SERGIO BRESSAN

Integrazione del problema dell'elastostatica nel caso asimmetrico e con coppie di contatto. Applicazione al problema delle piastre. IIa parte

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 53-73

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__53_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Integrazione del problema dell'elastostatica nel caso asimmetrico e con coppie di contatto Applicazione al problema delle piastre

IIª Parte

SERGIO BRESSAN *

Parte IIª – *Integrazione del problema della statica delle piastre di spessore qualunque nel caso asimmetrico e con coppie di contatto - Caso della piastra sottile.*

§ 1. - Introduzione.

Nella 1ª parte (1) di questo lavoro ho esteso, all'integrazione del problema dell'elastostatica isoterma per un continuo di Cosserat con caratteristiche di tensione asimmetriche e con coppie di contatto, il metodo di integrazione applicato da G. Grioli per un continuo classico con « stress » simmetrico. In questa IIª parte elaboro la precedente teoria in modo da renderla più comoda per affrontare lo studio di una piastra di spessore qualunque. Sviluppo quindi la teoria ordinaria della piastra sottile.

(*) Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico, Via Belzoni, 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(1) S. BRESSAN, *Integrazione del Problema dell'elastostatica ...* » Iª Parte - Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Per mettere in evidenza la profonda differenza dei risultati che un continuo di Cosserat con rotazioni libere comporta rispetto ad un sistema classico simmetrico, ricavo in modo esplicito, nel caso della piastra sottile, omogenea e nell'ipotesi di isotropia elastica, le espressioni delle derivate seconde della terza componente dello spostamento (abbassamento) da cui si ricavano le formule fondamentali della teoria ordinaria (momenti flettenti, ecc.).

§ 2. - **Premesse.**

Sia C una piastra di sezione media piana A, σ il suo bordo, porzione cilindrica colle generatrici ortogonali alla sezione media, ed l l'intersezione di σ con questa (l è il contorno di A).

La terna trirettangola e levogira $0x_1\, x_2\, x_3$ di riferimento abbia il piano $x_3 = 0$ coincidente colla sezione media della piastra A. Supponiamo, ad esempio, che detto piano $x_3 = 0$ sia orizzontale e che l'asse x_3 sia orientato verso il basso. Sia h lo spessore costante della piastra.

Chiamo inoltre $g_r(x_1\,, x_2)$ $(r = 1, 2, 3)$ le componenti della densità di un carico verticale distribuito sulla faccia superiore e $r_r(x_1\,, x_2)$ $(r = 1,\ 2,\ 3)$ l'angalogo per la coppia di contatto.

Se la piastra appoggia su una striscia A^* della faccia inferiore, denoto con $G_r (r = 1, 2, 3)$ le componenti della densità di reazione vincolare e con R_r $(r = 1, 2, 3)$ quelle analoghe di coppia.

Sia σ' la parte in σ ove è presente un vincolo di incastro e l' la corrispondente porzione di l. Chiamo Φ_r $(r = 1, 2, 3)$ la densità di reazione vincolare d'incastro e μ_r $(r = 1, 2, 3)$ l'analogo per la coppia. Siano inoltre f_r $(r = 1, 2, 3)$ la densità di forza superficiale esterna agente su $\sigma - \sigma'$ ed m_r $(r = 1, 2, 3)$ l'analogo per la coppia specifica.

Per le ipotesi fatte le equazioni dell'equilibrio si possono scrivere :

$$\mathrm{II^a,1)} \qquad \begin{cases} X_{rs,s} = 0 \\ N_{rs,s} + e_{rpq}\, X_{qp} = 0 \end{cases} \quad \text{in } C \qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$\mathrm{II^a,2)} \qquad \sum_{1=s}^{2} X_{rs}\, n_s = \begin{cases} f_r & \text{su } \sigma - \sigma' \\ \Phi_r & \text{su } \sigma' \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$\text{II}^{\text{a}},3) \qquad \sum_{1=s}^{2} N_{rs}\, n_s = \begin{cases} m_r & \text{su } \sigma - \sigma' \\ \mu_r & \text{su } \sigma' \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$\text{II}^{\text{a}},4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{r3} = \begin{cases} g_r(x_1\,, x_2) & \text{per } x_3 = -\dfrac{h}{2} \\ 0 & \text{»} \quad x_3 = \dfrac{h}{2}\,; \quad (x_1\,, x_2) \in A - A^* \\ -\,G_r(x_1\,, x_2) & \text{»} \quad x_3 = \dfrac{h}{2}\,; \quad (x_1\,, x_2) \in A^* \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, 3) \\ N_{r3} = \begin{cases} r_r(x_1\,, x_2) & \text{per } x_3 = -\dfrac{h}{2} \\ 0 & \text{»} \quad x_3 = \dfrac{h}{2}\,; \quad (x_1\,, x_2) \in A - A^* \\ -\,R_r(x_1\,, x_2) & \text{»} \quad x_3 = \dfrac{h}{2}\,; \quad (x_1\,, x_2) \in A^* \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, 3) \end{array} \right.$$

§ 3. - Sviluppi generali.

Scrivo :

$$\text{II}^{\text{a}},5) \qquad Q_t(x_3) = \frac{d^t}{dx_3}\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)^t \qquad (t = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

e considero la successione $\{Q_t\}$ di polinomi nell'intervallo $\left(-\dfrac{h}{2}\,, \dfrac{h}{2}\right)$. Si vede facilmente che i polinomi sono ortogonali (2) e che ognuna delle X_{rs} e delle N_{rs} è sviluppabile in quell'intervallo in serie dei Q_t con coefficienti dipendenti da $x_1\,, x_2$.

---

(2) Se si prescinde da fattori indipendenti da x_3, coincidono coi polinomi di Legendre relativi all'intervallo $(-h/2,\ h/2)$.

