RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNA IDONE

Sul problema di Cauchy-Dirichlet per una classe di operatori parabolici a coefficienti discontinui

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 285-297

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__285_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Sul problema di Cauchy-Dirichlet per una classe di operatori parabolici a coefficienti discontinui.

GIOVANNA IDONE (*)

Sia Q il cilindro $\Omega\times]O, T[$ $(O < T < \infty)$ con Ω insieme aperto, convesso, limitato di R^n, $n \geq 2$, di classe $A^{(2,\lambda)}$ (1).

Detto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ il punto generico di R^n, consideriamo il problema di CAUCHY-DIRICHLET:

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}(x, t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \qquad \text{in } Q, \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = 0 && \text{in } \Omega, \\ &u(x, t) = 0 && \text{su } \partial\Omega\times]O, T[. \end{aligned} \tag{0.2}$$

In questa Nota, supposto $f(x, t) \in L^2(Q)$, dimostriamo un teorema di esistenza ed unicità per la soluzione di classe $W_0^{2,1}(Q)$ (per la definizione di $W_0^{2,1}(Q)$ e della relativa norma cfr [1] pp. 154-155) di tale problema nelle seguenti ipotesi:

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica via C. Battisti 98100 Messina.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dell'Istituto Matematico dell'Università di Messina.

(1) Vedi [2] pag. 3.

i) *i coefficienti* a_{ij} $(a_{ij} = a_{ji}\ i,j = 1,2, \dots , n)$ *sono misurabili e limitati in* Q *ed esiste un* $\nu > 0$ *tale che:*

$$\sum_{ij\,1}^{n} a_{ij}\,\lambda_i\,\lambda_j \geq \nu\,|\lambda|^2 \qquad \forall\ \lambda \in R^n \text{ e } q.o. \text{ in } Q\,;$$

ii) *denotata con* $x_i = \pi_i(x)$ *la proiezione* $R^n \to R$ (²), *esistono* n *funzioni* $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots, a_n(\xi)$ *misurabili e limitate rispettivamente in* $\pi_1(\Omega)$, $\pi_2(\Omega), \dots, \pi_n(\Omega)$, *strettamente positive*

$$O < m_0 \leq a_i(\xi) \leq m_1 \qquad i = 1,2, \dots , n \qquad m_0\,, m_1 \in R^+$$

ed una costante $\mathbb{K} \in]O\,, \overline{\mathbb{K}}[$ *tali che:*

$$\frac{\left(\sum_{i\,1}^{n} a_i(x_i)\,a_{ii}(x,t)\right)^2}{\sum_{ij\,1}^{n} a_{ij}^2(x,t)} \geq \sum_{1}^{n} a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2 \qquad q.o. \text{ in } Q \tag{0.3}$$

dove

$$\overline{\mathbb{K}} = \frac{1}{2}\left\{\left(M + \frac{m_0^{n+1}}{m_1^{n-1}}\,\frac{A}{B}\right) - \sqrt{\left(M + \frac{m_0^{n+1}}{m_1^{n-1}}\,\frac{A}{B}\right)^2 - 4\,\frac{m_0^{n+1}}{m_1^{n-1}}\,\frac{A_m}{B}}\right\}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$M = \sup_{\Omega} \sum_{i\,1}^{n} a_i^2(x_i), \quad m = \inf_{\Omega} \sum_{i\,1}^{n} a_i^2(x_i)\,, \quad B = \sup_{Q} \sum_{i\,1}^{n} a_i(x_i)\,a_{ii}(x,t),$$

$$A = \inf_{Q} \sum_{i\,1}^{n} a_i(x_i)\,a_{ii}(x,t) \qquad (^2)$$

ed inoltre l'espressione:

$$\frac{\sum_{i\,1}^{n} a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2}{\sum_{i\,1}^{n} a_i(x_i)\,a_{ii}(x,t)} \tag{0.4}$$

è funzione della sola t.

(²) $\pi_i : x \to x_i$ $(i = 1\,, 2\,, \dots, n)$. Nel seguito scriveremo brevemente $a_i(x_i)$ in luogo di $a_i(\pi_i(x))$ e col simbolo sup (inf) denoteremo lo pseudo. estremo superiore (inferiore).

