

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIA SANSONE

**Deduzione della teoria dei fluidi maxwelliani dalla  
termodinamica dei sistemi continui**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 57 (1977), p. 39-52

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1977\\_\\_57\\_\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__39_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Deduzione della teoria dei fluidi maxwelliani dalla termodinamica dei sistemi continui

EMILIA SANSONE (\*)

### Introduzione.

In uno studio sui gas rarefatti ([1]) J. C. Maxwell, applicando i metodi della meccanica statistica ad un modello molecolare più accurato di quello adottato per i gas perfetti, pervenne ad un'equazione costitutiva per il tensore degli sforzi  $\underline{T}$  in cui figuravano, linearmente, il gradiente di velocità e le derivate seconde spaziali del campo di temperatura  $\theta$ . Fu appunto la dipendenza dalle derivate di  $\theta$  a consentire a J. C. Maxwell l'interpretazione teorica di alcuni effetti sperimentali rilevati da W. Crookes, Kundt e Warburg per i gas rarefatti (cfr.[2]) e da H. L. M. Helmholtz e Piotrowski per i liquidi (cfr. [3]). Un'ulteriore conferma di tali risultati fu data poi da O. Reynolds (cfr.[4]).

C. Truesdell, in [5] (cfr. anche [6], [7], [8], [9]) ha ripreso lo studio dei suddetti effetti nell'ambito della teoria dei continui, nell'intento di eliminare le ipotesi restrittive proprie della teoria cinetica. Tale Autore, infatti, considera una classe di fluidi, detti maxwelliani, per i quali le equazioni costitutive del tensore degli sforzi  $\underline{T}$  e del vettore corrente di calore  $\underline{h}$  dipendono analiticamente dai seguenti argomenti :

$(\text{grad})^p \varrho$ ,  $(\text{grad})^a \theta$ ,  $(\text{grad})^{s(r+1)} \underline{x}$ ,  $(p, q, r, s, n = 0, 1, 2, \dots m)$  dove  $\varrho$  è la densità del fluido,  $\theta$  il campo di temperatura,  $\underline{x}$  il vettore di posizione della generica particella e gli indici  $(n)$  ed  $(r + 1)$  indi-

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone 8.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

cano derivazioni temporali. Soddisfatto così il principio di equipresenza, viene imposto anche quello di oggettività; inoltre, introdotti i coefficienti di confronto  $\mu_0$  e  $\chi_0$  di viscosità e conduzione rispettivamente, si sviluppano in serie di potenza di  $\mu_0$  le equazioni costitutive per  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$ , adimensionalizzate. Tali serie, arrestate ai termini del 2° ordine in  $\mu_0$  consentono di ritrovare, oltre ai risultati di J. C. Maxwell, ulteriori previsioni teoriche tra cui l'effetto Brillouin (dipendenza di  $\underline{h}$  dal grad  $\varrho$  al 1° ordine).

C. Truesdell, però (cfr. ad es. [9]), non ricerca le restrizioni su  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  derivanti dall'imporre il principio di dissipazione ridotta. La termodinamica dei fluidi maxwelliani è invece l'oggetto di un recente lavoro di M. Carrassi ed A. Morro [11], anche se la classe dei materiali da Essi considerata è più ristretta di quella analizzata da Truesdell, poichè viene esclusa la dipendenza di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  da  $(\text{grad})^q \theta^{(n+1)}$ ,  $(\text{grad})^s \underline{x}^{(r+2)}$ . Tali Autori, dedotte le restrizioni termodinamiche imposte dalla diseuguaglianza di Clausius-Duhem e dal principio di oggettività alle equazioni costitutive di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$ , ne eseguono uno sviluppo in serie di potenze di  $\mu_0$  e confrontano i risultati così ottenuti con quelli determinati da C. Truesdell (cfr. ad es. [8] o [9]). Dal confronto appare che il principio di dissipazione rende impossibile la presenza, nello sviluppo di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$ , di alcuni termini. Così, ad esempio, in  $\underline{T}$  non figura grad grad  $\theta$  (al 2° ordine in  $\mu_0$ ) mentre  $\underline{h}$  è indipendente da grad  $\varrho$  (al 1° ordine in  $\mu_0$ ). In [11] si conclude che la teoria dei continui è incompatibile con la fenomenologia dei fluidi maxwelliani che possono, pertanto, studiarsi soltanto con metodi statistici.