Pongo allora:

$$\text{II}^a,6)\qquad \begin{cases} X_{rs} = \sum\limits_{0=t}^{\infty} \dfrac{\xi_{rst}}{k_t^2}\, Q_t \\[2ex] N_{rs} = \sum\limits_{0=t}^{\infty} \dfrac{\varphi_{rst}}{k_t^2}\, Q_t \end{cases} \qquad (r,\, s = 1, 2, 3\ ;\ t = 0, 1, 2 \ldots)$$

ove è:

$$\text{II}^a,7)\qquad \begin{cases} \xi_{rst} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} X_{rs} Q_t \, dx_3 \\[2ex] \varphi_{rst} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} N_{rs} Q_t \, dx_3 \end{cases} \qquad (r, s = 1, 2, 3)\ (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\text{II}^a,8)\qquad k_t^2 = \int_{-h/2}^{h/2} Q_t^2 \, dx_3 \qquad (t = 0, 1, 2 \ldots)$$

Indico con $\{w_\lambda\}$ la successione di tutti i monomi del tipo $x_1^\alpha\ x_2^\beta$ ordinati in modo che il grado non decresca al crescere di λ.

Chiamo poi P_λ il polinomio ottenuto aggiungendo a w_λ quella combinazione lineare dei monomi w_0, w_1, ... $w_{\lambda-1}$ che rende P_λ ortogonale in A a w_0, w_1, ... $w_{\lambda-1}$. Sia $\{P_\lambda\}$ la successione di tutti i polinomi ortogonali in A e linearmente indipendenti così definiti [3].

Si può scrivere:

$$\text{II}^a,9)\qquad \begin{cases} \xi_{rst} = \sum\limits_{0=\lambda}^{\infty} \dfrac{\overline{\xi_{rst} P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2}\, P_\lambda \\[2ex] \varphi_{rst} = \sum\limits_{0=\lambda}^{\infty} \dfrac{\overline{\varphi_{rst} P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2}\, P_\lambda \end{cases} \qquad (r,\, s = 1, 2, 3\ ;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$$

ove è:

$$\varrho_\lambda^2 = \frac{1}{A} \int_A P_\lambda^2 \, dA$$

e il soprassegno indica il valor medio in A.

---

(3) Vedi: PICONE, *Lezioni di Analisi funzionale* (1946-47).

Osservo che, colla notazione ad un solo indice (vedi parte I^a) l'espressione dell'energia potenziale elastica relativa all'intera piastra è:

$$\text{II}^a,10) \qquad W^*_{tot.} = \frac{A}{2} \sum_{0=t}^{+\infty} \frac{1}{k_t^2} \sum_{0=\lambda}^{+\infty} \frac{1}{\varrho_\lambda^2} \sum_{1=r,s}^{9} \left[m_{rs}\, \overline{\xi_{rt} P_\lambda}\; \overline{\xi_{st} P_\lambda} + \right.$$

$$\left. + \, n_{rs}\, \overline{\varphi_{rt} P_\lambda}\; \overline{\varphi_{st} P_\lambda} \right].$$

§ 4. - Proprietà di media.

Pongo :

$$\beta_{rt} = \begin{cases} g_r Q_t\left(-\dfrac{h}{2}\right) & \rightarrow \text{ in } A - A^* \\ \left[g_r Q_t\left(-\dfrac{h}{2}\right) + G_r Q_t\left(\dfrac{h}{2}\right)\right] & \rightarrow \text{ in } A^* \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

II^a,11)

$$\nu_{rt} = \begin{cases} r_r Q_t\left(-\dfrac{h}{2}\right) & \text{in } A - A^* \\ r_r Q_t\left(-\dfrac{h}{2}\right) + R_r Q_t\left(\dfrac{h}{2}\right) & \text{in } A^* - \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Dalle (II^a,1, 2, 3, 4) si ricavano le seguenti equazioni valide in A :

$$\text{II}^a,12) \qquad \sum_{1=s}^{2} \frac{\partial \xi_{rst}}{\partial x_s} - \xi'_{r3t} = \beta_{rt} \qquad (r = 1, 2, 3\ ;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\text{II}^a,13) \qquad \sum_{1=s}^{2} \frac{\partial \varphi_{rsl}}{\partial x_s} - \varphi'_{r3t} + \sum_{1=p,q}^{3} e_{rpq}\, \xi_{qpt} = \nu_{rt}$$

$$(r = 1, 2, 3\ ;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$$

ove si deve intendere:

$$\text{II}^{\text{a}},14 \quad \begin{cases} \xi'_{r3t} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} X_{r3} \frac{dQ_t}{dx_3}\, dx_3 \\ \varphi'_{r3t} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} N_{r3} \frac{dQ_t}{dx_3}\, dx_3 \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3\,;\ t = 0, 1, \dots)$$

Conviene modificare le (II$^{\text{a}}$, 12, 13) nel seguente modo.

Ricordando le (II$^{\text{a}}$,5) si può scrivere:

$$\text{II}^{\text{a}},15) \qquad Q_t = \textstyle\sum_p^* a_{pt}\, x_3^p\,; \qquad \dfrac{dQ_t}{dx_3} = \textstyle\sum_p^* p\, a_{pt}\, x_3^{p-1}$$

ove il segno $\sum^*$ sta ad indicare che le sommatorie sono estese ai valori $0, 2, 4, \dots\ t$ o $1, 3, 5\ \dots\ t$ di p a seconda che t sia pari o dispari. Conviene porre inoltre:

$$\text{II}^{\text{a}},16) \quad \begin{cases} \eta_{rsp} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} X_{rs}\, x_3^p\, dx_3 \\ \vartheta_{rsp} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} N_{rs}\, x_3^p\, dx_3 \end{cases} \qquad (r, s = 1, 2, 3\,;\ p = 0, 1, 2 \dots)$$

Tenendo conto di (II$^{\text{o}}$, 15, 16, 14) con semplici calcoli si vede che le (II$^{\text{o}}$, 12) possono essere scritte:

$$\text{II}^{\text{a}},17) \qquad \textstyle\sum_p^* a_{pt} \left[\displaystyle\sum_{1=s}^{2} \frac{\partial \eta_{rsp}}{\partial x_s} - p\eta_{r,3,p-1} \right] = \beta_{rt}$$

$$(r = 1, 2, 3\,; \quad t = 0, 1, \dots)$$

e le (II$^{\text{a}}$,13):

$$\text{II}^{\text{a}},18) \qquad \textstyle\sum_p^* a_{pt} \left[\displaystyle\sum_{1=s}^{2} \frac{\partial \vartheta_{rsp}}{\partial x_s} - p\vartheta_{r,3,p-1} + \sum_{1=lm}^{3} e_{rlm}\, \eta_{mlp} \right] =$$

