RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO TESTA

# Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 58 (1977), p. 101-116

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__101_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

# Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali.

STEFANO TESTA (*)

## 1. – Prefazione.

In un suo lavoro G. Darbo [1], prendendo lo spunto euristico della teoria delle reti di dispositivi elettrici, ha dato una formalizzazione assiomatica, del concetto di «universo di dispositivi».

Nello stesso lavoro vengono altresì definiti gli «universi di dispositivi lineari».

Tra questi, particolare interesse hanno gli «universi lineari su un corpo commutativo $K$». Basti ricordare che qui i dispositivi su un insieme finito $\alpha$ di terminali hanno come grafico (che costituisce l'insieme dei «funzionamenti» di tali dispositivi) i sottospazi lineari dello spazio vettoriale $K^\alpha \times K_\alpha$ su $K$. Gli universi lineari su un corpo trovano interessanti applicazioni. Infatti se $K = \mathbb{R}$ (corpo dei numeri reali), si ha l'ambiente adatto per trattare, ad esempio, dispositivi elettrici in cui le tensioni e le correnti sui singoli terminali sono costanti nel tempo; se $K = \mathbb{C}$ (corpo dei numeri complessi), si ha un ampliamento dell'universo precedente, e qui è possibile trattare dispositivi elettrici i cui segnali di tensione e corrente sui terminali variano nel tempo con legge sinusoidale di frequenza fissata; più in generale, se $K = \mathbb{R}(D)$, corpo degli operatori differenziali razionali fratti, si ha l'universo dei dispositivi lineari a costanti concentrate.

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. Matematico Via L. B. Alberti, 4 - Università di Genova.

Tra i dispositivi di tali universi lineari su un corpo ci interessano in particolar modo, quelli che godono di una ulteriore proprietà: la passività. Per un generico corpo $K$ di caratteristica zero, le nozioni di passività « elementari » che si possono dare per i dispositivi lineari su $K$ sono in corrispondenza biunivoca con le strutture paracomplesse su $K$ stesso. Non ci soffermiamo sulla definizione di struttura paracomplessa, rimandando a [1], ci basta osservare che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno un'unica struttura paracomplessa, ed unico è pure quindi il tipo di passività dei dispositivi lineari su tali corpi: in particolare se $M$ è un dispositivo lineare su $\mathbb{R}$, su un insieme $\alpha$ di terminali, di modo che il suo grafico è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha$, $M$ si dirà passivo se per ogni suo funzionamento $(x, y)$ si ha $\langle x, y \rangle \geq 0$, dove $\langle -, - \rangle$ è l'usuale prodotto interno di $R^\alpha$.
È da osservare che, in generale, la composizione in rete di dispositivi passivi dà ancora un dispositivo passivo: cioè, i dispositivi lineari passivi costituiscono un sottouniverso dell'universo dei lineari su $K$. Se si considerano i dispositivi passivi « fisicamente realizzabili », si osserva che essi godono di una ulteriore proprietà: la dimensione dello spazio vettoriale che costituisce l'insieme dei loro funzionamenti è uguale al numero dei terminali dei dispositivi stessi. Tale proprietà (che ho chiamata in una mia precedente nota [6], « normalità » ) di cui sembrano godere tutti i dispositivi lineari su un corpo, fisicamente realizzabili, accoppiata alla passività, fa assumere ai dispositivi che godono di entrambe il carattere di « dispositivi lineari passivi massimali », nel senso che ora precisiamo: un dispositivo si dirà passivo massimale se è passivo ed inoltre se il suo grafico non è contenuto propriamente nel grafico di nessun altro dispositivo passivo.

Orbene i dispositivi lineari su un corpo passivi massimali sono tutti e soli i dispositivi lineari passivi normali. È da rilevare che anche questi dispositivi passivi massimali costituiscono un sottouniverso.

In realtà, e già appare dalle poche considerazioni finora svolte, che ci serviranno a chiarire il tipo di problema che intendiamo affrontare, i risultati nella teoria degli universi lineari sono molteplici e di carattere assai generale. Interesserebbe pure considerare, nello stesso ordine di idee, i dispositivi non lineari. Qui però la teoria è ai suoi inizi e i risultati sono parziali e frammentari. Il primo problema è quello di costruire degli esempi significativi di universi non lineari.

Una proprietà sulla quale si è incominciato a lavorare è quella chiamata nella letteratura degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, monotonia: essa sembra infatti estendere, nel modo più naturale, al caso non lineare, la passività. F. Parodi in un suo lavoro di recente pubblicazione [3], ha costruito un universo di dispositivi monotoni, che estende quello dei lineari passivi. Tale universo è un primo esempio significativo, tuttavia, per certi versi, non è del tutto soddisfacente: infatti per le applicazioni fisiche è talora opportuno considerare dispositivi monotoni massimali, questi però non costituiscono un sottouniverso dell'universo di Parodi: cioè, in tale ambiente, la composizione in rete di dispositivi monotoni massimali dà luogo a dispositivi monotoni, in generale non massimali.

Il problema di trovare un universo di dispositivi monotoni massimali, nella sua formulazione più ampia, è tuttora aperto. Il presente lavoro ne dà una soluzione parziale.

Per chiarire il punto di vista da cui si è affrontato il problema, ritorniamo ai dispositivi lineari su un corpo commutativo $K$.