Nel presente lavoro si mostra che tale incompatibilità non sussiste. Infatti, per riottenere i risultati di C. Truesdell è sufficiente sostituire la diseuguaglianza di Clausius-Duhem con quella più generale proposta in [12] da I. Müller <sup>(1)</sup>, nella quale il flusso di entropia non è  $\underline{h}/\theta$  (come nella diseuguaglianza di Clausius-Duhem) bensì risulta dato da  $\frac{\underline{h}}{\theta} + \underline{s}$ , dove  $\underline{s}$  è un extraflusso di cui occorre assegnare l'equazione costitutiva <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Tale diseuguaglianza è stata applicata dallo stesso I. Müller nello studio delle miscele in [13] e da A. Romano per la termodinamica dei dielettrici ([15]) e delle sostanze ferromagnetiche ([16]).

<sup>(2)</sup> Si noti che già nella teoria cinetica l'espressione del flusso di entropia differisce da  $\underline{h}/\theta$  (cfr. [12]).

Al n. 1 si considera un materiale differenziale del 2° ordine completo, cioè con equazioni costitutive dipendenti dal gradiente di deformazione  $\underline{F}$ , dal campo di temperatura  $\theta$  e da tutte le loro derivate prime e seconde, temporali e spaziali e si deducono le restrizioni imposte a dette equazioni dalla nuova disequaglianza di dissipazione ridotta (ottenuta utilizzando il 2° principio della termodinamica di I. Müller), dal principio d'oggettività e dall'isotropia (n. 3). Sviluppando poi in serie di potenze di  $\mu_0$  le funzioni  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  (n. 4), si perviene alle seguenti conclusioni (n. 5):

1) La presenza di un extraflusso  $\underline{s} \neq \underline{o}$  garantisce la compatibilità con la termodinamica delle equazioni costitutive a cui perviene C. Truesdell; il 2° principio precisa soltanto la natura dei coefficienti figuranti in dette equazioni. Inoltre, detta compatibilità sussiste anche quando si assumano le equazioni costitutive di M. Carrassi ed A. Morro. Infine, sempre nel caso  $\underline{s} \neq \underline{o}$ , eliminando in  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  la dipendenza da  $\underline{\dot{F}}$ ,  $\underline{\dot{F}}^i$  e  $\text{grad } \underline{F}^i$ , ma mantenendo la dipendenza da  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\text{grad } \dot{\theta}$ , il tensore degli sforzi continua a dipendere da  $\text{grad grad } \theta$  ed il vettore corrente di calore da  $\text{grad } \rho$ , in accordo con la considerazione che, *nel caso di un gas rarefatto, tale dipendenza non può essere connessa alla presenza di viscosità.*

2) Se  $\underline{s} = \underline{o}$  le espressioni di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  differiscono dalle analoghe di Truesdell e, come è ovvio, nel caso in cui si elimini la dipendenza di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  da  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\text{grad } \dot{\theta}$ ,  $\underline{\dot{F}}^i$  si ritrova la teoria esposta in [11].

## 1. - Principi della termodinamica ed equazioni costitutive.

Siano  $C_*$  e  $C$  le configurazioni di riferimento ed attuale di un sistema continuo  $S$ . Durante tutto il moto di  $S$  si postula la validità delle equazioni del bilancio dell'impulso, del momento angolare e dell'energia che, in coordinate materiali, localmente, si scrivono <sup>(3)</sup>:

$$(1) \begin{cases} \rho_* \ddot{x} = \text{Div } \underline{T}_* + \rho_* \underline{b}, \\ \underline{T}_* \underline{F}^T = \underline{F} \underline{T}^T, \\ \rho_* \dot{\varepsilon} = \underline{T}_* : \underline{\dot{F}} - \text{Div } \underline{h}_* + \rho_* r \end{cases}, \quad (\underline{T}_* : \underline{\dot{F}} = T_{*i}^L F_L^i)$$

(\*) Con  $\underline{A}^T$  si denota la trasposta di una matrice  $\underline{A}$ .