$$= \nu_{rt} \quad (r = 1, 2, 3\,; \quad t = 0, 1, \dots)$$

Alle II^a, 17, 18) vanno associate le condizioni al contorno:

$$\text{II}^a,19)\quad \sum_p^* a_{pt} \sum_{1=s}^{2} \eta_{rsp}\, n_s = \begin{cases} \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} f_r Q_t dx_3 & \text{su } l-l' \\ \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \Phi_r Q_t dx_3 & \text{su } l' \end{cases} \qquad (r=1,2,3\,;\; t=0,1,\ldots)$$

$$\text{II}^a,20)\quad \sum_p^* a_{pt} \sum_{1=s}^{2} \vartheta_{rsp}\, n_s = \begin{cases} \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} m_r Q_t dx_3 & \text{su } l-l' \\ \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \mu_r Q_t dx_3 & \text{su } l' \end{cases} \qquad (r=1,2,3\,;\; t=0,1,\ldots)$$

Pongo infine:

$$\text{II}^a,21)\qquad \gamma^{(r)}_{\eta,\tau,t} = -\frac{1}{A}\left\{\int_{l'} x_1^\eta x_2^\tau \left[\int_{-h/2}^{h/2} \Phi_r Q_t\, dx_3\right] dl + \right.$$

$$\left. + \int_{l-l'} x_1^\eta x_2^\tau \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r Q_t\, dx_3\right] dl + \int_A \beta_{rt}\, x_1^\eta x_2^\tau\, dA\right\}$$

e:

$$\text{II}^a,22)\qquad \Gamma^{(r)}_{\eta,\tau,t} = -\frac{1}{A}\left\{\int_{l'} x_1^\eta x_2^\tau \left[\int_{-h/2}^{h/2} \mu_r\, Q_t\, dx_3\right] dl + \right.$$

$$\left. + \int_{l-l'} x_1^\eta x_2^\tau \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_r Q_t\, dx_3\right] dl + \int_A \nu_{rt}\, x_1\, x_2\, dA\right\}$$

Con semplici calcoli (4) da (II^a, 17, 18, 19, 20) e da (II^a, 21, 22) si ha:

(4) Il procedimento è analogo a quello usato da G. Grioli, in *Relazioni quantitative per lo stato tensionale di un qualunque sistema ...*, Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV, Tomo XXXIII, 1952.

$$\text{II}^a,23) \qquad \textstyle\sum_p^* a_{pt}\, \overline{\eta x_1^{\eta-1} x_2^{\tau} \eta_{r1p}} + \sum_p^* a_{pt}\, \overline{\tau x_1^{\eta} x_2^{\tau-1} \eta_{r2p}} + \\ + \sum_p^* a_{pt}\, \overline{p\, x_1^{\eta} x_2^{\tau} \eta_{r,3,p-1}} = \gamma_{\eta\tau t}^{(r)}$$

$$\text{II}^a,24) \qquad \textstyle\sum_p^* a_{pt}\, \overline{\eta x_1^{\eta-1} x_2^{\tau} \vartheta_{r1p}} + \sum_p^* a_{pt}\, \overline{\tau x_1^{\eta} x_2^{\tau-1} \vartheta_{r2p}} + \\ + \sum_p^* a_{pt}\, \overline{p x_1^{\eta} x_2^{\tau} \vartheta_{r,3,p-1}} - \sum_p^* a_{pt}\, \overline{x_1^{\eta} x_2^{\tau} \sum_{lm} e_{rlm}\, \eta_{mlp}} = \Gamma_{\eta\tau t}^{(r)}$$

ove, al solito, il soprassegno indica il valor medio in A.

§ 5. - Integrazione del problema della piastra di spessore qualunque.

Per (IIª,21, 22) le equazioni cardinali della Statica si possono scrivere:

$$\text{II}^a,25) \qquad \begin{cases} \gamma_{0,0,0}^{(r)} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3) \\ \gamma_{1,0,0}^{(2)} - \gamma_{0,1,0}^{(1)} + \Gamma_{0,0,0}^{(3)} = 0 \\ \gamma_{1,0,0}^{(3)} - \gamma_{0,0,1}^{(1)} + \Gamma_{0,0,0}^{(2)} = 0 \\ \gamma_{0,0,1}^{(2)} - \gamma_{0,1,0}^{(3)} + \Gamma_{0,0,0}^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Chiamo $\varrho_{\eta\tau t}^{(r)}$ e $P_{\eta,\tau,t}^{(r)}$ gli addendi incogniti contenuti nelle espressioni delle $\gamma_{\eta\tau t}^{(r)}$ e $\Gamma_{\eta\tau t}^{(r)}$ rispettivamente. Ad ogni scelte dei valori medi:

$$\overline{\eta_{rsp}\, x_1^{\eta'} x_2^{\tau'}},\quad \overline{\eta_{rsp}\, x_1^{\eta} x_2^{\tau}},\quad \overline{\vartheta_{rsp}\, x_1^{\eta'} x_2^{\tau'}},\quad \overline{\vartheta_{rsp}\, x_1^{\eta} x_2^{\tau}}$$

soddisfacenti (IIª, 23, 24) e dei $\varrho_{\eta\tau t}^{(r)}$ e $P_{\mu\tau t}^{(r)}$ soddisfacenti le (IIª, 25) corrisponde una scelta di valori medi $\overline{\xi_{rst}\, P_\lambda}$, $\overline{\varphi_{rst}\, P_\lambda}$ $(rs = 1, 2, 3)$. Per ogni t denoto con I_{mt} l'insieme di tutte le diciottuple di valori medi $\overline{\xi_{rst}\, P_\lambda}$, $\overline{\varphi_{rst}\, P_\lambda}$ $(r, s = 1, 2, 3)$ così costruite per $\lambda = 0, 1, 2 \ldots m$. Per quanto dimostrato nella parte Iª posso dire che ogni soluzione di quadrato sommabile delle equazioni (IIª, 17, 18) colle condizioni al contorno (IIª, 19, 20) è sviluppabile in serie del tipo (IIº, 19) a patto che le costanti $\overline{\xi_{rst}\, P_\lambda}$, $\overline{\varphi_{rst}\, P_\lambda}$, che ivi compaiono, appartengano al medesimo I_{mt}. Una volta ricavate dalle (IIª, 9) le ξ_{rst}, φ_{rsi} le (IIª, 6) ci danno tutte le soluzioni di quadrato sommabile delle equazioni (IIª, 1, 2, 3, 4).

