RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT
GIUSEPPE ZAMPIERI

Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 311-322

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__311_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 57 (1977)

Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari (*)

Tullio Valent - Giuseppe Zampieri (**)

Summary - In the paper [6] a theorem of non-differentiability of the Nemytsky operator — when acting between the sybspace $D(H_0^1(\Omega))$ of $(L^p(\Omega))^n$ and $L^q(\Omega)$, $p \leq q$ [where D is the gradient operator] — has been established. The tecnique of proof, howerer, appears to be difficult to apply in the case of the Nemytsky operator acting between the subspace $D((H_0^{1,p}(\Omega))^n)$ of $(L^p(\Omega))^{n^2}$ and $L^q(\Omega)$.
So, in this present paper, we introduce a new technique of proof to demonstrate the previous result in the last case. We do so with fewer requisites on the function « generating » the operator.
Our result enables us to study the admissibility of a linearization (in the sense of [7]) of Dirichlet's problem for a special class of non-linear differential systems; i.e. we can prove that the non-admiscibility situations mentioned in [7] relative to one equation are equally valid in the case of a system of equations.

In [6] è stato dimostrato un teorema di non differenziabilità per l'operatore di Nemytsky agente tra il sottospazio $D(H_0^1(\Omega))$ di $(L^p(\Omega))^n$ e $L^q(\Omega)$, $p \leq q$ (ove D è l'operatore gradiente). La tecnica di tale dimostrazione appare difficilmente applicabile al caso dell'operatore di Nemytsky operante tra il sottospazio $D(H_0^{1,p}(\Omega))^n)$ di $(L^p(\Omega))^{n^2}$ e $L^q(\Omega)$.
Perciò nel presente lavoro si introduce un nuovo tipo di dimostrazione con cui si riesca a stabilire, in quest'ultimo caso, un risultato tipo quello di [6] e che consente inoltre di attenuare le ipotesi sulla funzione che genera l'operatore.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Indirizzo degli AA: Seminario matematico dell'Università di Padova, Via Belzoni 7, Padova.

Il risultato ottenuto permette (al n. 2) di studiare la questione dell'ammissibilità (nel senso di [7]) di una linearizzazione del problema di Dirichlet relativo a un certo tipo di sistemi differenziali quasi-lineari e di provare che le situazioni di non ammissibilità rilevate in [7], nel caso di equazioni, sussistono anche per i sistemi.

1. Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, p e q due numeri reali ≥ 1.

Sia $(x, y) \rightarrow a(x, y)$ una funzione di $\Omega \times \mathbb{R}^{n^2}$ in $\mathbb{R}$ verificante la condizione di Caratheodory: per ogni $y = (y_{ij})_{i,j=1,..,n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ la funzione $x \rightarrow a(x, y)$ è misurabile e per quasi ogni $x \in \Omega$ la funzione $y \rightarrow a(x, y)$ è continua. Supponiamo inoltre che $\dfrac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, y)$, $(i, j = 1, \ldots, n)$, esistano e che, per ogni $y \in \mathbb{R}^{n^2}$, le funzioni $x \rightarrow \dfrac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, y)$ appartengano a $L^q(\Omega)$, essendo $L^q(\Omega)$ lo spazio delle (classi di) funzioni *reali* di potenza *q-ma* sommabile in Ω.

Sia $H^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, \ldots, n\right\}$ dotato della norma $\|\cdot\|_{1,p}$ definita da: $\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{j=1}^{n} \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p\right)^{1/p}$, ove $\|\cdot\|_p$ è la norma di $L^p(\Omega)$.

$H_0^{1,p}(\Omega)$ denoti la chiusura in $H^{1,p}(\Omega)$ dell'insieme $\mathfrak{D}(\Omega)$ delle funzioni reali indefinitamente differenziabili in Ω e a supporto compatto in Ω; $H^{-1,p'}(\Omega)$, $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$, denoti il duale forte di $H_0^{1,p}(\Omega)$.