Sia $\tau$ un automorfismo involutorio (tale cioè che $\tau^2 = \mathrm{id}$) di $K$. È possibile considerare il sottouniverso dei dispositivi $\tau$-reciproci (Per inciso, osserviamo che molti dei dispositivi lineari fisicamente realizzabili, godono di una qualche proprietà di $\tau$-reciprocità; esistono, peraltro, dispositivi lineari non reciproci fisicamente realizzabili). Se $K = \mathbb{R}$ e $\tau$ è l'identità (che è il caso che a noi interessa) tali dispositivi, sono così caratterizzati: sono normali, inoltre per ogni coppia $(x, y)$ e $(\xi, \eta)$ di funzionamenti di un tale dispositivo, vale la relazione: $\langle x, \eta \rangle = \langle \xi, y \rangle$. Orbene, si consideri il sottouniverso dei dispositivi lineari su $\mathbb{R}$ che sono monotoni massimali e reciproci. Si ha che il grafico di tali dispositivi su un insieme $\alpha$ di terminali, è un insieme ciclicamente monotono massimale ed è quindi subgradiente di quelle particolari funzioni convesse di $\mathbb{R}^\alpha$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ che sono le forme quadratiche semidefinite positive, aventi dominio effettivo un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^\alpha$. Per ampliare questo universo, in modo da prendere in considerazione dispositivi non lineari, si è pensato di utilizzare le funzioni convesse semicontinue inferiormente su $\mathbb{R}^\alpha$ (di modo che i loro subgradienti siano mappe (ciclicamente) monotone massimali), soggette ad opportuni assiomi; e su queste definire la composizione in rete in modo da generalizzare quella del corrispondente universo lineare. Per questa via si ottiene un universo di dispositivi.

È infine da notare che i subgradienti delle funzioni convesse da noi considerate, non costituiscono un sottouniverso dell'universo totale su $\mathbb{R}$ definito in [3].

## 2. – Richiami e notazioni.

2$a$) Un universo di dispositivi (cfr. [1]) è dato dall'assegnazione di una coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$ ; dove $\mathfrak{D}$ è un funtore covariante tra la categoria $\mathcal{C}$ dei trasduttori elementari su insiemi finiti e la categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi ; $\sigma$ è una trasformazione naturale

$$\sigma_{\alpha,\beta} : \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \to \mathfrak{D}_{\alpha,\beta} \qquad \alpha, \beta \text{ insiemi finiti} ;$$

la coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$, inoltre, soddisfa ai seguenti assiomi ;

1) Commutatività del diagramma :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\mathfrak{D}(\tilde{i}_\alpha)"] \\
 & \mathfrak{D}_\alpha
\end{tikzcd}$$

essendo $\pi_\alpha$ proiezione canonica, $\mathfrak{D}(\tilde{i}_\alpha)$ applicazione indotta dal tra sduttore $\tilde{i}_\alpha : \alpha + \beta \to \alpha$, reciproco dell'inclusione.

2) Commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathfrak{D}_\beta \times \mathfrak{D}_\alpha \arrow[r, "\sigma_{\beta,\alpha}"'] & \mathfrak{D}_{\beta+\alpha}
\end{tikzcd}$$

dove gli isomorfismi verticali sono rispettivamente l'isomorfismo di scambio dei fattori nel prodotto cartesiano e l'isomorfismo indotto (mediante $\mathfrak{D}$) da quello di scambio degli addendi nella somma diretta.

3) Commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta) \times \mathfrak{D}_\gamma & \xrightarrow{\sigma_{\alpha,\beta} \times \mathrm{id}_\gamma} & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \times \mathfrak{D}_\gamma & \xrightarrow{\sigma_{(\alpha+\beta)\cdot\gamma}} & \mathfrak{D}_{(\alpha+\beta)+\gamma} \\
\downarrow \wr & & & & \downarrow \wr \\
\mathfrak{D}_\alpha \times (\mathfrak{D}_\beta \times \mathfrak{D}_\gamma) & \xrightarrow[\mathrm{id}_\alpha \times \sigma_{\beta,\gamma}]{} & \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_{\beta+\gamma} & \xrightarrow[\sigma_{\alpha\cdot(\beta+\gamma)}]{} & \mathfrak{D}_{\alpha+(\beta+\gamma)}
\end{array}$$

dove gli isomorfismi verticali sono rispettivamente quello di associatività del prodotto cartesiano e quello indotto (mediante $\mathfrak{D}$) dall'isomorfismo di associatività della somma diretta.

4) $\mathfrak{D}_\varnothing = \{1\}$, cioè esiste uno ed un solo elemento in $\mathfrak{D}_\varnothing$.

2*b*) In seguito, faremo uso, per la costruzione di un universo di dispositivi, di due funtori tra la categoria degli insiemi finiti e quella degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Poniamo per ogni insieme finito $\alpha$

$$\mathbb{R}^\alpha = \bigoplus_{i\in\alpha} \mathbb{R}$$

l'usuale spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione card $\alpha$.