Ricordando ancora i risultati della Parte I^a, dico che la soluzione effettiva è quella che soddisfa al teorema variazionale del tipo di quello di Menabrea. Ciò comporta, in sostanza, la scelta di quelle diciottuple $\overline{\xi_{rst}\ P_\lambda}$, $\overline{\varphi_{rst}\ P_\lambda}$ che, appartenendo per ogni t all'insieme I_{mt}, minimizzano la corrispondente energia potenziale elastica.

Osservo che, nelle applicazioni concrete, gli sviluppi (II^a, 6, 9, 10) vanno arrestati ad un certo termine; ad esempio $t \leq p$, $\lambda \leq q$.

Le approssimazioni, minimizzanti la corrispondente energia $W^{(m)}$, così ottenute per le X_{rs} e N_{rs} convergono in media verso la soluzione richiesta al divergere di p e q.

Nel caso della piastra, la piccolezza dello spessore di fronte alle altre dimensioni, permette in genere di limitare a pochi termini gli sviluppi suddetti. In una « teoria ordinaria » per i continui di Cosserat si considerano solo i termini per $t = 0, 1, 2$.

§ 6 - Caso della piastra sottile.

Premetto che nella teoria ordinaria, in analogia col caso classico di stress asimmetrico, supponendo la striscia di appoggio A^* molto sottile, si sostituisce il vincolo di appoggio con un vincolo fittizio agente sul contorno σ. In sostanza immagino di conglobare (sull'opportuna porzione σ'' di σ) nei vettori f e Φ e in m e μ rispettivamente il contributo dato da G_r e R_r $(r = 1, 2, 3)$. Si osservi che, allora, in (II^a, 12, 13) va posto $G_r = 0$ e $R_r = 0$ $(r = 1, 2, 3)$ nelle rispettive espressioni di β_{rt} e ν_{rt}. Inoltre, per gli scopi che mi prefiggo, suppongo, per semplicità, che sia: $r_3 = 0$ e quindi $N_{33} = 0$ per $x_3 = \pm \dfrac{h}{2}$; $g_r = 0$ $(r = 1, 2)$ e quindi $X_{13} = X_{23} = 0$ per $x_3 = \pm \dfrac{h}{2}$.

Tenendo conto delle osservazioni sperimentali e supposto piccolo h, si ritiene lecito, nella teoria ordinaria, arrestare lo sviluppo delle X_{rs} $(r, s = 1,2)$ ai termini lineari in x_3. Posto:

$$\chi_{rs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{rs}\ dx_3$$

$$\text{II}^a,26) \qquad \psi_{rs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{rs}\, x_3\, dx_3 \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

$$\Phi_{rs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{rs}\, x_3^2\, dx_3$$

da II^a, 6, 7, 8) si ottiene:

$$\text{II}^a, 27) \qquad X_{rs} = \frac{1}{h}\left(\chi_{rs} + \frac{12}{h^2}\,\psi_{rs} x_3\right) \qquad (r, s = 1, 2)$$

con le χ_{rs} e ψ_{rs} [in base a (II^a,12) per $t = 0, 1$] legate dal sistema:

$$\text{II}^a,28) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \chi_{rs}}{\partial x_s} = 0 \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \psi_{rs}}{\partial x_s} - \chi_{r3} = 0 \end{cases} \qquad (r = 1,2)$$

In base a (II^a,1)$_1$ si riconosce che le X_{3r} e le X_{r3} $(r = 1,2)$ sono polinomi di secondo grado in x_3 e la X_{33} di terzo.

Per la loro determinazione occorre tener conto delle (II^a, 12, 13) anche per $t = 2, 3, 4$. Si osservi che le ξ_{rst} sono da ritenersi nulle per $r, s = 1, 2$ e $t > 1$ data l'ortogonalità dei secondi membri delle (II^a, 27) a Q_t. Da (II^a, 12) per $t = 2, 3$ si ricava che le X_{r3} $(r = 1,2)$ sono date da:

$$\text{II}^a,29) \qquad X_{r3} = \frac{3}{2h}\left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2}\right)\chi_{r3} \qquad (r = 1, 2)$$

Le X_{3r} sono date da:

$$\text{II}^a,30) \qquad X_{3r} = \frac{1}{h}\left[\chi_{3r}\left(\frac{9}{4} - \frac{15x_3^2}{h^2}\right) + \frac{12x_3}{h^2}\,\psi_{3r} + \left(\frac{180x_3^2}{h^4} - \frac{15}{h^2}\right)\Phi_{3r}\right]$$

$$(r = 1, 2)$$

ove le χ_{3r}, ψ_{3r} e Φ_{3r} devono soddisfare le:

$$
\text{II}^a,31)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial\chi_{3s}}{\partial x_s}=g_3\\
&\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial\psi_{3s}}{\partial x_s}-\chi_{33}=-\frac{h}{4}\,g_3\\
&\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial\Phi_{3s}}{\partial x_s}+\frac{h^2}{6}\,\frac{\partial\chi_{3s}}{\partial x_s}\right)-\psi_{33}=\frac{h^2}{6}\,g_3
\end{aligned}\right.
$$

ottenute da (II^a,12) per $t = 0, 1, 2$.

La X_{33} in base a (II^a,12) per $t = 3,4$ risulta essere espressa da:

$$
\text{II}^a,32)\qquad X_{33}=\frac{1}{h}\left[\chi_{33}\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{h^2}\,x_3^2\right)+\left(\frac{30}{h^2}\,x_3-\frac{120}{h^4}\,x_3^3\right)\psi_{33}+\right.
$$
$$
\left.+\left(-\frac{10}{h^2}\,x_3^3+\frac{3x_3^2}{h}+\frac{3}{2}\,x_3-\frac{1}{4}\right)g_3\right]
$$

Inoltre, nella «teoria ordinaria» per i Continui di Cosserat, in base alla (II^a,1)$_2$ si ritiene lecito arrestare gli sviluppi delle N_{rs} $(r, s = 1, 2)$ e della N_{33} nelle (II^a,6)$_2$ ai termini di secondo grado in x_3. Gli sviluppi delle $N_{3r} (r = 1, 2)$ vanno arrestati ai termini lineari in x_3. Sempre in base a (II^a,1)$_2$ si riconosce che le $N_{r3} (r = = 1, 2)$ sono polinomi di terzo grado in x_3.