Per ogni $u = (u_i)_{i=1,\ldots,n} \in (H^{1,p}(\Omega))^n$ poniamo

$$Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,..,n}$$

e definiamo la funzione $Nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$Nu(x) = a(x, Du(x)). \tag{1}$$

La funzione a soddisfi alla condizione di crescita

$$|a(x, y)| \leq b(x) + c|y|^{p/q} \tag{2}$$

ove $b \in L^q(\Omega)$, c è una costante positiva e $|y| = (\sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^2)^{1/2}$.

Dalla condizione di Caratheodory e da (2) segue facilmente che $u \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n \to Nu \in L^q(\Omega)$; anzi si può dimostrare che, sotto queste condizioni, l'operatore $N : (H_0^{1,p}(\Omega))^n \to L^q(\Omega)$ è continuo (1).

TEOREMA. *Nelle ipotesi fatte su a, se $p \leq q$ l'operatore N : $(H_0^{1,p}(\Omega))^n \to L^q(\Omega)$ definito da* (1) *è differenziabile* (secondo Fréchet) *in qualche $\bar{u} \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n$ (se e) solo se a è affine in y.*

DIMOSTRAZIONE (2). Il « se » dell'enunciato è banale, attesa la continuità di $N : (H_0^{1,p}(\Omega))^n \to L^q(\Omega)$. Viceversa, si osservi innanzitutto che non è restrittivo supporre $\bar{u} = 0$ e $a(x, 0) = 0 \ \forall x \in \Omega$; altrimenti si ragiona sulla funzione $a' : \Omega \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ definita da $a'(x, y) = a(x, D\bar{u}(x) + y) - a(x, D\bar{u}(x))$.

Detto $N'(O)$ il differenziale di N in O, per ogni $u \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n$ si ha $\lim\limits_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \dfrac{N(tu)}{t} = N'(O)u$, ove il limite va inteso nella topologia di $L^q(\Omega)$. Ne segue l'esistenza di una successione $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ convergente decrescendo a zero tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a(x, t_k\, Du(x))}{t_k} = (N'(O)\, u)\,(x)\,; \tag{3}$$

perciò, dato che, per ogni $x \in \Omega$, la funzione $t \to a(x, t\, Du(x))$ è derivabile in $t = 0$ e che la sua derivata in $t = 0$ è il limite a primo membro di (3), si ottiene

$$(N'(O)u)\,(x) = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}\,(x, 0)\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,(x)\,. \tag{4}$$

Sia $\bar{y} = (\bar{y}_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{n^2}$.

---

(1) È noto (v. per es. [2]) che, se a soddisfa alla condizione di Caratheodory, (2) è necessaria e sufficiente affinchè, posto, per ogni $\tau \in (L^p(\Omega))^n$,

$$A\tau(x) = a(x, \tau(x))\,,$$

l'operatore $\tau \to A\tau$ mappi con continuità $(L^p(\Omega))^{n^2}$ in $L^q(\Omega)$.

(2) Seguiremo la linea della dimostrazione del Teorema 3.6 di [5]; nel nostro caso, però, il problema presenta delle difficoltà tecniche non banali.

Prefissato (arbitrariamente) $x^0 = (x_j^0)_{j=1,\ldots,n} \in \Omega$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ consideriamo la *n-pla* $(u_i^m)_{i=1,\ldots,n}$, ove u_i^m è la funzione di Ω in $\mathbb{R}$ definita ponendo

$$u_m^i(x) \begin{cases} = 0 \text{ se} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} \geq 1 \\ = \dfrac{|y_{i1}|}{m} - \dfrac{|y_{i1}|}{m} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} \text{ se } \sum_{j=1}^{n} \dfrac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} \leq 1 \end{cases}$$

ove $c_{ij}^m = \dfrac{1}{m} \left| \dfrac{\bar{y}_{i1}}{\bar{y}_{ij}} \right|$.