Queste ipotesi non implicano la continuità dei coefficienti ed esprimono una « vicinanza » dell'operatore $\sum_{ij}^{n} {}_1\, a_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ all'operatore $\sum_{i}^{n} {}_1\, a_i\,(x_i) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} - h(t) \dfrac{\partial}{\partial t}$. Tale « vicinanza » è tanto maggiore quanto minore è K .

L'ipotesi (0.3) è più generale delle ipotesi *b*) e *c*) di S. CAMPANATO (cfr. osservazione I)), mentre l'ipotesi che la (0.4) sia funzione della sola t è una condizione in più.

Per acquisire il teorema di esistenza ed unicità prendiamo le mosse dal lavoro di C. MIRANDA [3] sulle equazioni ellittiche (che, tra l'altro, estendiamo alle equazioni paraboliche) ed utilizziamo successivamente una tecnica analoga a quella di [1].

1. - Osservazioni.

I) Sia $h\,(t)$ una funzione misurabile e limitata in $]\,O\,,\,T\,[$ tale che $O < A = \inf\limits_{]O,T[} h(t) < B = \sup\limits_{]O,T[} h\,(t)$ e diciamo K un numero tale che

$$\frac{2\,A}{A+B} < \mathrm{K} < \sqrt{\frac{A}{B}} \,.$$

Allora ogni operatore $\sum_{ij}^{h} {}_1\; a_{ij}\,(x,t) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ che con i suoi coefficienti verifica l'ipotesi i) ed è tale che

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ii}\,(x\,,\,t) = h\,(t) \;\; e \;\; \frac{\left(\sum_{1}^{n}{}_i\; a_{ii}\right)^2}{\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}^2} \geq n - \mathrm{K}^2 \qquad q.o. \text{ in } Q\,,$$

soddisfa pure le ipotesi ii) per $a_i\,(x_i) = 1$ $(i = 1,2, \ldots\,, n)$, ma non verifica la seconda delle (2.2) di [1].

II) Ci sarà utile osservare per il seguito che, se $\mathbb{K} \in]O, \overline{\mathbb{K}}[$ risultano verificate le seguenti disuguaglianze:

(1.1) $$\sqrt{\frac{M - \mathbb{K}^2}{m - \mathbb{K}^2}}\,\mathbb{K} < \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\frac{A}{B}}\,, \qquad O < \mathbb{K} < \sqrt{m}$$

e viceversa dalle (I.I) segue $\mathbb{K} \in]O, \overline{\mathbb{K}}[$.

Inoltre risulta pure:

(1.2) $$\frac{1}{M - \mathbb{K}^2} < \frac{m_1^{\frac{n-2}{2}}}{m_0^{\frac{n+2}{2}}}$$

III) Siano $a_1(\xi), a_2(\xi), \ldots, a_n(\xi)$ n funzioni misurabili e limitate rispettivamente in $\pi_1(\Omega), \pi_2(\Omega), \ldots, \pi_n(\Omega)$ e tali che

$$O < m_0 \le a_i(\xi) \le m_1 \qquad m_0, m_1 \in R^+$$

e sia $h(t)$ una funzione misurabile e limitata in $]O, T[$ tale che

$$O < A^* = \inf_{]O,T[} h(t) < \sup_{]O,T[} h(t) = B^*$$

Sia $\mathbb{K}$ un numero dell'intervallo $]O, \sqrt{m}[$ tale che:

(1.3) $$\frac{M - \mathbb{K}^2}{m - \mathbb{K}^2}\,\mathbb{K} < \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\frac{A^*}{B^*}}$$

avendo al solito denotato con M ed m il $\sup_{\Omega} \sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i)$ e l'$\inf_{\Omega} \sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i)$ (3).

(3) Per un siffatto valore di $\mathbb{K}$ risulta $\mathbb{K} < m_0$.

Allora ogni operatore $\sum_{ij}^{n} a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ i cui coefficienti soddisfano l'ipotesi i) e verificano quasi ovunque in Q le condizioni:

$$a_{ii}(x,t) = \left(a_i(x_i) - \frac{\mathbf{K}^2}{n\,a_i(x_i)}\right) h(t) \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{1.4}$$

$$|\,a_{ij}(x,t)\,| \leq \frac{\mathbf{K}\,h(t)}{\sqrt{n^2-n}}\left(1 - \frac{\mathbf{K}^2}{n^2}\sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{a_i^2(x_i)}\right)^{1/2} \qquad i \neq j \tag{1.5}$$

soddisfa le ipotesi ii) pur di prendere come funzioni $a_i(\xi)$ le stesse funzioni che figurano nelle a_{ii} [4].