Posto:

$$
\text{II}^a,33)\qquad \mathfrak{L}_{rs}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N_{rs}\,dx_3 \qquad (r, s = 1, 2, 3)
$$

$$
\text{II}^a,34)\qquad \mathfrak{M}_{rs}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N_{rs}\,x_3\,dx_3 \qquad (r, s = 1, 2, 3)
$$

$$
\text{II}^a,35)\qquad \mathfrak{N}_{rs}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N_{rs}\,x_3^2\,dx_3 \qquad (r, s = 1, 2, 3)
$$

si ottengono per le N_{rs} $(r, s = 1, 2)$ le espressioni:

$$\mathrm{II^a,36)}\qquad N_{rs} = \frac{1}{h}\left[\mathfrak{L}_{rs}\left(\frac{9}{4} - \frac{15x_3^2}{h^2}\right) + \frac{12x_3}{h^2}\,\mathfrak{M}_{rs} + \right.$$
$$\left. + \frac{180x_3^2}{h^4} - \frac{15}{h^2}\,\mathfrak{N}_{rs}\right] \quad (r, s = 1, 2)\,;$$

e per le $N_{3r}(r = 1, 2)$ le:

$$\mathrm{II^a,37)}\qquad N_{3r} = \frac{1}{h}\left(\mathfrak{L}_{3r} + \frac{12}{h^2}\,\mathfrak{M}_{3r}\,x_3\right) \qquad (r = 1, 2)$$

ove le $\mathfrak{L}_{rs}$, $\mathfrak{M}_{rs}$ e $\mathfrak{N}_{rs}$ sono legate dal sistema:

$$\mathrm{II^o,38)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial\mathfrak{L}_{rs}}{\partial x_s} + \sum_{p,q=1}^{3} e_{rpq}\,\chi_{pq} = r_r && (r = 1, 2)\\
&\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial\mathfrak{L}_{3s}}{\partial x_s} + \chi_{21} - \chi_{12} = 0 &&\\
&\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial\mathfrak{M}_{rs}}{\partial x_s} - \mathfrak{L}_{r3} + \sum_{p,q=1}^{3} e_{rpq}\,\psi_{qp} = -\frac{h}{4}\,r_r && (r = 1, 2)\\
&\sum_{s=1}^{2}\left(12\,\frac{\partial\mathfrak{N}_{rs}}{\partial x_s} - h\,\frac{\partial\mathfrak{L}_{rs}}{\partial x_s}\right) - 24\,\mathfrak{M}_{r3} + \sum_{p,q=1}^{3} e_{rpq}\,(12\,\Phi_{qp} - &&\\
&\qquad - h^2\,\chi_{qp}) = 2\,h^2 r_r && (r = 1, 2)
\end{aligned}\right.$$

ottenuto da (II^a,13) per $t = 0, 1, 2$.

Le N_{r3} $(r = 1, 2)$, in base a (II^a,13) per $t = 3$, sono date da:

$$\mathrm{II^a,39)}\qquad N_{r3} = \frac{1}{h}\left[\mathfrak{L}_{r3}\left(\frac{3}{2} - \frac{6}{h^2}\,x_3^2\right) + \left(\frac{30}{h^2}\,x_3 - \frac{120x_3^3}{h^4}\right)\mathfrak{M}_{r2} + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{10}{h^2}\,x_3^3 + \frac{3}{h}\,x_3^2 + \frac{3}{2}\,x_3 - \frac{1}{4}\right) r_r\right] \qquad (r = 1, 2)$$

ove le $\mathfrak{L}_{r3}$ e $\mathfrak{M}_{r3}$ compaiono nelle condizioni (II^a,38).

Per la N_{33} bisogna tener conto di (IIª,13) per $t = 3,4$. Risulta:

IIª,40) $$N_{33} = \frac{1}{\mathrm{h}}\left(\frac{3}{2} - \frac{6}{h^2}x_3^2\right)\mathfrak{L}_{33}$$

ove $\mathfrak{L}_{33}$ in base a (IIª,13) per $t = 1$ deve soddisfare la

IIª,41) $$\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial \mathfrak{M}_{3s}}{\partial x_s} - \mathfrak{L}_{33} + \psi_{21} - \psi_{12} = 0 .$$

Alle condizioni (IIª, 28, 31, 38, 41) vanno associate le condizioni sul contorno l di A. Per ottenrle moltiplico ambo i membri di (IIª, 2, 3) per $Q_t\, dx_3$ e integro fra $-\frac{h}{2}$ e $\frac{h}{2}\cdot$ Fra le infinite relazioni che si hanno al variare del parametro t, considero quelle che si ottengono ponendo $t = 0, 1, 2$. Si ha:

IIª,42) $$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2}\chi_{rs}\, n_s = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r\, dx_3 & \text{su } l - l' \\[2ex] \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r\, dx_3 & \text{su } l' \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3) \\[3ex]
&\sum_{s=1}^{2}\mathfrak{L}_{rs}\, n_s = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_r\, dx_3 & \text{su } l - l' \\[2ex] \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_r\, dx_3 & \text{su } l' \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)
\end{aligned}\right.$$

$$
\text{II}^{\circ},43)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&2\sum_{s=1}^{2}\psi_{rs}\,n_s=
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r\,x_3\,dx_3 \quad \text{su } l-l' \\[2ex]
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r\,x_3\,dx_3 \quad \text{su } l'
\end{cases}
\qquad (r=1,2,3)\\[4ex]
&2\sum_{s=1}^{2}\mathfrak{M}_{rs}\,n_s=
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_r\,x_3\,dx_3 \quad \text{su } l-l' \\[2ex]
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_r\,x_3\,dx_3 \quad \text{su } l'
\end{cases}
\qquad (r=1,2)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{II}^{a},44)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2}(12\Phi_{3s}-h^2\quad\chi_{3s})n_s=
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r(12x_3^2-h^2)\,dx_3 \quad \text{su } l-l' \\[2ex]
\displaystyle\int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r(12x_3^2-h^2)\,dx_3 \quad \text{su } l'
\end{cases}\\[4ex]
&\sum_{s=1}^{2}(12\,\mathfrak{N}_{rs}-h^2\,\mathfrak{L}_{rs})n_s=
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_r(12x_3^2-h^2)\,dx_3 \quad \text{su } l-l' \\[2ex]
\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_r(12x_3^2-h^2)\,dx_3 \quad \text{su } l'
\end{cases}
\qquad (r=1,2)
\end{aligned}
\right.
$$