Poniamo, per $i = 1, \ldots, n$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$U_i^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_j \neq x_j^0 ,\ (j = 1, \ldots, n) ,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} < 1 , \right.$$
$$\left. \frac{x_j - x_j^0}{|x_j - x_j^0|} = - \frac{\bar{y}_{ij}}{|\bar{y}_{ij}|} \right\}.$$

Fissato, per ogni $i = 1, \ldots, n$, un punto $x^i \in U_i^m$ e posto $h^i = x^i - x^0$, siano v_i^m le funzioni di Ω in $\mathbb{R}$ definite da

$$v_i^m(x) = u_i^m\left(x + \frac{1}{m} h^i\right).$$

Sia $v^m = (v_i^m)_{i=1,\ldots,n}$.

È evidente che, posto $V^m = \bigcap_{i=1}^{n} \left(U_i^m - \dfrac{h^i}{m} \right)$, si ha $V^m \neq \varnothing$ in quanto $x^0 \in V^m$ e che inoltre

$$Dv^m(x) = \bar{y} \qquad \forall x \in V^m .$$

Dimostriamo ora che, se $S^1(x^0)$ è una palla centrata in x^0 di raggio r_1 contenuta nell'aperto V^1, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ la palla $S^m(x^0)$ centrata in x^0 di raggio r_1/m è contenuta in V^m.

Infatti, se $x \in S^m(x^0)$, cioè se $\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2 < (r_1/m)^2$, allora $x^0 + m(x - x^0) \in S^1(x^0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (U_i^1 - h^i)$; pertanto, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{m(x_j - x_j^0) + h_j^i}{|m(x_j - x_j^0) + h_j^i|} = -\dfrac{\bar{y}_{ji}}{|\bar{y}_{ij}|} & \text{per ogni } j = 1, \ldots, n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{|m(x_j - x_j^0) + h_j^i|}{c_{ij}^1} < 1 & \\ m(x_j - x_j^0) + h_j^i \neq 0 & \text{per ogni } j = 1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Di conseguenza per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{x_j - x_i^0 + \dfrac{h_j^i}{m}}{\left|x_j - x_j^0 + \dfrac{h_j^i}{m}\right|} = -\dfrac{\bar{y}_{ij}}{|\bar{y}_{ij}|} & \text{per ogni } j = 1, \ldots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\left|x_j - x_j^0 + \dfrac{h_j^i}{m}\right|}{c_{ij}^m} < 1 & \\ x_j - x_j^0 + \dfrac{h_j^i}{m} \neq 0 & \text{per ogni } j = 1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Questa è la terna di condizioni su x che definisce l'insieme $U_i^m - \dfrac{h^i}{m}$ e perciò $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \left(U_i^m - \dfrac{h^i}{m}\right)$, cioè $S^m(x^0) \subseteq V^m$.

Si è pertanto ottenuta una successione $(S^m(x^0))_{m \in \mathbb{N}}$ di palle centrate in x^0 tali che

$$mis\ S^m(x^0) = k\left(\frac{1}{m}\right)^n,$$

[ove k è una costante opportuna e mis sta per misura di Lebesque] e che

$$Dv^m(x) = \bar{y} \qquad \forall x \in S^m(x^0)\,.$$

È altresì chiaro che, almeno per m sufficientemente elevato, le funzioni $v_1^m, \dots, v_n^m$ hanno il supporto compatto in Ω e quindi, appartenendo esse (come si constata facilmente) a $H^{1,p}(\Omega)$, stanno in $H_0^{1,p}(\Omega)$; inoltre

$$\lim_{m\to\infty} \|Dv^m\|_{(L^p(\Omega))^{n^2}} = 0$$

Di conseguenza, essendo (per ipotesi) $N : \left(H_0^{1,p}(\Omega)\right)^n \to L^q(\Omega)$ differenziabile in O e ricordando (4), si ha [3]

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left(\int_\Omega \left| a\big(x, Dv^m(x)\big) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x,0) \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j}(x) \right|^q dx\right)^{1/q}}{\|Dv^m\|_{(L^p(\Omega))^{n^2}}} = 0 .$$