e la restante parte della (5) si scrive :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \left( -e_* \frac{\partial \psi}{\partial F_L^i} + T_{*i}^L \right) \dot{F}_L^i + \left( -e_* \frac{\partial \psi}{\partial F_{L,M}^i} + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial \dot{F}_L^i} \right) \dot{F}_{L,M}^i \\ - e_* \frac{\partial \psi}{\partial \dot{F}_L^i} \dot{F}_L^i - e_* \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \left( -e_* \frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,M}} + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta}_{,M} \\ - e_* \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta} + \left( -\frac{h_*^M}{\theta} + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial \theta} \right) \theta_{,M} + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial F_L^i} F_{L,M}^i \\ + \theta \frac{\partial s_*^N}{\partial F_{L,M}^i} F_{L,MN}^i + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial G_L} \theta_{,ML} \geq 0 . \end{array} \right.$$

Le (6) comportano l'indipendenza di  $\psi$  da  $\ddot{F}^i$  e  $\dot{\theta}$ . Inoltre la piú generale espressione per l'extraflusso  $\underline{s}_*$  è (7) :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} s_*^L = (1 + V^L \dot{\theta}) (1 + W_{(AB)}^L \theta_{,AB}) (\Omega^L + \sum_1^3 \Omega_{i(HKM)}^L F_{H,KM}^i) \\ + \sum_{i < j}^3 \Omega_{ij(HKM)(NOP)}^L F_{H,KM}^i F_{N,OP}^j \\ + \sum_{\substack{i,j,h=1 \\ i < j < h}}^3 \Omega_{ijh(HKM)(NOP)(QRS)}^L F_{H,KM}^i F_{N,OP}^j F_{Q,RS}^h . \end{array} \right.$$

Nella (8) i tensori  $\underline{\Omega}$ ,  $\underline{W}$ ,  $\underline{V}$ , indipendenti da  $\dot{\theta}$ ,  $\nabla^2 \underline{F}$ ,  $\nabla^2 \theta$ , risultano simmetrici rispetto agli indici in  $\{$ parentesi ed inoltre verificano le identità :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{L(HKM)}^i + \Omega_{H(KLM)}^i + \Omega_{K(MLH)}^i + \Omega_{M(LHK)}^i = 0, (i = 1, 2, 3) \\ W_{(AB)}^L + W_{(BL)}^A + W_{(LA)}^B = 0 . \end{array} \right.$$

(7) La presenza nella (7) dei termini in Grad  $\underline{F}$  e Grad Grad  $\underline{F}$  è giustificata dall'effetto Brillouin che prevede, in un fluido, conduzione di calore dovuta ad un gradiente di densità anche in assenza di  $\underline{G}$ . Tale effetto è riconosciuto anche da C. Truesdell che, in [6], suggerisce alcuni esperimenti che dovrebbero confermarne l'esistenza. Una teoria dei continui che non preveda l'effetto Brillouin è ottenibile dalla teoria qui trattata se si suppone  $\underline{s}_*$  identicamente nullo all'equilibrio (dove ora Grad  $\underline{F}$  e Grad Grad  $\underline{F}$  possono essere non nulli) (cfr. [14]).

Si osservi che in conseguenza della (8), non vale la disegualianza di Fourier, analogamente a quanto accade nella teoria cinetica in cui tale disegualianza sussiste solo in 1<sup>a</sup> approssimazione.

La (7), che può scriversi in forma sintetica

$$(9) \quad \varphi(\underline{F}, \theta, \nabla \underline{F}, \nabla^2 \underline{F}, \underline{\dot{F}}, \nabla \underline{\dot{F}}, \dot{\theta}, \underline{G}, \nabla \underline{G}, \underline{\dot{G}}, \ddot{\theta}, \underline{\ddot{F}}) \geq 0,$$

implica che  $\varphi$ , nulla per  $\nabla \underline{F} = \nabla^2 \underline{F} = \underline{\dot{F}} = \nabla \underline{\dot{F}} = \dot{\theta} = \underline{G} = \nabla \underline{G} = \underline{\dot{G}} = \ddot{\theta} = \underline{\ddot{F}} = 0$ , ammette un minimo in tale punto; pertanto tutte le derivate parziali prime di  $\varphi$ , valutate in  $(\underline{F}, \theta, \underline{o})$  sono nulle, in particolare:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{F}}} \right)_{\underline{o}} = \left( -\varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}} + \underline{T}_* \right) (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0) = 0, \quad \forall \underline{F}, \theta \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{G}}} \right)_{\underline{o}} = \left( -\frac{\underline{h}_*}{\theta} + \theta \frac{\partial s_*}{\partial \theta} \right) (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0) = 0, \quad \forall \underline{F}, \theta. \end{array} \right.$$