Si verifica facilmente che le X_{rs} date da (II^a, 27, 29, 30, 32) e le N_{rs} date da (II^a, 36, 37, 39, 40) in base a (II^a, 28, 31, 38, 41, 43, 43, 44) soddisfano le (II^a,1) e tutte le condizioni al contorno). Per determinare gli insiemi $I_{m_0}, I_{m_1}, I_{m_2}$ ricordo che essi sono formati coi valori medi: $\overline{\chi_{rs}P_\lambda}, \overline{\psi_{rs}P_\lambda}, \overline{\Phi_{rs}P_\lambda}, \overline{\mathfrak{L}_{rs}P_\lambda}, \overline{\mathfrak{M}_{rs}P_\lambda}, \overline{\mathfrak{N}_{rs}P_\lambda}$ cioè mediante combinazioni lineari dei valori medi $\overline{\chi_{rs}x_1^{\eta'} x_2^{\tau'}}$ ... ecc., legati dalle relazioni che si deducono dalle (II^a, 23, 24). Si osservi che è:

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_{rs_0} = \chi_{rs}\ , \ \eta_{rs_1} = \psi_{rs}\ , \ \eta_{rs_2} = \Phi_{rs} \\ \vartheta_{rs_0} = \mathfrak{L}_{rs}\ , \ \vartheta_{rs_1} = \mathfrak{M}_{rs}\ , \ \vartheta_{rs_2} = \mathfrak{N}_{rs} \end{array}\right. \qquad (rs = 1, 2, 3)$$

Ricordo che ai secondi membri delle (II^a, 23, 24) va pensato conglobato il termine dovuto all'eventuale vincolo fittizio che sostituisce l'appoggio.

Arrestando gli sviluppi (II^a,9) al termine di ordine $m+1$ si ha per $t = 0, 1, 2$:

$$\text{II}^a,45) \qquad \left\{\begin{array}{l} \chi_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\chi_{rs}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\eta_{rs0}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda \\ \mathfrak{L}_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\mathfrak{L}_{rs}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\vartheta_{rs0}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda \end{array}\right. \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

$$\text{II}^a,46) \qquad \left\{\begin{array}{l} \psi_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\psi_{rs}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\eta_{rs_1}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda \\ \mathfrak{M}_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\mathfrak{M}_{rs}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\vartheta_{rs_1}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda \end{array}\right. \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

$$\text{II}^a,47) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\Phi_{rs}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\eta_{rs_2}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda \\ \mathfrak{N}_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\mathfrak{N}_{rs}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{m} \dfrac{\overline{\vartheta_{rs_2}P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda \end{array}\right. \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

Dalla (II^a,10) facendo $t = 0, 1, 2$ e tenendo conto delle espressioni (II^a,27, 29, 30, 32, 36, 37, 39, 40) delle X_{rs} e N_{rs} e degli svilippi (II^a, 45, 46, 47) si ricava l'espressione dell'energia potenziale elastica corrispondente $W_{(m)}$.

Se negli sviluppi (II^a, 45, 46, 47) si scelgono i coefficienti appartenenti agli stessi I_{m_0}, I_{m_1}, I_{m_2}, gli sviluppi stessi verificano le condizioni (II^a, 28, 31, 38, 41, 42, 43, 44). Scegliendo fra essi quelli che rendono minima l'energia potenziale elastica si ottiene la soluzione del problema dell'equilibrio della piastra nell'ordine di approssimazione della teoria ordinaria.

§ 7. - Caso della piastra omogenea nell'ipotesi di isotropia elastica.

G. Grioli, riferendosi al caso della piastra omogenea ed elasticamente isotropa, ha fatto vedere che le note espressioni, che la teoria ordinaria del problema della flessione fornisce per i momenti flettenti, sforzi di taglio, ecc., sono conseguenza necessaria delle proprietà di media e dell'ordine di approssimazione concomitante all'assunzione delle espressioni approssimate per le caratteristiche di tensione ([5]).

Nella teoria lineare dell'elasticità per un continuo di Cosserat vanno associate ([6]) alle equazioni dell'equilibrio le seguenti equazioni costitutive:

$$\text{II}^a,48) \qquad \begin{cases} X_{rs} = \lambda\, \varepsilon_{tt}\, \delta_{rs} + 2(\mu + \varkappa)\, \varepsilon_{rs} - \varkappa\, e_{rs} \\ N_{rs} = \alpha\, \varphi_{t,t}\, \delta_{rs} + \beta\, \varphi_{r,s} + \gamma \varphi_{s,r} \end{cases}$$

ove i coefficienti λ, μ, $\varkappa$, α, β e γ sono le costanti elastiche opportune. Inoltre φ_s è il vettore della microrotazione e si ha:

([5]) G. Grioli, *Integrazione del problema della statica delle piastre omogenee di spessore qualunque*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, vol. VI Fasc. 1-11 (1952).

([6]) Vedi ad es. A. C. Eringen, *Linear Theory of Micropolar Elasticity*, ONR Report, Purdue University Technical Report 29 (1965), scheduled for publication in Journal of Mathematics and Mechanics.

A. C. Eringen, *Theory of Micropolar Plates*, Journal of applied Mathematics and Physics, Vol. 18, Fasc. 1 (1967) pp. 12-30.

$$\text{II}^a,49)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{rs} = \dfrac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}) \\ e_{rs} = u_{r,s} + \varepsilon_{rst}\,\varphi_t \end{cases}$$

ove ε_{rst} è il tensore di Ricci.