IV) Avendosi:

$$\left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i a_{ii}\right)^2 \leq \left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ii}^2\right) \leq \left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i^2\right)\left(\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}^2\right)$$

risulta:

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i\, a_{ii}\right)^2}{\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}^2}.$$

---

[4] Risultando $\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i\, a_{ii} = \left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i^2 - \mathbf{K}^2\right) h(t)$ si ha:

$$A = \inf_{Q} \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i(x_i)\, a_{ii}(x,t) \geq (m - \mathbf{K}^2)\, A^*$$

$$B = \sup_{Q} \sum_{1}^{n}{}_i\, a_i(x_i)\, a_{ii}(x,t) \leq (M - \mathbf{K}^2)\, B^*$$

Allora dalla (1.3) segue:

$$\sqrt{\frac{M-\mathbf{K}^2}{m-\mathbf{K}^2}}\,\mathbf{K} < \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{\sqrt{A^*(m-\mathbf{K}^2)}}{\sqrt{B^*(M-\mathbf{K}^2)}} \leq \frac{m_0^{\frac{n+1}{2}}}{m_1^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{A}{B}.$$

Posto poi:

$$\beta(x,t) = \frac{\left(\sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, a_{ii}(x,t)\right)^2}{\sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}^2(x,t)},$$

$$\gamma(x,t) = \sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, a_{ii}(x,t), \qquad \alpha(x,t) = \frac{\beta(x,t)}{\gamma(x,t)}$$

per le ipotesi i), ii) le funzioni $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty(Q)$ e sono strettamente positive.

2. - Un risultato preliminare.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 2.1. *Siano date n funzioni $a_1(\xi), a_2(\xi), \ldots, a_n(\xi)$ definite quasi ovunque rispettivamente in $\pi_1(\Omega), \pi_2(\Omega), \ldots, \pi_n(\Omega)$, ivi misurabili e limitate e tali che:*

$$0 < m_0 \leq a_i(\xi) \leq m_1 \qquad q.o. \text{ in } \pi_i(\Omega)\ (i = 1,2, \ldots, n),\ m_0, m_1 \in R^+$$

e sia data pure una funzione $h(t)$ definita quasi ovunque nell'intervallo $]0, T[$, ivi misurabile e limitata e tale che:

$$0 < \bar{A} \leq h(t) \leq \bar{B} \qquad q.o. \text{ in } [0,T] \qquad \bar{A}, \bar{B} \in R^+ .$$

Allora per ogni $f \in L^2(Q)$ esiste una ed una sola soluzione $u \in W_0^{2,1}(Q)$ dell'equazione:

$$\sum_1^n{}_i\, a_i(x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - h(t) \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \tag{2.1}$$

e si ha la maggiorazione

$$\|u\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)} \leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{\bar{B}}{\bar{A}}}\ \|f\|_{L^2(Q)} \tag{2.2}$$

Come è noto basta acquisire la maggiorazione (2.2) per eventuali soluzioni di classe $W^{2,1}_0(Q)$ dell'equazione (2.1) per garantire l'esistenza e l'unicità di tale soluzione, in quanto sarà possibile approssimare la (2.1) con una successione a coefficienti « regolari ».

Cominciamo a dimostrare che la (2.2) sussiste per ogni eventuale soluzione della (2.1) « regolare » in Q nulla per $t = 0$ e su $\partial\, \Omega_\times]\, 0, T\, [$.

Dalla (2.1) elevando al quadrato ambo i membri e dividendo per $\mathscr{A}(x) = \prod_{i=1}^{n} a_i\,(x_i)$ e per $h(t)$ si ha (5):

$$(2.3) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{i,j} \frac{a_i\, a_j}{\mathscr{A}\, h}\, p_{ij}^2 + \frac{h}{\mathscr{A}}\, u_t^2 = \frac{f^2}{\mathscr{A}\, h} + 2u_t \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{a_i}{\mathscr{A}}\, p_{ii} + $$
$$+ \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{a_i\, a_j}{\mathscr{A}\, h}\,(p_{ij}^2 - p_{ii}\, p_{jj})$$