Si osservi ora che, per come sono state definite le funzioni v_i^m, esiste una costante positiva k_1 tale da aversi, per ogni $i = 1, \dots, n$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{mis}\,(\text{supp}\, v_i^m) \le k_1 \left(\frac{1}{m}\right)^n,$$

ove supp v_i^m indica il supporto di v_i^m. Pertanto

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left(\int_{S^m(x^0)} \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0)\, \bar{y}_{ij} \right|^q dx\right)^{1/q}}{\left(\sum_{i,j=1}^n |\bar{y}_{ij}|^p\right)^{1/p} \left(k_1 \left(\frac{1}{m}\right)^n\right)^{1/p}} = 0$$

Poichè inoltre $p \le q$, si ha per m grande

$$\left(k_1 \left(\frac{1}{m}\right)^n\right)^{1/p} \le \left(k_1 \left(\frac{1}{m}\right)^n\right)^{1/q} = \left(\frac{k_1}{k} \text{mis}\big(S^m(x^0)\big)\right)^{1/q}$$

---

[3] Si ricordi che, essendo Ω limitato, si ha (per la disuguaglianza di Poincaré)

$$\|Dv^m\|_{(L^p(\Omega))^{n^2}} \le \text{cost}\ \|v^m\|_{(H^{1,p}(\Omega))^n},\ \ \forall v \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n .$$

e perciò

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^{1/q} \frac{1}{\left(\sum_{i,j=1}^{n} |\bar{y}_{ij}|^p\right)^{1/p}} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\int_{S^m(x^0)} \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}} (x, 0)\bar{y}_{ij} \right|^q dx}{\operatorname{mis}(S^m(x^0))}\right)^{1/q} = 0 .$$

Si conclude che per ogni $x^0 \in \Omega$ si può trovare una successione $(S^m(x^0))_{m\in\mathbb{N}}$ di palle centrate in x^0 e di misura infinitesima (per $m \to \infty$) in modo da aversi

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_{S^m(x^0)} |a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}} (x, 0)\, \bar{y}_{ij}|^q \, dx}{\operatorname{mis}(S^m(x^0))} = 0 . \tag{5}$$

La funzione $x \to |a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}} (x, 0)\bar{y}_{ij}|^q$ appartiene a $L^1(\Omega)$: per convincersene basta pensare che le funzioni $x \to \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0)$ appartengono a $L^q(\Omega)$ per ipotesi e che la funzione $x \to a(x, \bar{y})$ appartiene per a $L^q(\Omega)$ in virtù di (2).

Allora, in base a un noto teorema, si ha, per quasi ogni $x^0 \in \Omega$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_{S^m(x^0)} |a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}} (x, 0)\, \bar{y}\,|^q \, dx}{\operatorname{mis}\,(S^m(x^0))} = |\,a(x^0, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}} (x^0, 0)\, \bar{y}\,| .$$

Di conseguenza da (5) segue, per quasi ogni $x^0 \in \Omega$,

$$a(x^0, \bar{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}} (x^0, 0)\, \bar{y}_{ij} .$$

Evidentemente, allora, esiste un sottoinsieme Ω_0 di Ω avente misura di Lebesque nulla tale che, per ogni $y \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^{n^2}$, (ove $\mathbb{Q}$ denota l'insieme dei numeri razionali), si ha

$$(6) \qquad a(x\,,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x\,,0)y_{ij} \qquad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$$

In virtù della continuità della funzione $y \to a(x\,,y)$, (6) sussiste per ogni $y \in \mathbb{R}^{n^2}$.

Dal Teorema appena dimostrato segue immediatamente il seguente

COROLLARIO. *Sia V un sottospazio di $(H^{1,p}(\Omega))^n$ contenente $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$.*

Nelle solite ipotesi su a, se $p \leq q$ l'operatore $N: V \to L^q(\Omega)$ è differenziabile in qualche punto di V (se e) solo se a è affine in y.