Dalle (10) si ricavano le seguenti restrizioni per  $\underline{T}_*$  ed  $\underline{h}_*$ :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{T}_* (\underline{F}, \theta, \dots, 0) = \varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial \underline{F}} (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0), \\ \underline{h}_* (\underline{F}, \theta, \dots, 0) = \theta^2 \frac{\partial s_*}{\partial \theta} (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0); \end{array} \right.$$

le (11) (diversamente dalle relazioni ottenute da M. Carrasi ed A. Morro in [11]) non comportano l'annullarsi delle derivate:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{T}_*}{\partial \nabla \underline{G}} (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0), \quad \frac{\partial \underline{T}_*}{\partial \nabla^2 \underline{F}} (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0); \\ \frac{\partial \underline{h}_*}{\partial \nabla \underline{F}} (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0), \quad \frac{\partial \underline{h}_*}{\partial \nabla \underline{\dot{F}}} (\underline{F}, \theta, 0, \dots, 0). \end{array} \right.$$





risultano di ordine superiore al 2° in  $\mu_0$  <sup>(10)</sup>. Tenuto conto dell'isotropia, si ottengono le seguenti espressioni :

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \underline{T} &= -p(\varrho, \theta) \underline{I} + \mu_0 (\alpha_1 \underline{A}_1 + \alpha_2 \text{tr } \underline{A}_1 \underline{I}) + \frac{\mu_0}{\theta} \alpha_3 \dot{\theta} \underline{I} \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\varrho^2} (\beta_1 \text{grad grad } \varrho + \beta_2 \text{tr grad grad } \varrho \underline{I}) + \frac{\mu_0^2}{\varrho \theta} (\beta_3 \text{grad } \underline{g} + \\ &\quad + \beta_4 \text{tr grad } \underline{g} \underline{I}) \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\varrho R \theta^2} (\beta_5 \ddot{\theta} \underline{I} + \beta_6 \dot{\theta} \underline{A}_1 + \beta_7 \dot{\theta} (\text{tr } \underline{A}_1) \underline{I}) + \frac{\mu_0^2}{R \varrho \theta} (\beta_8 \underline{A}_2 + \\ &\quad + \beta_9 (\text{tr } \underline{A}_2) \underline{I}) \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\varrho^3} (\beta_{10} \text{grad } \varrho \otimes \text{grad } \varrho + \beta_{11} \text{grad } \varrho \cdot \text{grad } \varrho \underline{I}) + \\ &\quad + \frac{\mu_0^2}{\varrho \theta^2} (\beta_{12} \underline{g} \otimes \underline{g} + \beta_{13} \underline{g} \cdot \underline{g} \underline{I}) \\ &+ \frac{\mu_0^2}{R \varrho \theta^3} \beta_{14} \dot{\theta}^2 \underline{I} + \frac{\mu_0^2}{\varrho R \theta} (\beta_{15} \underline{A}_1 \cdot \underline{A}_1 + \beta_{16} \text{tr } (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_1) + \\ &\quad + \beta_{17} (\text{tr } \underline{A}_1)^2 \\ &+ \beta_{18} (\text{tr } \underline{A}_1) \underline{A}_1) + \frac{\mu_0^2}{\varrho^2 \theta} [\beta_{19} (\text{grad } \varrho \otimes \underline{g} + \underline{g} \otimes \text{grad } \varrho) + \\ &\quad + \beta_{20} \text{grad } \varrho \cdot \underline{g} \underline{I} \\ &(\text{con tr } \underline{A}_1 = A_1^{11} + A_2^{22} + A_3^{33}) ; \end{aligned} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \underline{h} &= \mu_0 \frac{R\theta}{\alpha} \gamma_1 \text{grad } \varrho + \mu_0 R \gamma_2 \underline{g} + \frac{\mu_0^2}{\varrho \theta} \delta_1 \text{grad } \dot{\theta} + \\ &\quad + \frac{\mu_0^2}{\varrho} (\delta_2 \underline{a}_1 + \delta_3 \underline{a}_2 + \delta_4 \underline{a}) \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\varrho^2} (\delta_5 \underline{A}_1 \text{grad } \varrho + \delta_6 (\text{tr } \underline{A}_1) \text{grad } \varrho) + \frac{\mu_0^2}{\varrho \theta} (\delta_7 \underline{A}_1 \cdot \underline{g} + \delta_8 (\text{tr } \underline{A}_1) \underline{g}) \\ &+ \frac{\mu_0^2}{\varrho \theta} \delta_9 \dot{\theta} \underline{g} + \frac{\mu_0^2}{\varrho^2 \theta} \delta_{10} \dot{\theta} \text{grad } \varrho , \end{aligned} \right.$$