Ora si ha (cfr. [3] pag. 211):

$$(2.4) \qquad \int_0^T \frac{dt}{h} \int_\Omega \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{a_i\, a_j}{\mathscr{A}}\,(p_{ij}^2 - p_{ii}\, p_{jj})\, dx =$$
$$= \int_0^T \frac{dt}{h} \int_\Omega \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{a_i\, a_j}{\mathscr{A}}\,(X_i\, p_j\, p_{ij} - X_j\, p_j\, p_{ii})\, d\sigma =$$
$$= - \int_0^T \frac{dt}{h} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{1}^{n}{}_{i}\, p_i\, X_i\right)^2 \Phi\, \mathscr{A}^{-1}\, d\sigma$$

dove le X_i sono i coseni direttori della normale esterna a $\partial\Omega$ e Φ è una funzione definita su $\partial\Omega$ che dipende solo da $m_0\; m_1$ e $\partial\Omega$. Essendo Ω convesso, risulta $\Phi \geq 0$ e quindi l'ultimo membro della (2.4) risulta non positivo.

---

(5) Per comodità di scrittura usiamo le notazioni:

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\;,\; p_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\;,\; u_t = \frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Resta così provato che:

$$\int_Q \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{a_i\, a_j}{\mathscr{A}\, h} (p_{ij}^2 - P_{ii}\, P_{jj})\, dx\, dt \leq 0\,.$$

Si ha pure:

$$\int_0^T dt \int_\Omega \sum_{1}^{n}{}_i \frac{a_i}{\mathscr{A}} p_{ii}\, u_t\, dx = \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} \sum_{1}^{n}{}_i \frac{a_i}{\mathscr{A}} p_i\, X_i\, u_t\, d\sigma -$$

$$-\int_0^T dt \int_\Omega \sum_{1}^{n}{}_i \frac{a_i}{\mathscr{A}} p_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial t}\, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega dx \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{1}^{n}{}_i \frac{a_i}{\mathscr{A}} p_i^2 \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{1}^{n}{}_i \frac{a_i}{\mathscr{A}} p_i^2\, (x,\, T)\, dx \leq 0.$$

Allora si ricava da (2.3):

$$\int_Q \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{a_i\, a_j}{\mathscr{A}\, h} p_{ij}^2\, dx\, dt + \int_Q \frac{h}{\mathscr{A}} u_t^2\, dx\, dt \leq \int_Q \frac{f^2}{\mathscr{A}\, h}\, dx\, dt$$

e quindi:

$$(2.5) \quad \frac{m_0}{m_1^{n-1}\, \overline{B}} \int_Q \sum_{1}^{n}{}_{ij} p_{ij}^2\, dx\, dt + \frac{\overline{A}}{m_1^n} \int_Q u_t^2\, dx\, dt \leq \frac{1}{m_0^n\, \overline{A}} \int_Q f^2\, dx\, dt.$$

Da (2.5) segue la (2.2). È poi ovvio che la validità della (2.2) si estende subito al caso $u \in W_0^{2,1}(Q)$ con un procedimento di approssimazione.

3. - Teorema di esistenza e di unicità.

Premettiamo il seguente lemma che estende il lemma (2.1) di [1].

LEMMA. 3.1. *Se valgono le ipotesi i) e ii) risulta*:

$$(3.1) \quad \sup_Q \left\{ \frac{\sum_{1}^{n}{}_i a_i^2 - \beta}{m_0\, m_1} + \frac{(\mathrm{K}^2 - (\sum_{1}^{n}{}_i a_i^2 - \beta))^2}{(M - \mathrm{K}^2)\,(m - \mathrm{K}^2)} \frac{B}{A} \right\}^{1/2} \leq \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{m_0\, m_1}}\,.$$

Per le ipotesi fatte si ha:

$$O \leq \sum_1^n {}_i\, a_i^2 (x_i) - \beta (x, t) \leq \mathbf{K}^2 \quad q.\, o. \text{ in } Q\,.$$

