Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Oprea Berechet

Le problème de Cauchy pour opérateurs partiellement semi-elliptiques

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 267-284

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__267_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 57 (1977)

Le problème de Cauchy pour opérateurs partiellement semi-elliptiques

Oprea Berechet *

1. - Introduction.

Supposons avoir partagé les coordonnées de l'espace réel n-dimensionel en deux groupes $R^n = R^m \times R^{n-m}$ tel que tout $\xi \in R^n$ peut être écrit $\xi = (\xi', \xi'')$ avec $\xi' \in R^m$, $\xi'' \in R^{n-m}$. Soit L le sous-espace linéaire de R^n dont les points sont $(0, \ldots, 0, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$ et soit Φ un sous-espace de distributions défini dans R^n.

Soit l'équation partiellement hypoelliptique en ξ'

$$P(D)\, u = 0. \tag{0.1}$$

Definition (Palamodov (9)). Nous dirons que le problème de Cauchy pour l'équation (0.1) à valeurs initiales sur L possède une solution unique en Φ si chaque solution u de cette équation satisfaisant les conditions.

$$u \in \Phi\, ;\ D^{\alpha}_{\xi'}\ u\,|_L = 0 \tag{0.2}$$

est identiquement nulle pour tout α.

Dans (9) on donne le théorème général d'unicité où la définition de l'espace Φ dépend de deux indices et on pose le problème si ces indices sont les meilleurs pour lesquels on a ce théorème.

En ce qui suit, nous introduirons une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques, que nous appellerons la classe des opé-

(*) Indirizzo dell'A.: Department of Mathematics INCREST Pod. Pācū 220,77538, Bucarest, Romania.

rateurs partiellement semi-elliptiques, pour laquelle nous donnerons une extension du théorème d'unicité de Palamodov « par directions » et nous montrerons que le théorème obtenu ne peut être étendu, au sens que les indices ne peuvent être améliorés davantage.

2. - Opérateurs partiellement semi-elliptiques.

Soit $p_1, \ldots, p_n$ des nombres entiers et positifs et a un multiindice. Nous utiliserons les notations :

$$|a : p| = \sum_{k=1}^{n} a_k/p_k \tag{2.1}$$

et

$$P^0(D) = \sum_{|\alpha ; p|} a_\alpha D^\alpha \tag{2.2}$$

pour chaque opérateur différentiel $P(D) = \sum_{|\alpha ; p| \leq 1} a_\alpha D^\alpha$.

Nous rappellerons la définition suivante :

Definition 2.1. (Browder (2)). On dit qu'un opérateur différentiel $P(D)$ est semi-elliptique s'il existe n nombres entiers et positifs tel que :

1) Dans (2.2) il y a seulement des termes pour lesquels $|a : p| \leq 1$;

2) $P^0(\xi) \neq 0 \qquad (\forall)\, \xi \in R^n, \xi \neq 0$.

Tout polynôme semi-elliptique $P(x)$ a la propriété qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|x_1|^{p_1} + \ldots + |x_n|^{p_n} \leq C(|P(x)| + 1) \qquad (\forall)\, x \in R^n. \tag{2.3}$$

Nous utiliserons le résultat suivant (Friberg (3), l'inégalité (3.2.12) : Soit $P(D)$ un opérateur semi-elliptique tel que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$. Si C est une constante suffisamment grande, il existe une constante $c > 0$, telle que

$$|P(\xi + i\eta)| \geq c|P(\xi)| \tag{2.4}$$

si

$$C\,(1 + |\eta|) \leq |\xi_1|^{p_1/p_n} + |\xi_2|^{p_2/p_n} + \ldots + |\xi_{n-1}|^{p_{n-1}/p_n} + |\xi_n|$$

Soit $P(D)$ un opérateur partiellement hypoelliptique en ξ'. Le théorème Gårding-Malgrange (6) affirme que le polynôme associé à l'opérateur $P\,(D)$ peut être écrit sous la forme

$$P\,(\xi) = P_0\,(\xi') + \sum_{\alpha \neq 0} P_\alpha\,(\xi')\,\xi''^{\alpha} \tag{2.5}$$

où P_0 (considéré comme un polynôme à m variables) est hypoelliptique et $P_\alpha \langle\langle P_0$ pour tout a.