Sia poi $\varphi : \alpha \to \beta$ una applicazione tra insiemi finiti; definiamo l'applicazione lineare

$$\varphi^\cdot : \mathbb{R}^\beta \to \mathbb{R}^\alpha$$

ponendo

$$\varphi^\cdot = \sum_{j=\varphi(i)} \varepsilon_i \pi_j \qquad (i \in \alpha,\ j \in \beta),$$

essendo le applicazioni lineari

$$\mathbb{R}^\beta \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R} \xrightarrow{\varepsilon_i} \mathbb{R}^\alpha$$

rispettivamente proiezioni e iniezioni canoniche. Ciò posto $(-)^\cdot$, risulta essere un funtore controvariante.

Definiamo ora il funtore covariante $(-).$, ponendo per ogni insieme finito $\alpha$, nuovamente

$$\mathbb{R}_\alpha = \bigoplus_{i \in \alpha} \mathbb{R}$$

e per ogni applicazione $\varphi : \alpha \to \beta$

$$\varphi. : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$$

dove

$$\varphi. = \sum_{j = \varphi(i)} \varepsilon_j \pi_i \qquad (i \in \alpha\,,\ j \in \beta)\,.$$

essendo le applicazioni lineari

$$\mathbb{R}_\alpha \xrightarrow{\ \pi_i\ } \mathbb{R} \xrightarrow{\ \varepsilon_j\ } \mathbb{R}_\beta$$

rispettivamente proiezioni e iniezioni canoniche.

Considereremo gli spazi $\mathbb{R}^\alpha$ e $\mathbb{R}_\alpha$, dianzi definiti, uno duale dell'altro, sottointendendo le identificazioni

$$(\mathbb{R}^\alpha)^* = \mathbb{R}_\alpha \quad \text{e} \quad (\mathbb{R}_\alpha)^* = \mathbb{R}^\alpha$$

ottenute dagli usuali isomorfismi indotti dalla base canonica.

Indicheremo con

$$\langle -\,,\, - \rangle : \mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$$

l'usuale forma bilineare indotta da tale abbinamento duale.

È utile rilevare allora che le applicazioni lineari $\varphi^{\cdot}$ e $\varphi.$, indotte (mediante i funtori in precedenza definiti) da un'applicazione $\varphi : \alpha \to \beta$, sono una aggiunta dell'altra.

2c) Avremo pure bisogno di considerare delle funzioni di $\mathbb{R}^\alpha$ a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per una tale funzione $f$, chiameremo dominio effettivo di $f$ ed indicheremo dom $f$ l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^\alpha$ tali che $f(x) \in \mathbb{R}$.

Ci servirà anche un'operazione di coniugio.

Sia quindi $f : \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa semicontinua inferiormente rispetto alla topologia euclidea (s.c.i. d'ora in poi), di dominio effettivo non vuoto, allora indicheremo con $f^*$ la funzione su $\mathbb{R}_\alpha$, coniugata di $f$ secondo Fenchel, così definita:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^\alpha} \{ \langle x, y \rangle - f(x) \}, \qquad y \in \mathbb{R}_\alpha$$

Naturalmente vale una analoga definizione (ed uguale notazione) per la coniugata di una funzione definita su $\mathbb{R}_\alpha$.

La funzione $f^*$ è ancora una funzione convessa s.c.i. a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, di dominio effettivo non vuoto ed è noto che $f^{**} = f$. (cfr. [4] Teorema 12.2).

## 3. – Costruzione dell'universo $\mathfrak{M}$.

Sia $\alpha$ un insieme finito, consideriamo l'insieme, che indicheremo $\mathfrak{D}_\alpha$, delle funzioni

$$f: \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

convesse s.c.i. e tali che

1) $\qquad f(0) = 0$

2) $\qquad f(x) \geq 0 \qquad$ per ogni $x \in \mathbb{R}^\alpha$

3) $\qquad 0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$

dove $\operatorname{ri} \operatorname{dom} f$ è la parte interna di $\operatorname{dom} f$ rispetto al sottospazio lineare di $\mathbf{R}^\alpha$ generato da $\operatorname{dom} f$.

Osservazioni: Sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$

*a*) $f$ è una funzione convessa s.c.i.: ciò implica che il subgradiente $\partial f$ è un insieme ciclicamente monotono massimale di $\mathbb{R}^\alpha \times \mathbb{R}_\alpha$.

*b*) $f(0) = 0$: tale assioma ha il significato di fissare un punto di riferimento per la funzione potenziale $f$, in modo che vi sia una corrispondenza biunivoca tra le funzioni di $\mathfrak{D}_\alpha$ e i loro subgradienti (potendosi quindi, considerare questi ultimi come dispotivi su $\alpha$ dell'universo che stiamo costruendo).

*c*) $f(x) \geq 0 = f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^\alpha$; ciò implica che il funzionamento nullo $(0, 0)$ appartiene a $\partial f$.

*d*) infine $0 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$: faremo vedere in seguito, con un esempio, che i restanti assiomi non bastano a rendere $\mathfrak{D}$ (che ci apprestiamo a definire) un funtore.

PROPOSIZIONE 1. Siano $\varphi : \alpha \to \gamma$ e $\psi : \beta \to \gamma$ applicazioni tra insiemi finiti. Sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$; la funzione

$$((f\varphi^{\cdot})^* \psi_{\cdot})^*$$

è un elemento di $\mathfrak{D}_\beta$.