Posto allora:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+2\mu+\varkappa & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu+\varkappa & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu+\varkappa \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta+\gamma & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix}$$

da (II^a,48) e (II^a,49) si ottiene:

$$\text{II}^a,50)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \chi_{31}}{\partial x_1} - \frac{\mu+\varkappa}{\mu\,D}\left\{[(\lambda+2\mu+\varkappa)^2-\lambda^2]\frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_3} - \right.$$
$$\left. - \lambda(2\mu+\varkappa)\left(\frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_3} + \frac{\partial \chi_{33}}{\partial x_3}\right)\right\} + \frac{\varkappa\beta}{\mu(\beta^2-\gamma^2)}\left(N_{21} - \frac{\gamma}{\beta}N_{12}\right).$$

$$\text{II}^a,51)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \chi_{32}}{\partial x_2} - \frac{\mu+\varkappa}{\mu D}\left\{[(\lambda+2\mu+\varkappa)^2-\lambda^2]\frac{\partial \chi_{22}}{\partial x_3} - \right.$$
$$\left. - \lambda(2\mu+\varkappa)\left(\frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial \chi_{33}}{\partial x_3}\right)\right\} - \frac{\varkappa\beta}{\mu(\beta^2-\gamma^2)}\left(N_{12} - \frac{\gamma}{\beta}N_{21}\right).$$

$$\text{II}^a,52)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \chi_{31}}{\partial x_2} - \frac{\mu+\varkappa}{\varkappa^2+2\mu\varkappa}\left[\frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\mu+\varkappa}{\mu}\frac{\partial \chi_{21}}{\partial x_3}\right] -$$
$$- \frac{\varkappa^2+2\mu\varkappa}{\mu\Delta}\left\{[(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha^2]N_{33} - \alpha(\beta+\gamma)(N_{11}+N_{22})\right\} +$$
$$+ \frac{\varkappa}{\mu D}\left\{[(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha^2]N_{22} - \alpha(\beta+\gamma)(N_{11}+N_{33})\right\}.$$

In base a (IIª, 27, 29, 30, 32, 36) le (IIª, 50, 51, 52) diventano:

$$\text{II}^a{,}53)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}=\frac{1}{\mu h}\left[\left(\frac{9}{4}-\frac{15x_3^2}{h^2}\right)\frac{\partial\chi_{31}}{\partial x_1}+\frac{12x_3}{h^2}\frac{\partial\psi_{31}}{\partial x_1}+\right.$$

$$+\left(\frac{180x_3^2}{h^2}-\frac{15}{h^2}\right)\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial x_1}\Bigg]-\frac{\mu+\varkappa}{\mu D}\frac{1}{h}\Bigg\{\left[(\lambda+2\mu+\varkappa)^2-\lambda^2\right]\frac{12}{h^2}\psi_{11}-$$

$$-\lambda(2\mu+\varkappa)\left[\frac{12}{h^2}(\psi_{22}-x_3\chi_{33})+\left(\frac{30}{h^2}-\frac{360x_3^2}{h^4}\right)\psi_{33}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{30x_3^2}{h^2}+\frac{6x_3}{h}+\frac{3}{2}\right)g\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{\varkappa\beta}{\mu(\beta^2-\gamma^2)}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{9}{4}-\frac{15x_3^2}{h^2}\right)\left(\mathfrak{L}_{21}-\frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{L}_{12}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{12x_3}{h^2}\left(\mathfrak{M}_{21}-\frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{N}_{12}\right)+\left(\frac{180x_3^2}{h^4}-\frac{15}{h^2}\right)\left(\mathfrak{N}_{21}-\frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{N}_{12}\right)\right].$$

$$\text{II}^a{,}54)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}=\frac{1}{\mu h}\left\{\left(\frac{9}{4}-\frac{15x_3^2}{h^2}\right)\frac{\partial\chi_{32}}{\partial x_2}+\frac{12x_3^2}{h^2}\frac{\partial\psi_{32}}{\partial x_2}+\right.$$

$$+\left(\frac{180x_3^2}{h^2}-\frac{15}{h^2}\right)\frac{\partial\Phi_{32}}{\partial x_2}\Bigg]-\frac{\mu+\varkappa}{\mu D}\frac{1}{h}\Bigg\{\left[(\lambda+2\mu+\varkappa)^2-\lambda^2\right]\frac{12}{h^2}\psi_{22}-$$

$$-\lambda(2\mu+\varkappa)\left[\frac{12}{h^2}(\psi_{11}-x_3\chi_{33})+\left(\frac{30}{h^2}-\frac{360x_3^2}{h^4}\right)\psi_{33}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{30}{h^2}x_3^2+\frac{6}{h}x_3+\frac{3}{2}\right)g\right]\Bigg\}-$$

$$-\frac{\varkappa\beta}{\mu(\beta^2-\gamma^2)}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{9}{4}-\frac{15x_3^2}{h^2}\right)\left(\mathfrak{L}_{12}-\frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{L}_{21}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{12x_3}{h^2}\left(\mathfrak{M}_{12}-\frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{M}_{21}\right)+\left(\frac{180x_3^2}{h^4}-\frac{15}{h^2}\right)\left(\mathfrak{N}_{12}-\frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{N}_{21}\right)\right].$$

$$\text{II}^{a},55)\qquad \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{\mu h}\left[\left(\frac{9}{h} - \frac{15x_3^2}{h^2}\right)\frac{\partial \chi_{31}}{\partial x_2} + \frac{12x_3}{h^2}\frac{\partial \psi_{31}}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left.\left(\frac{180x_3^2}{h^4} - \frac{15}{h^2}\right)\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2}\right] + \frac{\mu+\varkappa}{\varkappa^2+2\mu\varkappa}\,\frac{1}{h}\left\{\frac{12}{h^2}\left(\psi_{12} - \frac{\mu+\varkappa}{\mu}\,\varphi_{21}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\varkappa^2+2\mu\varkappa}{\mu\varDelta}\left[([\alpha+\beta+\gamma]^2-\alpha^2)\left(\frac{3}{2} - \frac{6x_3^2}{h^2}\right)\mathfrak{L}_{33} - \alpha(\beta+\gamma)\left\{\left(\frac{9}{4} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{15x_3^2}{h^2}\right)(\mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{22}) + \frac{12x_3}{h^2}(\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M}_{22}) +$$

$$\left.\left.\left. + \left(\frac{180x_3^2}{h^4} - \frac{15}{h^2}\right)(\mathfrak{N}_{11} + \mathfrak{N}_{22})\right\}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varkappa}{\mu\varDelta}\,\frac{1}{h}\left\{[(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha^2]\left[\left(\frac{9}{4} - \frac{15x_3^2}{h^2}\right)\mathfrak{L}_{22} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{12x_3}{h^2}\,\mathfrak{M}_{22} + \left(\frac{180x_3^2}{h^4} - \frac{15}{h^2}\right)\mathfrak{N}_{22}\right] - \alpha(\beta+\gamma)\left[\left(\frac{9}{h} - \frac{15x_3^2}{h^2}\right)\mathfrak{L}_{11} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{12x_3}{h^2}\,\mathfrak{M}_{11} + \left(\frac{180x_3^2}{h^4} - \frac{15}{h^2}\right)\mathfrak{N}_{11} + \left(\frac{3}{2} - \frac{6x_3^2}{h^2}\right)\mathfrak{L}_{33}\right]\right\}.$$