2. In questo numero sia $(x\,,y) \to a(x\,,y) = (a_{ij}(x\,,y))_{i,j=1,\ldots,n}$ una funzione di $\Omega \times \mathbb{R}^{n^2}$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ verificante la condizione di Caratheodory (v. n. 1); inoltre esistano $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x,0)$, $(i,j,h,k = 1,\ldots,n)$ e le funzioni $x \to \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x\,,0)$ siano misurabili ed essenzialmente limitate in Ω. Sia, per semplicità, $a(x,0) = 0$ $\forall x \in \Omega$. La funzione a non sia lineare in y.

Consideriamo l'operatore differenziale (quasi-lineare)

$$Tu = D^* a(x\,,Du) \qquad , u = (u_1\,,\ldots,u_n)\,,$$

ove, al solito, $Du = \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ e D^* denota il trasposto formale dell'operatore gradiente D. Più esplicitamente:

$$Tu = -\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x\,,Du)\right)_{i=1,\ldots,n}.$$

Posto

$$l(x\,,y) = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_{hk}}(x\,,0)\, y_{hk}$$

consideriamo l'operatore differenziale lineare

$$T_L u = D^* l\,(x\,,\,Du) \qquad , u = (u_1\,,\,\dots\,,\,u_n)\,.$$

Esplicitamente : $T_L u = -\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x\,,0)\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right)\right)_{i=1,..,n}$.

Prendiamo in esame i seguenti problemi

$$(P)\begin{cases} Tu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad ; \qquad (PL)\begin{cases} T_L\, u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad ,$$

ove $\partial\Omega$ indica la frontiera di Ω. Diremo che (PL) si ottiene linearizzando formalmente (P) nell'origine (4).

Siano S_u, S_f spazi di distribuzioni (vettoriali) in Ω a valori in $\mathbb{R}^n$ e anche spazi di Banach ; sia $S_u \subset \left(H^{1,1}(\Omega)\right)^n$ e $\left(C^1(\overline{\Omega})\right)^n \cap S_u$ sia denso in S_u.

S_g sia uno spazio di Banach di «funzioni» definite su $\partial\Omega$ e a valori in $\mathbb{R}^n$. Inoltre S_u e S_f siano tali che esista un'applicazione (di traccia) $\tau : S_u \to S_g$ lineare e continua con $\tau u = u|_{\partial\Omega}$ $\forall u \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^n \cap S_u$. Supponiamo a tale che, per ogni $u \in S_u$, la funzione $x \to a\left(x\,,\,Du(x)\right)$ sia localmente sommabile in Ω; il che certamente accade se si ammette per a una condizione di crescenza tipo (2). Allora (intendendo D e D^* nel senso delle distribuzioni) T è definito in S_u. Poichè anche T_L è definito in S_u, possiamo porre, per ogni $u \in S_u$,

$$\mathcal{T} u = (Tu\,,\ \tau u)\,, \qquad \mathcal{T}_L u = (T_L u\,,\,\tau u)\,.$$

Avendo supposto $a(x\,,O) = 0$ $\forall x \in \Omega$, si ha $\mathcal{T}(O) = O$.

Se $\mathcal{T}$ è un omeomorfismo di un intorno U dell'origine di S_u su un intorno $V \times W$ dell'origine di $S_f \times S_g$, diremo (usando la locuzione introdotta in [7]) che *la linearizzazione* (PL) *di* (P) *è ammissibile rispetto a* $(S_u\,,\,S_f\,,\,S_g)$ se sono verificate le seguenti condizioni :

---

(4) Si considera la linearizzazione nell'origine solo per non appesantire l'esposizione ; è chiaro come la questione vada posta per un punto diverso dall'origine.

(i) il problema (PL) è ben posto rispetto a (S_u, S_f, S_g) nel senso che $\mathcal{T}_L$ è un isomorfismo di S_u su $S_f \times S_g$;

(ii) $\mathcal{T}$ è differenziabile (secondo Fréchet) nell'origine e risulta $\mathcal{T}'(O) = \mathcal{T}_L$.