Allora, posto $\eta = \sum_1^n {}_i\, a_i^2 - \beta$, $F(\eta) = \dfrac{\eta}{m_0 m_1} +$ $+ \dfrac{(\mathbf{K}^2 - \eta)^2}{(M - \mathbf{K}^2)(m - \mathbf{K}^2)} \dfrac{B}{A}$, $F(\eta)$ è una funzione convessa di η e quindi:

$$\sup_Q \sqrt{F(\eta)} \leq \max \left\{ \sqrt{F(0)}, \sqrt{F(\mathbf{K}^2)} \right\} = \tag{3.2}$$

$$= \max \left\{ \frac{\mathbf{K}^2}{\sqrt{M - \mathbf{K}^2}\sqrt{m - \mathbf{K}^2}} \sqrt{\frac{A}{B}}\, , \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{m_0 m_1}} \right\}.$$

Moltiplicando ora membro a membro la prima delle (1.1) con la (1.2) ed entrambi i membri della disuguaglianza ottenuta per $\mathbf{K} \sqrt{\dfrac{B}{A}}$, si ha:

$$\frac{\mathbf{K}^2}{\sqrt{M - \mathbf{K}^2}\sqrt{m - \mathbf{K}^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \leq \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{m_0 m_1}}$$

da cui segue

$$\max \left\{ \frac{\mathbf{K}^2}{\sqrt{M - \mathbf{K}^2}\sqrt{m - \mathbf{K}^2}} \sqrt{\frac{B}{A}}\, , \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{m_0 m_1}} \right\} = \frac{\mathbf{K}^2}{\sqrt{m_0 m_1}}\,. \tag{3.3}$$

La (3.1) è ovvia conseguenza delle (3.2) e (3.3).

Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA 3.1. *Se valgono le ipotesi i) e ii), allora per ogni $f \in L^2(Q)$ il problema di* CAUCHY-DIRICHLET

$$\begin{cases} \sum_1^n {}_{ij}\; a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u \in \overset{0}{W}{}^{2,1} (Q) \end{cases} \tag{3.4}$$

ammette una ed una sola soluzione u e si ha la maggiorazione:

$$\|u\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\,\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)} \leq \tag{3.5}$$

$$\leq \frac{m_1^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{M - \mathbb{K}^2}\,\sqrt{\bar{B}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{m - \mathbb{K}^2}\,\sqrt{\bar{A}} - m_1^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{M - \mathbb{K}^2}\,\sqrt{\bar{B}}\,\mathbb{K}} \; \frac{1}{\nu} \; \|f\|_{L^2(Q)}$$

dove $\bar{A} = \dfrac{m - \mathbb{K}^2}{A}$, $\bar{B} = \dfrac{M - \mathbb{K}^2}{B}$.

Se u è soluzione del problema (3.4) allora

$$\sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, \frac{\partial^2_u}{\partial x_i^2} - \frac{\sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2}{\gamma}\, \frac{\partial u}{\partial t} = a f(x, t) +$$

$$+ \sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, \frac{\partial^2_u}{\partial x_i^2} - a \sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}\, \frac{\partial^2_u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \left(a - \frac{\sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2}{\gamma}\right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

e quindi:

$$u = \left(\sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2}{\gamma}\, \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} (a f) + \left(\sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2}{\gamma}\, \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \left[\sum_1^n{}_i\, a_i(x_i)\, \frac{\partial^2_u}{\partial x_i^2} - a \sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}\, \frac{\partial^2_u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta - \left(\sum_1^n{}_i\, a_i^2(x_i) - \mathbb{K}^2\right)}{\gamma}\, \frac{\partial u}{\partial t}\right] = \varphi(u).$$

φ è una applicazione da $W_0^{2,1}(Q)$ in $W_0^{2,1}(Q)$, in quanto $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x_i) - \mathrm{K}^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ è un isomorfismo di $L^2(Q)$ su $W_0^{2,1}(Q)$ in virtù del teorema 2.1. Dimostrare che il problema (3.4) ammette una soluzione, equivale a dimostrare che $\varphi(u)$ ha un punto unito. A tale scopo dimostriamo che φ è una contrazione qualora si assuma come norma in $W_0^{2,1}(Q)$ la seguente:

$$\| u \|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\,\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)} \quad \text{con } \bar{A} = \frac{m - \mathrm{K}^2}{B}, \quad \bar{B} = \frac{M - \mathrm{K}^2}{A}.$$

