazione di $X$.

## RIFERIMENTI


[1] Arena O., *Sopra una classe di equazioni paraboliche*, Boll. Un. Mat. It., **2** (1969) 9-24.

[2] — *Sul problema di Cauchy-Dirichlet per le equazioni paraboliche lineari a coefficienti discontinui*, Le Matematiche, **22** (1967) 160-181.

[3] Aronson D. G., *On the Green's function for second order parabolic differential equations with discontinous coefficients*, Boll. Am. Math. Soc., **69** (1963) 841-847.

[4] Buslenko N. P., Golenko D. I., Shreider Y. U., Sobol I. M., Sragovich V. G., *The Monte Carlo Method*, Pergamon Press, Elmsford, N. Y. (1966).

[5] Campanato S., *Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi* $L^{2,\theta}$ $(\Omega, \delta)$, Ann. di Mat. pura e appl. (4) **73** (1966) 55-102.

[6] Ferro F., *Limitazioni per soluzioni di equazioni paraboliche*, Boll. Un. Mat. It., **4** (1971) 198-212.

[7] Friedman A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1964).

[8] Gagliardo E., *Problema al contorno per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in n variabili*, Ricerche di Matematica, **5** (1956) 169-205.

[9] — *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili*, Ricerche di Matematica, **5** (1956) 239-257.

[10] Guglielmino F., *Sulle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale*, Ann. di Mat. pura e applic. (4) **65** (1964) 127-151.

[11] Kamynin L. I., *The maximum principle and boundary* $\alpha$*-estimates of the solution of the first boundary value problem for a parabolic equation in a non-cylindrical region*, Zh. Vychislit. Matem. i Mat. Fiz., **7** N° 3 (1967) 551-567 (in russo).

[12] Kohn J. J., Nirenberg L., *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order*, Comm. Pure and Appl. Math., **20** (1967) 797-872.

[13] Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva, N. N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, AMS Translations of Mathematical Monographs, Providence R. I. (1968).

[14] LANCONELLI E., *Sul problema di Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine a coefficienti discontinui,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) *56* (1974), no. 4, 441-445.

[15] OLEINIK O. A., RADKEVIČ E. V., *Second order equations with non-negative characteristic form,* AMS and Plenum Press, New York (1973).

[16] PAGANI C. D., *On elliptic-parabolic equations of second order and approximating integral equations,* in corso di stampa su un volume edito dall'Accademia delle Scienze dell'URSS in onore di I. N. Vekua. (in russo) ; una versione italiana, dal titolo : *Approssimazione delle soluzioni del primo problema al contorno per equazioni del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita,* è in corso di stampa su : Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari.

[17] POGORZELSKI W., *Étude d'une fonction de Green et du problème aux limites pour l'équation parabolique normale,* Ann. Polon. Math. **4** (1958) 288-307.

[18] PUCCI C., TALENTI G., *Elliptic (second order) partial differential equations with measurable coefficients and approximating integral equations,* Advances in Math. **19** N° 1 (1976) 48-105.

[19] SADALLAH B. K., *Régularité de la solution de l'équation de la chaleur dans un domain plan non rectangulaire,* Boll. Un. Mat. It. (5) **13**-B (1976) 32-54.

[20] KONDRAT'EV V. A., *General boundary value problems for parabolic equations in a closed region,* Doklady Akad. Nauk SSSR; **163** (1965) 285-288 (in russo), Soviet Math. **6** (1965) 906-909.

[21] NICOLOSI F., *Problemi parabolici in più variabili,* Le Matematiche, 1, **27** (1972) 153-166.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 novembre 1977.