PROPOSIZIONE 2. Sia $\Gamma : \alpha \to \beta$ un trasduttore. Sia

$$\alpha \xrightarrow{\varphi} \gamma \xleftarrow{\psi} \beta$$

una coppia di applicazioni che individua $\Gamma$, tale, cioè, che $\Gamma = \tilde{\psi}\,\varphi$(1).
Sia $f \in \mathfrak{D}_\alpha$; la funzione

$$((f\,\varphi^{\cdot})^*\,\psi_{\cdot})^*$$

non dipende dalla fattorizzazione $\tilde{\psi}\,\varphi$ scelta per $\Gamma$.

Daremo la dimostrazione di tali proposizioni al successivo n. 5*a*).
Sia allora $\Gamma : \alpha \to \beta$ un trasduttore, risulta pertanto legittimo far corrispondere a $\Gamma$ una applicazione tra insiemi, che indicheremo

$$\mathfrak{D}(\Gamma) = \mathfrak{D}_\alpha \to \mathfrak{D}_\beta$$

ponendo per ogni $f \in \mathfrak{D}_\alpha$

$$\mathfrak{D}(\Gamma)\,f = ((f\varphi^{\cdot})^*\,\psi_{\cdot})^*$$

essendo

$$\alpha \xrightarrow{\varphi} \gamma \xleftarrow{\psi} \beta$$

una coppia di applicazioni che individua $\Gamma$.
Risulta, dalla definizione, che se $1_\alpha : \alpha \to \alpha$ è il trasduttore identico, $\mathfrak{D}(1_\alpha)$ è l'applicaziione identica (2), in quanto per ogni $f \in \mathfrak{D}_\alpha$, $\mathfrak{D}(1_\alpha)\,f = f^{**} = f$.

---

(1) Cfr. [2] Teorema 2.2.
(2) Tuttavia si osservi che se gli elementi di $\mathfrak{D}_\alpha$ non fossero funzioni convesse s.c.i. la proprietà sopra enunciata non sarebbe verificata.

Inoltre vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3. Siano $\Gamma_1 : \alpha \to \beta$, $\Gamma_2 : \beta \to \delta$ trasduttori, allora

$$\mathfrak{D}(\Gamma_2 \Gamma_1) = \mathfrak{D}(\Gamma_2)\,\mathfrak{D}(\Gamma_1)\,.$$

Daremo la dimostrazione al successivo n. 5*a*).

Pertanto, $\mathfrak{D}$ risulta essere un funtore covariante tra la categoria dei trasduttori e quella degli insiemi.

Siano $f \in \mathfrak{D}_\alpha$ e $g \in \mathfrak{D}_\beta$; consideriamo la funzione $f \oplus g$ che ad un generico punto $(x, y) \in \mathbb{R}^\alpha \oplus \mathbb{R}^\beta$ associa il valore $f(x) + g(y)$. Con semplici considerazioni e utilizzando risultati noti sulle funzioni convesse s.c.i. (cfr. [4], Teorema 9.3) si prova che $f \oplus g \in \mathfrak{D}_{\alpha+\beta}$.

Consideriamo allora l'applicazione

$$\sigma_{\alpha,\beta} : \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \to \mathfrak{D}_{\alpha+\beta}$$

definita ponendo

$$\sigma_{\alpha,\beta}(f, g) = f \oplus g\,.$$

Proveremo al n. 5*b*) che $\sigma$ è una trasformazione naturale e che essa verifica gli assiomi degli universi di dispositivi. La coppia $(\mathfrak{D}, \sigma)$ costituisce quindi un universo di funzioni convesse s.c.i., ovvero (se si preferisce considerare i subgradienti di queste) un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali, che indicheremo con $\mathcal{M}$.

A questo punto è bene osservare che, come si è già accennato nella prefazione, per quanto i dispositivi di $\mathcal{M}$, come insiemi ciclicamente monotoni massimali, si possano ritrovare nell'universo di insiemi monotoni considerato in [3], tuttavia in $\mathcal{M}$ l'applicazione $\mathfrak{D}_\alpha \to \mathfrak{D}_\beta$, indotta da un trasduttore differisce in modo essenziale da quella definita in [3], tanto che, ivi, i dispositivi di $\mathcal{M}$ non costituiscono un sottouniverso, come dimostra il seguente esempio.

Si consideri nel piano $\mathbb{R}_{\}1,2\{}$ il cerchio $C$:

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\,.$$

Sia $\chi_C$ la funzione caratteristica di $C$ così definita:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C\,. \end{cases}$$

La funzione $\chi_C^*$ è un dispositivo di $\mathcal{M}$ sull'insieme di terminali $\{1, 2\}$; il sub-gradiente $\partial\chi_C^*$ è quindi un insieme ciclicamente monotono massimale. Consideriamo l'operazione di soppressione del terminale 2 cioè il trasduttore $\tilde{i} : \{1, 2\} \to \{1\}$, reciproco dell'inclusione. Nell'universo definito in [3], $\mathfrak{D}(\tilde{i})\ (\partial\chi_C^*)$ è il sottoinsieme di $\mathbf{R}^{\{1\}} \times \mathbf{R}_{\{1\}}$ costituito dal solo punto $(0, 0)$, e non è quindi un insieme ciclicamente monotono massimale.