$$\text{dove : } a_{1k} = {}_2A_{1km}^m, a_{2k} = {}_2A_1^m{}_{km}, a_{3k} = {}_2A_1^m{}_{mk}.$$

<sup>(10)</sup> Si esamina, cioè, il comportamento asintotico di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  quando  $\mu_0 \rightarrow 0$  (cfr. [7]).



e la (7) è sostituita da :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} & \left( -e_* \frac{\partial \psi}{\partial F_L^i} + T_{*i}^L \right) \dot{F}_L^i + \left( -e_* \frac{\partial \psi}{\partial F_{L,M}^i} + \frac{\partial s_*^M}{\partial \dot{F}_L^i} \right) \dot{F}_{L,M}^i + \\ & \qquad \qquad \qquad + \left( -\frac{h_*^M}{\theta} + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial \theta} \right) G_M \\ & + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial F_L^i} F_{L,M}^i + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial F_{L,H}^i} F_{L,MH}^i + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial G_L} G_{L,M} \geq 0 ; \end{aligned} \right.$$

l'extraflusso  $\underline{s}_*$  risulta poi lineare in ogni componente di  $\nabla^2 F$  e  $\nabla^2 \theta$ .

Procedendo inoltre come ai n. 3 e 4, è immediato verificare che la (18) consente di ritrovare in uno sviluppo in serie di  $\underline{T}$  ed  $\underline{h}$  per un fluido maxwelliano tutti i termini previsti dalla teoria di Truesdell, ristretta al caso in cui le equazioni costitutive non dipendono da  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{G}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{F}$ . Pertanto, in tali ipotesi le equazioni costitutive proposte in [11] sono adatte allo studio dei fluidi maxwelliani purchè si scriva il 2° principio nella forma proposta in [12].

Se, invece,  $\underline{s}_* = \underline{o}$  nella (4) e si assumono le equazioni costitutive (3), si ha :

$$\psi = \bar{\psi}(\underline{F}, \nabla \underline{F}, \theta, \underline{G}, \dot{\underline{F}}, \dot{\theta})$$

e la (7) si modifica in :

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \left( -e_* \frac{\partial \psi}{\partial F_L^i} + T_{*i}^L \right) \dot{F}_L^i - e_* \frac{\partial \psi}{\partial F_{L,M}^i} \dot{F}_{L,M}^i - e_* \frac{\partial \psi}{\partial \dot{F}_L^i} \dot{F}_L^i - \\ & - e_* \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial G_L} \dot{G}_L + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - (h_*^M G_M) \frac{1}{\theta} \geq 0. \end{aligned} \right.$$

La (19) comporta che, nel caso di un fluido maxwelliano, il tensore  $\underline{T}$  non contiene, al 2° ordine in  $\mu_0$  i termini in gradgrad  $\rho$ , gradgrad  $\theta$  ed  $\underline{h}$  non contiene, al 1° ordine in  $\mu_0$ , il termine in grad  $\rho$ .

È evidente che, se  $\underline{s}_* = \underline{o}$  e le equazioni costitutive sono indipendenti da  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{G}$ ,  $\dot{F}$ , si ottiene la teoria proposta in [11].