Come è già stato osservato in [6], essendo $\mathcal{T}$ un omeomorfismo di U su $V \times W$, la coppia di condizioni $\big((\mathrm{i}), (\mathrm{ii})\big)$ è equivalente alla coppia di condizioni $\big((\mathrm{i}), (\mathrm{ii})'\big)$ ove $(\mathrm{ii})'$ è la condizione: $\mathcal{T}^{-1}$: $V \times W \to U$ è differenziabile nell'origine e risulta $(\mathcal{T}^{-1})'(O) = \mathcal{T}_L^{-1}$.

Pertanto, se la linearizzazione (PL) di (P) è ammissibile rispetto a (S_u, S_f, S_g), si ha

$$\lim_{\|(f,g)\|_{S_f \times S_g} \to 0} \frac{\|\mathcal{T}^{-1}(f,g) - \mathcal{T}_L^{-1}(f,g)\|_{S_f}}{\|(f,g)\|_{S_f \times S_g}} = 0 \quad \text{con } (f,g) \in V \times W \text{ e } \mathcal{T}^{-1}(f,g) \in U;$$

$\mathcal{T}^{-1}(f,g)$ e $\mathcal{T}_L^{-1}(f,g)$ sono, rispettivamente, la soluzione del problema (P) in U e quella del problema (PL) in corrispondenza del dato $(f,g) \in V \times W$.

Supponiamo, ora, che a soddisfi alla condizione di crescita

$$|a(x, y)| \leq b + c|y| \tag{7}$$

ove b e c sono costanti positive, e che risulti

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, O) = \frac{\partial a_{hk}}{\partial y_{ij}}(x, O) \qquad \forall x \in \Omega \tag{8}$$

$$\lambda d|y|^2 \leq \sum_{i,j,h,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, O)\, y_{ij}\, y_{hk} \leq d|y|^2 \quad \forall\, (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n^2}, \tag{9}$$

essendo λ, d due costanti positive con $\lambda \leq 1$; (8) esprime il fatto che T_L è autoaggiunto e (9) dice che T_L è uniformemente ellittico. Posto, per ogni $u \in \big(H^{1,p}(\Omega)\big)^n$,

$$Nu(x) = a\big(x, Du(x)\big)$$

la condizione (7) assicura che, qualunque sia $p > 1$, N mappa con continuità $\big(H^{1,p}(\Omega)\big)^n$ in $\big(L^p(\Omega)\big)^{n^2}$ come s'è già osservato al n. 1.

Sia Ω a frontiera localmente lipschitziana nel senso di [4]; allora τ è un'applicazione lineare e continua di $(H^{1,p}(\Omega))^n$ su $(H^{1-1/p,p}(\partial\Omega))^n$, $\forall p > 1$. (V. [4], Th. 5.7) (5).

Sussistendo (8), (9), com'è ben noto T_L è un isomorfismo di $(H_0^1(\Omega))^n$ su $(H^{-1}(\Omega))^n$ (6); ne discende facilmente che il problema (PL) è ben posto assumendo

$$\text{(I)} \qquad S_u = (H^1(\Omega))^n, \; S_f = (H^{-1}(\Omega))^n, \; S_g = (H^{1/2}(\partial\Omega))^n.$$

Tuttavia *la linearizzazione* (PL) *del problema* (P) *non è ammissibile rispetto alla scelta* (I) *degli spazi* S_u, S_f, S_g (della soluzione e dei dati), perché, se $\mathfrak{T}$ è un omeomorfismo di un intorno U dell'origine di $(H^1(\Omega))^n$ su un intorno $V \times W$ dell'origine di $(H^{-1}(\Omega))^n \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$, allora — in base al corollario del teorema del n. 1 — $\mathfrak{T} : (H^1(\Omega))^n \to \to (H^{-1}(\Omega))^n \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$ non è differenziabile nell'origine se a non è lineare in y. Infatti, essendo $\mathfrak{T}$ un omeomorfismo di U su $V \times W$, tale risulta l'applicazione di $(N \times \tau)(U) \subseteq (L^2(\Omega))^{n^2} \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^{n^2}$ in $V \times W$ che mappa $(Nu, \tau u)$ in $(D^*Nu, \tau u)$; la sua inversa è perciò differenziabile in O e, di conseguenza — se $\mathfrak{T}$ è differenziabile nell'origine — anche $N \times \tau$, e quindi N, è differenziabile nell'origine; ma ciò (per il Corollario del teorema 1) è assurdo perchè a non è lineare in y.