In $\mathcal{M}$, invece, il subgradiente di $\mathfrak{D}(\tilde{i})\,\chi_C^*$, che è la funzione identicamente nulla in $\mathbf{R}^{\{1\}}$, è ciclicamente monotono massimale.

## 4. – Ancora sugli assiomi di $\mathfrak{D}_\alpha$.

Al n. 3, tra gli assiomi cui soddisfano le funzioni costituenti $\mathfrak{D}_\alpha$ abbiamo posto che l'interno relativo del dominio di tali funzioni contenga l'origine.

Ci pare interessante far vedere che i rimanenti assiomi su $\mathfrak{D}_\alpha$ non bastano a rendere $\mathfrak{D}$ un funtore; infatti, per quanto anche in questa nuova situazione, le proposizioni 1. e 2. del n. 3 continuino a valere ed abbia quindi senso considerare l'applicazione

$\mathfrak{D}(\Gamma) : \mathfrak{D}_\alpha \to \mathfrak{D}_\beta$ indotta dal trasduttore $\Gamma : \alpha \to \beta$, definita al paragrafo precedente: tuttavia, ora, tale applicazione non preserva la composizione. A tal scopo si considerino i trasduttori seguenti:

| | | |
|---|---|---|
| $\tilde{i}$ | $: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ | reciproco dell'inclusione |
| $\varphi$ | $: \{1, 2\} \to \{1\}$ | applicazione |
| $\psi$ | $: \{1, 2, 3\} \to \{1, 3\}$ | l'applicazione $\psi(1) = \psi(2) = 1$, $\psi(3) = 3$ |
| $\tilde{j}$ | $: \{1, 3\} \to \{1\}$ | reciproco dell'inclusione. |

Orbene $\varphi\tilde{i} = \tilde{j}\psi$, mentre $\mathfrak{D}(\varphi)\,\mathfrak{D}(\tilde{i}) \neq \mathfrak{D}(\tilde{j})\,\mathfrak{D}(\psi)$.

Per verificarlo si consideri nello spazio $\mathbf{R}^{\{1,2\}}$ il cerchio $C$:

$$\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq 1$$

e la funzione $p_C : \mathbf{R}^{\{1,2\}} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definita da:

$$p_C(x) = \inf\{\varrho \mid \varrho > 0,\quad x \in \varrho C\}$$

(ovviamente: $\inf \varnothing = +\infty$).

$p_C$ è convessa, inoltre essendo $C$ chiuso, è anche s.c.i. (cfr. [5], § 2, prop. 23), cioè il suo epigrafo $\hat{C}$ considerato nello spazio $\mathbb{R}^{\}1,2,3\{}$ è un insieme convesso e chiuso. Ci interessa considerare la funzione caratteristica di $\hat{C}$, cioè la funzione $\chi_{\hat{C}}$ così definita:

$$\chi_{\hat{C}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \hat{C} \\ +\infty & \text{se } x \notin \hat{C} \end{cases}$$

$\chi_{\hat{C}}$ è convessa s.c.i. $\chi_{\hat{C}}(0) = 0$, $\chi_{\hat{C}}(x) \geq 0$, mentre $0 \notin \text{ri dom}\, \chi_{\hat{C}}$.

Ora $\mathfrak{D}(\tilde{i})\chi_{\hat{C}}$ è la funzione caratteristica del semipiano $x_2 \geq x_1$ di $\mathbb{R}^{\}1,2\{}$ e quindi $\mathfrak{D}(\varphi)\mathfrak{D}(\tilde{i})\chi_{\hat{C}}$ è la funzione identicamente nulla in $\mathbb{R}^{\}1\{}$; mentre $\mathfrak{D}(\psi)\chi_{\hat{C}}$ è la funzione caratteristica dell'insieme di punti di $\mathbb{R}^{\}1,3\{}$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 = 0$ e $x^3 \geq 0$ e quindi $\mathfrak{D}(\tilde{j})\,\mathfrak{D}(\psi)\,\chi_{\hat{C}}$ è la funzione che vale zero nell'origine e $+\infty$ negli altri punti di $\mathbb{R}^{\}1\{}$.

## 5. – Dimostrazioni.

5*a*) Per alcune delle dimostrazioni, ci serviremo dei seguenti due lemmi.

LEMMA 1. Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Valgono i seguenti fatti:

*a*) Se $C \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso allora $\text{ri}\, A(C) = A(\text{ri}\, C)$

*b*) Se $K\, \mathbb{R} \subset {}^m$ è un insieme convesso e $A^{-1}(\text{ri}\, K) \neq \varnothing$, allora $\text{ri}\, A^{-1}(K) = A^{-1}(\text{ri}\, K)$.

Per la dimostrazione di questo lemma si veda, ad esempio [4] Teor. 6.6 e Teor. 6.7.

LEMMA 2. Sia $\varphi : \alpha \to \beta$ una applicazione tra insiemi finiti; sia $f \in \mathfrak{D}_\beta$: definiamo per ogni $z \in \mathbb{R}^\alpha$

$$\bar{f}(z) = \inf_y f(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^\beta,\ \varphi^{\cdot}(y) = z)$$

(ovviamente: se $z \notin \varphi^{\cdot}(\mathbb{R}^\beta)$, allora $\bar{f}(z) = +\infty$).