Essendo:

$$0 < \frac{m - \mathrm{K}^2}{B} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i^2(x_i) - \mathrm{K}^2}{\gamma} \leq \frac{M - \mathrm{K}^2}{A}$$

in base alla (2.2) si ha per ogni $v, w \in W_0^{2,1}(Q)$

$$\left\| \varphi(v) - \varphi(w) \right\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\,\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)} \leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M - \mathrm{K}^2}{m - \mathrm{K}^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - a \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)(v - w) + \frac{\beta - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mathrm{K}^2\right)}{\gamma} \frac{\partial (v - w)}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} =$$

$$= \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M - \mathrm{K}^2}{m - \mathrm{K}^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \left\{ \int_Q \left[\sum_{ij=1}^{n} \frac{(a_i \delta_{ij} - a\, a_{ij})}{\sqrt{m_0 m_1}} \sqrt{m_0 m_1} \frac{\partial^2 (v - w)}{\partial x_i \partial x_i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mathrm{K}^2\right)}{\sqrt{\bar{A}\,\bar{B}}\,\gamma} \sqrt{\bar{A}\,\bar{B}} \frac{\partial (v - w)}{\partial t} \right]^2 dx\, dt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt{\frac{M - \mathrm{K}^2}{m - \mathrm{K}^2}} \sqrt{\frac{B}{A}} \left\{ \int_Q \left[\frac{\sum_{ij=1}^{n} (a_i \delta_{ij} - a\, a_{ij})^2}{m_0 m_1} + \right.\right.$$

$$+\frac{\left(\beta-\left(\sum_{1}^{n}{}_i a_i^2-\mathrm{K}^2\right)\right)^2}{\bar{A}\,\bar{B}\,\gamma^2}\Bigg]\cdot\left[m_0\,m_1\sum_{1}^{n}{}_{ij}\left(\frac{\partial^2(v-w)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\bar{A}\,\bar{B}\left(\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dt\Bigg\}^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt{\frac{M-\mathrm{K}^2}{m-\mathrm{K}^2}}\sqrt{\frac{B}{A}}\left\{\int_Q F(\eta)\left[m_0\,m_1\sum_{1}^{n}{}_{ij}\left(\frac{\partial^2(v-w)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bar{A}\,\bar{B}\left(\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dt\right\}^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}}\sqrt{\frac{M-\mathrm{K}^2}{m-\mathrm{K}^2}}\sqrt{\frac{B}{A}}\sup_Q\sqrt{F(\eta)}\,\left\|v-w\right\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)}$$

Per il lemma (3.1) e per le ipotesi i) ii) risulta

$$\frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}}\sqrt{\frac{M-\mathrm{K}^2}{m-\mathrm{K}^2}}\sqrt{\frac{B}{A}}\sup_Q\sqrt{F(\eta)}\leq\frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}}\sqrt{\frac{M-\mathrm{K}^2}{m-\mathrm{K}^2}}\sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{m_0 m_1}}<1$$

e quindi φ è una contrazione. Esiste allora una ed una sola $u\in$ $\in W_0^{2,1}(Q)$ tale che $u=\varphi(u)$. Ne segue che il problema (3.4) ha soluzioni.

Per acquisire la (3.5) basta osservare che:

$$\|u\|_{\sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{m_0 m_1}}}\leq\frac{m_1^{\frac{n-1}{2}}}{m_0^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt{\frac{M-\mathrm{K}^2}{m-\mathrm{K}^2}}\sqrt{\frac{B}{A}}\,\|\alpha f\|_{L^2(Q)}+$$

$$+\frac{m_1^{n/2}}{m_0^{n/2}}\sqrt{\frac{M-\mathrm{K}^2}{m-\mathrm{K}^2}}\sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{m_0 m_1}}\,\|u\|_{\left(\sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{m_0 m_1}}\right)}$$

e che (cfr [1] nota (3)):

$$\frac{\sum_{1}^{n}{}_i\,a_i\,a_{ii}}{\sum_{1}^{n}{}_{ij}\,a_{ij}^2}\leq m,\quad\frac{\sum_{1}^{n}{}_i\,a_{ii}}{\sum_{1}^{n}{}_{ij}\,a_{ij}}\leq\frac{m_1}{\nu}\ \text{in}\ Q\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Campanato, *Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **41** (1968), 153-163.

[2] C. Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[3] C. Miranda, *Su di una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Anal. Stii. Univ. Iasi, XI_B (1965), 209-215.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 aprile 1977.