Si elimini ora la dipendenza da  $\underline{\dot{F}}$ ,  $\nabla \underline{\dot{F}}$ ,  $\underline{\dot{\dot{F}}}$  nelle (3) (il che equivale a considerare un gas rarefatto), la diseuguaglianza (4) comporta allora :

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \psi = \tilde{\psi}(\underline{F}, \theta, \underline{G}, \nabla \underline{G}, \dot{\theta}, \underline{\dot{G}}) \\ \underline{T}_* = \underline{\tilde{T}}_* ( \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad ) , \quad T_{*i}^L = \varrho_* \frac{\varrho \psi}{\varrho F_L^i} \\ \eta = \tilde{\eta}(\underline{F}, \theta, \nabla \underline{F}, \underline{G}, \nabla^2 \underline{F}, \nabla^2 \theta, \dot{\theta}, \underline{\dot{G}}, \underline{\dot{\dot{\theta}}}) \end{array} \right.$$

e :

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} -\varrho_* \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \left( -\varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial G_L} + \theta \frac{\partial s_*^L}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{G}_L + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta} \\ + \left( -\frac{h_*^L}{\theta} + \theta \frac{\partial s_*^L}{\partial \theta} \right) G_L + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial F_L^i} F_{L,M}^i + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial F_{L,H}^i} F_{L,MH}^i \\ + \theta \frac{\partial s_*^M}{\partial G_L} \theta_{,LM} \geq 0 \end{array} \right.$$

inoltre  $s_*$  è lineare in  $\ddot{\theta}$  ed in ogni componente di  $\nabla^2 \theta$  e  $\nabla^2 \underline{F}$ .

Dalla (20)<sub>2</sub> appare che, in un gas rarefatto,  $\underline{T}$  continua a dipendere da (11) grad grad  $\theta$ , come è naturale, ma risulta indipendente da grad grad  $\varrho$ , grad  $\varrho$  e  $\ddot{\theta}$ ; la (21), invece, non impedisce di ritrovare, per  $\underline{h}$ , un'espressione analoga a (16).

Quanto detto per  $\underline{T}$  sussiste, però, soltanto se il comportamento del gas è descritto mediante equazioni costitutive contenenti le derivate temporali del campo di temperatura  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\underline{\dot{G}}$ .

### BIBLIOGRAFIA

- [1] J. C. MAXWELL, *On stresses in rarefied gases*, Phil. Trans. Roy. Soc. London (1876) p. 170.
- [2] KUNDT-WARBURG, *Pogg. Ann. clv.* (1875) p. 337.
- [3] HELMHOLTZ-PIOTROWSKI, *Wiener Sitzb. XL* (1860) p. 607.
- [4] O. REYNOLDS, *On certain dimensional properties of matter in the gaseous state*, Phil. Trans. Roy. Soc. London (1879) sect. VI-VII.

---

(11) Nella teoria proposta in [11], anche tenendo conto dei termini di ordine superiore al 2° in  $\mu_0$ ,  $\underline{T}$  dipende dal gradiente secondo della temperatura solo in presenza di viscosità.

- [5] C. TRUESDELL, *A new definition of a fluid*, U. S. Naval Ord. Lab. Mem. 9487 (125), (1948).
- [6] C. TRUESDELL, *A new definition of a fluid II - The maxwellian fluid*, U. S. Naval Res. Lab. Rep. No P 355 (1949), (96, 119, 125).
- [7] C. TRUESDELL, *A new definition of a fluid - The maxwellian fluid*, Journal de Math. Pures Appl., 30 (1951) p. 111-158.
- [8] C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. An., 1, p. 125-300 (1952).
- [9] C. TRUESDELL - W. NOLL, *The non linear field theories of mechanics - Encyclopedia of Physics*, Springer-Verlag-Berlin (1965), vol. III/3
- [10] C. TRUESDELL, *Rational Thermodynamics*, Mc. Hill (1969).
- [11] M. CARRASSI - A. MORRO, *The thermodynamic theory of the maxwellian fluid*, Boll. U M I, 9 (1974) p. 297-335.
- [12] I. MÜLLER, *On the entropy inequality*, Arch. Rat. Mech. An. 26 (1967) p. 118.
- [13] I. MÜLLER, *A thermodynamic theory of mixtures of fluids*, Arch. Rat. Mech. An. 28 (1968), p. 1.
- [14] M. BRILLOUIN, *Théorie moléculaire des gaz - Diffusion du mouvement et de l'énergie* - Ann. de Chimie (7) t. 20 p. 440-485 (1900)
- [15] A. ROMANO, *Influenza di un extraflusso di energia sulla termodinamica di un dielettrico elastico dispersivo*, Rend. Ac. Sci. Fis. e Mat., XLI (1974).
- [16] A. ROMANO, *On deformable and magnetizable continua*, Ricerche di Matematica XXIII, 2 (1974) p. 255-272.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 ottobre 1976.