Valgono i seguenti fatti :

*a*) $(f^* \varphi.)^* = \bar{f}^{**}$

*b*) $\varphi^{\cdot}$ (ri dom $f$) = ri dom $\bar{f}^{**}$ = ri dom $\bar{f}$

*c*) $\bar{f}^{**}(x) = \bar{f}(x)$ per ogni $x \in$ ri dom $\bar{f}$ .

Dimostrazione : Come è noto $\bar{f}$ è una funzione convessa in generale non s.c.i., quindi $\bar{f}^{**}$ è la regolarizzata s.c.i. di $\bar{f}$ (cfr. [4] Teorema 12.2).

*a*) Sia $x \in \mathbb{R}^\alpha$ ; $f^*\varphi.(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^\beta} \{\langle \varphi.(x), y\rangle - f(y)\} =$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}^\beta} \{\langle x , \varphi^{\cdot}(y)\rangle - f(y)\} = \sup_{z \in \varphi^{\cdot}(\mathbb{R}^\beta)} [\sup_{\varphi^{\cdot}(y) = z} \{\langle x , \varphi^{\cdot}(y)\rangle - f(y)\}] =$$

$$= \sup_{z \in \varphi^{\cdot}(\mathbb{R}^\beta)} \{\langle x , z\rangle - \bar{f}(z)\} = \sup_{z \in \mathbb{R}^\alpha} \{\langle x , z\rangle - \bar{f}(z)\} .$$

l'ultima uguaglianza seguendo dal fatto che : se $z \in \mathbb{R}^\alpha$, $z \notin \varphi^{\cdot}(\mathbb{R}^\beta)$ , allora $\bar{f}(z) = +\infty$ ; quindi $f^*\varphi. = \bar{f}^*$, cioè $(f^*\varphi.)^* = \bar{f}^{**}$

*b*) ri dom $\bar{f}$ = ri dom $\bar{f}^{**}$ (cfr. [4] Corollario 7.4.1), inoltre dalla definizione di $\bar{f}$ si ha $\varphi^{\cdot}$(dom $f$) = dom $\bar{f}$ .

Applicando il lemma 1.*a*) si ha :

$$\varphi^{\cdot}(\text{ri dom } f) = \text{ri } \varphi^{\cdot}(\text{dom } f) = \text{ri dom } \bar{f}$$

*c*) Cfr. [4] Teorema 7.4.

Dimostrazione della proposizione 1.

La funzione, su $\mathbb{R}^\gamma$, $f\varphi^{\cdot}$ è convessa s.c.i. in quanto $\varphi^{\cdot}$ è lineare ed $f$ è convessa s.c.i. inoltre vale zero nell'origine ed assume valori in $0 \vdash\!\dashv +\infty$ quindi anche la sua coniugata è convessa s.c.i. ed un semplice calcolo diretto mostra che pure essa vale zero nell'origine di $\mathbb{R}_\gamma$ ed assume valori in $0 \vdash\!\dashv +\infty$ . Un analogo ragionamento per mette di affermare che $\big((f\varphi^{\cdot})^*\psi.\big)^*$ definita su $\mathbb{R}^\beta$ è una funzione convessa s.c.i. che vale zero nell'origine ed assume valori in $0 \vdash\!\dashv +\infty$ .

Resta da provare che $0 \in$ ri dom $\big((f\varphi^{\cdot})^* \psi.\big)^*$.

Intanto $0 \in$ ri dom $f\varphi^{\cdot}$, infatti dom $f\varphi^{\cdot} = \varphi^{\cdot -1}$ (dom $f$) e $\varphi^{\cdot -1}$(ri dom $f$) $\neq \varnothing$, in quanto $0 \in$ ri dom $f$ : e si ha la tesi applicando lemma 1.*b*). Infine, per lemma 2.*b*) $\psi^{\cdot}$(ri dom $f\varphi^{\cdot}$) = ri dom$(f\varphi^{\cdot})^*\psi.)^*$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.

Sia $$\alpha \xrightarrow{\varrho} \gamma' \xleftarrow{\tau} \beta$$

la coppia minima di $\Gamma$ (cfr. [2] pag. 226 e seg.) allora esiste $\mu$ applicazione iniettiva tale che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, "\varrho"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \gamma' \arrow[d, "\mu"] & \beta \arrow[l, "\tau"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
& \gamma &
\end{tikzcd}$$

Si ha $((f\varphi^{\cdot})^{*}\psi.)^{*} = ((f\varrho^{\cdot}\ \mu^{\cdot})^{*}\mu.\tau.)^{*}$.

Poniamo $f\varrho^{\cdot} = g$, e facciamo vedere che $(g\,\mu^{\cdot})^{*}\mu. = g^{*}$

$$(g\mu^{\cdot})^{*}\mu.(u) = \sup_{x\in \mathbb{R}^{\gamma}} \{\langle x\,,\ \mu.(u)\rangle - g\mu^{\cdot}(x)\} = \sup_{x\in \mathbb{R}^{\gamma}} \{\langle \mu^{\cdot}(x)\,,\ u\rangle - g\mu^{\cdot}(x)\} =$$
$$= \sup_{v\in \mathbb{R}^{\gamma'}} \{\langle v\,,\ u\rangle - g(v)\} = g^{*}(u)\ ;$$

la penultima uguaglianza valendo, in quanto $\mu^{\cdot}$ è surgettiva; e quindi $((f\varphi^{\cdot})^{*}\psi.)^{*} = ((f\varrho^{\cdot})^{*}\tau.)^{*}$.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 3.