Nell'ordine di approssimazione della teoria ordinaria è lecito sostituire alle (II^{a}, 53, 54, 55) le espressioni più semplici:

$$\text{II}^{a},56)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\mu h^3}\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_1} - \frac{\mu+\varkappa}{D}\left[\,([\lambda+2\mu+\varkappa]^2 - \right.$$

$$\left. - \lambda^2)12\psi_{11} - 12\lambda(2\mu+\varkappa)\psi_{22} + \left(30 - \frac{360x_3^2}{h^2}\right)\psi_{33}\right] +$$

$$\left. + \frac{\varkappa\beta}{\beta^2-\gamma^2}\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\left(\mathfrak{N}_{21} - \frac{\gamma}{\beta}\,\mathfrak{N}_{12}\right)\right\}.$$

$$\text{II}^a{,}57)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\mu h^3}\left\{\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial x_2} - \right.$$

$$- \frac{\mu+\varkappa}{D}\left[\left([\lambda+2\mu+\varkappa]^2 - \lambda^2\right)12\psi_{22} - \lambda(2\mu+\varkappa)12\,\psi_{11} + \right.$$

$$\left.\left. + \left(30 - \frac{360x_3^2}{h^2}\right)\psi_{33}\right] - \frac{\varkappa\beta}{\beta^2-\gamma^2}\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\left(\mathfrak{N}_{12} - \frac{\gamma}{\beta}\,\mathfrak{N}_{22}\right)\right\}.$$

$$\text{II}^a{,}58)\qquad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{\mu h_3}\left\{\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} + \right.$$

$$+ \frac{\mu^2+\mu\varkappa}{\varkappa^2+2\mu\varkappa}\,12\left(\psi_{12} - \frac{\mu+\varkappa}{\mu}\,\psi_{21}\right) + \frac{\mu+\varkappa}{\Delta}\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\left(\mathfrak{N}_{11} + \mathfrak{N}_{22}\right) +$$

$$\left. + \frac{\varkappa}{\Delta}\left(\frac{180x_3^2}{h^2} - 15\right)\left[-\alpha(\beta+\gamma)\,\mathfrak{N}_{11} + [(\alpha+\beta+\gamma)^2 - \alpha^2]\,\mathfrak{N}_{22}\right]\right\}.$$

Le condizioni di integrabilità delle (II^a, 56, 57, 58) sono certamente verificate dagli sviluppi (II^a, 45, 46, 47) minimizzanti in I_{m_0}, I_{m_1}, I_{m_2} l'energia potenziale elastica corrispondente.

Ricordando che nel caso classico di « stress » simmetrico si ha:

$$\text{II}^a{,}59)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \dfrac{12}{Eh^3}\left(\psi_{11} - \nu\psi_{22}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \dfrac{12}{Eh^3}\left(\psi_{22} - \nu\psi_{11}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{12\,(1+\nu)}{Eh^3}\,\psi_{12} \end{cases}$$

dove E e ν denotano il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson, si può porre in analogia:

$$\text{II}^a{,}60)\qquad \begin{cases} E' = -\dfrac{\mu(2\lambda+2\mu+\varkappa)\,(\lambda+2\mu+\varkappa)+2\lambda\mu}{(\mu+\varkappa)\,(2\lambda+2\mu+\varkappa)} \\[2ex] \nu' = \dfrac{\lambda}{2\lambda+2\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

Le (IIª, 56, 57, 58) si scrivono allora:

$$\text{II}^a,61)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \frac{12}{E'h^3}(\psi_{11} - \nu'\psi_{22}) + \frac{1}{\mu h^3} R_1 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} &= \frac{12}{E'h^3}(\psi_{22} - \nu'\psi_{11}) + \frac{1}{\mu h^3} R_2 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{12}{h^3}\left(\frac{\mu+\varkappa}{\varkappa^2+2\mu\varkappa}\psi_{12} - \frac{\mu+\varkappa}{\mu}\psi_{21}\right) + \frac{1}{\mu h^3} R_3 \end{aligned}\right.$$

ove è:

$$R_1 = \left(\frac{180 x_3^2}{h^2} - 15\right)\left[\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_1} + \frac{\varkappa\beta}{\beta^2-\gamma^2}\left(\mathfrak{N}_{21} - \frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{N}_{12}\right)\right] - $$

$$- \frac{\mu+\varkappa}{D}\left(30 - \frac{360 x_3^2}{h^2}\right)\psi_{33}$$

$$R_2 = \left(\frac{180 x_3^2}{h^2} - 15\right)\left[\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial x_2} - \frac{\varkappa\beta}{\beta^2-\gamma^2}\left(\mathfrak{N}_{12} - \frac{\gamma}{\beta}\mathfrak{N}_{21}\right)\right] - $$

$$- \frac{\mu+\varkappa}{D}\left(30 - \frac{360 x_3^2}{h^2}\right)\psi_{33}$$

$$R_3 = \left(\frac{180 x_3^2}{h^2} - 15\right)\left\{\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} + \frac{\varkappa}{\Delta}\left[-\alpha(\beta+\gamma)\mathfrak{N}_{11} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left([\alpha+\beta+\gamma]^2 - \alpha^2\right)\mathfrak{N}_{22}\right] + \frac{\mu+\varkappa}{\Delta}(\mathfrak{N}_{11} + \mathfrak{N}_{22})\right\}.$$

Manoscritto pervenuto in redazione il 1 dicembre 1976.