Se Ω è sufficientemente regolare e le funzioni $x \to \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$ sono hölderiane in $\bar{\Omega}$, allora, sussistendo (8), (9), T_L è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ su $(H^{-1,p}(\Omega))^n$ $\forall p > 1$ (7); ne segue che il problema

---

(5) Noi indichiamo con $H^{s,p}(\Omega)$ e $H^{s,p}(\partial\Omega)$ gli spazi che in [4] sono indicati con $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s,p}(\partial\Omega)$.

(6) $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ stanno rispettivamente per $H^{1,2}(\Omega)$, $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{-1,2}(\Omega)$, secondo la convenzione usuale.

(7) V. per es. [1]. I risultati di [1] si riferiscono al caso di una equazione ellittica, ma si trasportano al caso di un sistema ellittico.

Osserviamo che, adattando al caso dei sistemi ellittici il metodo di Meyers [3], è possibile dimostrare che T_L è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ su $(H^{-1,p}(\Omega))^n$ anche nel caso che le funzioni $x \to \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$ siano soltanto misurabili ed essenzialmente limitate, purchè Ω sia « sufficientemente regolare » e la costante λ di (9) sia sufficientemente vicina a 1.

(PL) è ben posto assumendo

$$\text{(II)} \quad S_u = \left(H^{1,p}(\Omega)\right)^n, \ S_f = \left(H^{-1,p}(\Omega)\right)^n, \ S_g = \left(H^{1-1/p,p}(\partial\Omega)\right)^n, \ (p > 1).$$

Ragionando come nel caso $p = 2$, dal Corollario del Teorema del n. 1 si deduce che, *qualunque sia* $p > 1$ *la linearizzazione* (PL) *di* (P) *non è ammissibile rispetto alla scelta* (II) *di* S_u, S_f, S_g.

Ancora più significativo è il fatto che *la linearizzazione* (PL) *di* (P) *non è ammissibile neppure rispetto alla scelta*

$$\text{(III)} \quad S_u = \left(H_0^{1,p}(\Omega)\right)^n, \ S_f = \left(H^{-1,p}(\Omega)\right)^n, \ S_g = \{0\}, \ (p > 1),$$

per la quale (come s'è detto sopra) il problema (PL) è ben posto se Ω è sufficientemente regolare e le funzioni $x \to \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$ sono hölderiane in $\bar{\Omega}$.

Per provare questa affermazione si ragiona, evidentemente, come sopra e si sfrutta (in pieno) il teorema del n. 1, anzichè il suo corollario.

BIBLIOGRAFIA

[1] Campanato S. e Stampacchia G., *Sulle maggiorazioni in* L^p *nella teoria delle equazioni ellittiche,* Boll. U.M.I., 20 (1965), pp. 393-398.

[2] Krasnoselskij M. A. et al., *Integral operators in spaces of summable functions,* Noordhoff Int. Publ., Leyden (1976).

[3] Meyers N., *An* L^p*-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 17 (1963) pp. 189-206.

[4] Necas J., *Les méthodes directes en théorie dis equations elliptiques,* Masson, Paris (1967).

[5] Prodi G. e Ambrosetti A., *Analisi non lineare,* Quaderno Sc. Normale Sup. Pisa (1973).

[6] Valent T., *Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky,* Rend. Acc. Naz. Lincei, 65, Fasc. 1 (1978).

[7] Valent T., *Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale,* Rend. Acc. Naz. Lincei, 65, Fasc. 2 (1978).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 luglio 1978.