Sia $\Gamma_1 : \alpha \xrightarrow{\varphi_1} \gamma_1 \xleftarrow{\psi_1} \beta$ ; $\Gamma_2 : \beta \xrightarrow{\varphi_2} \gamma_2 \xleftarrow{\psi_2} \delta$

con $\varphi_1$, $\psi_1$, $\varphi_2$, $\psi_2$ applicazioni tra insiemi finiti.

Si consideri il push-out

(1)
$$\begin{tikzcd}
& \beta \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
\gamma_1 \arrow[dr, "\varrho"'] & & \gamma_2 \arrow[dl, "\tau"] \\
& \gamma_3 &
\end{tikzcd}$$

allora $\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 : \alpha \xrightarrow{\varphi_1} \gamma_1 \xrightarrow{\varrho} \gamma_3 \xleftarrow{\tau} \gamma_2 \xleftarrow{\psi_2} \delta$, quindi la proposizione sarà dimostrata facendo vedere che se $f\in \mathfrak{D}_{\gamma_1}$ allora

$$(f^{*}\,\psi_1.)^{*}\,\varphi_2^{\cdot} = ((f\,\varrho^{\cdot})^{*}\,\tau.)^{*}\,.$$

Sia per ogni $x \in \mathbb{R}^{\gamma_2}$

$$\overline{f\varrho^{\cdot}}(x) = \inf_{y} f\varrho^{\cdot}(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^{\gamma_3},\ \tau^{\cdot}(y) = x)$$

quindi per il lemma 2.$a$)

$$\big((f\varrho^{\cdot})^{*}\tau.\big)^{*} = \overline{f\varrho^{\cdot}}^{**}$$

Sia per ogni $z \in \mathbb{R}^{\beta}$

$$\bar{f}(z) = \inf_{y} f(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^{\gamma_1},\ \psi_1^{\cdot}(y) = z)$$

quindi per il lemma 2.$a$)

$$(f^{*}\psi_{1}.)^{*}\, \varphi_2^{\cdot} = \bar{f}^{**}\, \varphi_2^{\cdot}\,.$$

Dimostriamo che $\overline{f\varrho^{\cdot}} = \bar{f}\,\varphi_2^{\cdot}$ ; infatti essendo il quadrato (1) un push-out è esatta la seguenza

$$\mathbb{R}^{\gamma_3} \xrightarrow{\begin{bmatrix}\varrho^{\cdot}\\ \tau^{\cdot}\end{bmatrix}} \mathbb{R}^{\gamma_1} \oplus \mathbb{R}^{\gamma_2} \xrightarrow{[\psi_1^{\cdot},\, -\varphi_2^{\cdot}]} \mathbb{R}^{\beta}$$

perciò per ogni $x \in \mathbb{R}^{\gamma_2}$ si ha

$$\varrho^{\cdot}\big(\tau^{\cdot-1}(x)\big) = \psi_1^{\cdot-1}\big(\varphi_2^{\cdot}(x)\big)$$

pertanto

$$\overline{f\varrho^{\cdot}}(x) = \inf_{\tau^{\cdot}(y)=x} f\varrho^{\cdot}(y) = \inf_{\psi_1^{\cdot}(y)=\varphi_2^{\cdot}(x)} f(y) = \bar{f}\,\varphi_2^{\cdot}(x)\,.$$

Ora, per il lemma 2.$b$)

$$\mathrm{ri\ dom}\big((f\varrho^{\cdot})^{*}\tau.\big)^{*} = \mathrm{ri\ dom}\,\overline{f\varrho^{\cdot}}$$

ed ivi, per il lemma 2.$c$) tali funzioni coincidono ; è immediato inoltre, che :

$$\mathrm{dom}\ (f^{*}\psi_1.)^{*}\varphi_2^{\cdot} = \varphi_2^{\cdot-1}\ \mathrm{dom}\ (f^{*}\psi_1^{\cdot})^{*}\ \ ;\ \ \varphi_2^{\cdot-1}\mathrm{dom}\ \bar{f} = \mathrm{dom}\,\bar{f}\varphi_2^{\cdot}$$

ed anche $0 \in \varphi_2^{\cdot -1}\big(\mathrm{ri\ dom}\ (f^* \psi_1\cdot)^*\big)$ quindi, applicando ove necessario il lemma 1.*b*) e il lemma 2.*b*), si ha la sequenza di uguaglianze:

$$\mathrm{ri\ dom}\ (f^*\psi_1\cdot)^*\varphi_2^{\cdot} = \mathrm{ri}\ \big(\varphi_2^{\cdot -1}\ \mathrm{dom}\ (f^*\psi_1\cdot)^*\big) = \varphi_2^{\cdot -1}\big(\mathrm{ri\ dom}\ (f^*\psi_1\cdot)^*\big) =$$

$$= \varphi_2^{\cdot -1}\ (\mathrm{ri\ dom}\,\bar{f}) = \mathrm{ri}\ (\varphi_2^{\cdot -1}\ \mathrm{dom}\,\bar{f}) = \mathrm{ri\ dom}\,\bar{f}\varphi_2^{\cdot}$$

ed ivi le funzioni $(f^*\psi_1\cdot)^*\varphi_2^{\cdot}$ e $\bar{f}\varphi_2^{\cdot}$ coincidono, in quanto per il lemma 2.*c*) in $\mathrm{ri\ dom}\,\bar{f}$, $(f^*\psi_1\cdot)^*$ e $\bar{f}$ coincidono.

Pertanto le funzioni

$$\big((f\varrho^{\cdot})^*\tau\cdot\big)^* \quad \text{e} \quad (f^*\psi_1\cdot)^*\varphi_2^{\cdot}$$

convesse e s.c.i., sono tali che l'interno relativo del loro dominio è lo stesso per entrambe ed ivi esse coincidono, ma allora, come ben noto (vedasi 4 Corollario 7.3.4.) coincidono ovunque.

5*b*) Per quanto riguarda $\sigma$, definita al n. 3, essa è una trasformazione naturale. Basta verificare la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}_\alpha \times \mathfrak{D}_\beta \arrow[r, "\sigma_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "\mathfrak{D}(\Gamma_1)\times\mathfrak{D}(\Gamma_2)"'] & \mathfrak{D}_{\alpha+\beta} \arrow[d, "\mathfrak{D}(\Gamma_1+\Gamma_2)"] \\ \mathfrak{D}_\delta \times \mathfrak{D}_\gamma \arrow[r, "\sigma_{\delta.\gamma}"'] & \mathfrak{D}_{\delta+\gamma} \end{tikzcd}$$

ove $\Gamma_1 : \alpha \to \delta$, $\Gamma_2 : \beta \to \gamma$ sono trasduttori.

Basterà fare le verifiche con $\Gamma_1$ identità, e $\Gamma_2$, di volta in volta, applicazione e reciproco di applicazione e viceversa scambiando $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$.

*a*) Sia $\Gamma_1 = \mathrm{id}$ e $\Gamma_2 = \varphi$ applicazione, allora:

$$\mathfrak{D}\ (\mathrm{id}+\varphi)\ \sigma_{\alpha,\beta}\,(f\,,g) = \mathfrak{D}\ (\mathrm{id}+\varphi)\ (f \oplus g) = (f \oplus g)\ (\mathrm{id}+\varphi)^{\cdot} =$$

$$= f \oplus (g\varphi^{\cdot}) = \sigma_{\alpha,\gamma}\,(f\,, g\varphi^{\cdot}) = \sigma_{\alpha,\gamma}\big(\mathfrak{D}\ (\mathrm{id}) \times \mathfrak{D}\ (\varphi)\big)\,(f\,,g)\,.$$

*b*) Sia $\Gamma_1 = \mathrm{id}$ e $\Gamma_2 = \tilde{\varphi}$ , $\varphi$ applicazione.

Osserviamo, innanzitutto, che in generale si ha:

$$(f \oplus g)^* = f^* \oplus g^* \qquad \text{infatti :}$$

$$\begin{aligned}(f \oplus g)^*(x, y) &= \sup_{(v,w)} \{\langle x, v\rangle + \langle y, w\rangle - (f \oplus g)(v, w)\} = \\ &= \sup_{(v,w)} \{\langle x, v\rangle + \langle y, w\rangle - f(v) - g(w)\} = \sup_{v} \{\langle x, v\rangle - f(v)\} + \\ &\quad + \sup_{w} \{\langle y, w\rangle - g(w)\} = f^*(x) + g^*(y).\end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(\mathrm{id} + \tilde{\varphi})(\sigma_{\alpha,\beta}(f, g)) &= \mathfrak{D}(\mathrm{id} + \tilde{\varphi})(f \oplus g) = ((f \oplus g)^*(\mathrm{id} + \varphi).)^* = \\ &= ((f^* \oplus g^*)(\mathrm{id} + \varphi).)^* = (f^* \oplus (g^* \varphi.))^* = f \oplus (g^* \varphi.)^* = \\ &= \sigma_{\alpha,\gamma}(f, (g^* \varphi.)^*) = \sigma_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{D}(\mathrm{id}) \times \mathfrak{D}(\tilde{\varphi}))(f, g).\end{aligned}$$

Per quanto concerne i quattro assiomi del n. 2 : 2), 3), 4), sono banalmente verificati, mentre 1) segue da un semplice calcolo diretto.

## BIBLIOGRAFIA


[1] DARBO G., *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi,* Symposia Mathematica, vol. IV, pag. 303 e seg.

[2] PARODI F., *Simmetrizzazioni di una categoria,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XLIV pag. 223 e seg. (1970).

[3] PARODI F., *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova vol. LVIII (1977).

[4] ROCKAFELLAR T., *Convex Analysis,* Princeton Univ. Press. (1970).

[5] BOURBAKI N., *Eléments de Mathématiques Espaces Vectoriels Topologiques Chapitres II* - 2e édition - Hermann, Paris.

[6] TESTA S., *Sui sottouniversi normali di un universo di dispositivi lineari su un corpo.* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. LVI pag. 193. e seg. (1977).


Manoscritto pervenuto in redazione il 27 giugno 1977.