En regroupant les termes nous pouvons écrire

$$P\,(\xi) = P_0\,(\xi') + \sum_{j=1}^{e} P_j\,(\xi'')\,\xi'^{\alpha j} \tag{2.6}$$

Définition 2.2. Nous dirons qu'un opérateur partiellement hypoelliptique en ξ' est partiellement semi-elliptique en ξ' si, en (2.5), $P_0\,(\xi')$ est un polynôme semi-elliptique.

Soit $\xi^1 = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$.

Proposition 1. Si $P(D)$ est partiellement semi-elliptique en ξ', il est aussi partiellement semi-elliptique en ξ^1.

Démonstration. $P(D)$ étant partiellement hypoelliptique en ξ', il est aussi partiellement hypoelliptique en ξ^1. Donc

$$P(\xi) = P_0'(\xi^1) + \sum_{\alpha' \neq 0} P'_{\alpha'}\,(\xi^1)\,\xi_m^{\alpha' m} \ldots \xi_n^{\alpha' n} \tag{2.7}$$

où $P'_\alpha \langle\langle P'_0$. Mais $P'_0(\xi^1) = P_0(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, 0)$ qui est semi-elliptique (les nombres à l'aide desquels on peut lui appliquer la définition (2.1) sont $p_1, \ldots, p_{m-1}$) ; d'où la proposition énoncée.

Nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème 1. Soit $P\,(D)$ un opérateur partiellement semi-elliptique en ξ'. Supposons que les nombres $p_1^0, \ldots, p_m^0$ qui entrent dans la définition de P_0 sont, en ordre croissant $p_1^0 \leq p_2^0 \leq \ldots \leq p_m^0$.

Alors on a

$$(2.8)\qquad |x^{1r}|^{a} + |x_r| \le C\big(1 + |y^{1r}| + |z_{r+1}|^{p^0_{r+1}/p^0_r} + \dots + |z_m|^{p^0_m/p^0_r} + + |z''|^{p_0 p^0_1/p^0_r}\big) \qquad (\forall)\, z \in N(P) = \{z \in C^n, P(z) = 0\}$$

p_0 étant donné par

$$(2.9)\qquad p_0 = \max_{1\le j\le l} \frac{p_j}{p^0_1(1 - a^j_1/p^0_1 - \dots - a^j_m/p^0_m)}$$

où $p_j = \deg P_j$ (de 2.6), et z' est la variable duale de ξ', z'' celle de ξ'', $x' = \mathrm{Re} z'$, $y' = \mathrm{Im} z'$, $x^{1r} = (x_1, \dots, x_{r-1})$, $y^{1r} = (y_1, \dots, y_{r-1})$ avec $1 \le r \le m$, $a = p^0_1/p^0_r$ et C une constante positive.

DÉMONSTRATION. Soit.

$$N^{1r} = \{z \in N(P),\ |x_1|^{p^0_1/p^0_m} + \dots + |x_{r-1}|^{p^0_{r-1}/p^0_r} + |x_r| \le C\,(1 + y^{1r})$$

où C est une constante suffisamment grande pour que (2.4) soit satisfaite. Nous metterons $N''^r = N\text{-}N'^r$.

Si $z \in N'^r$, l'inégalité (2.8) est satisfaite parce que $p^0_j \ge p^0_1$ pour tout $j = 1, \dots, r-1$.

Le polynôme $P(\xi)$ étant partiellement semi-elliptique en ξ' et partiellement semi-elliptique en ξ^{1r}, on a

$$(2.10)\qquad P(\xi) = P^r_0(\xi^{1r}) + \sum_{\alpha\ne 0} P^r_\alpha(\xi^{1r})(\xi''^r)$$

où $\xi''^r = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$.

Soit $z \in N''^r$; nous avons

$$(2.11)\qquad |x_1|^{p^0_1/p^0_r} + \dots + |x_{r-1}|^{p^0_{r-1}/p^0_r} + |x_r| > C\big(1 + |y^{1r}|\big)$$

d'où, en tenant compte de (2.3), nous avons encore

$$(2.12)\qquad |P_0(x^{1r} + y^{1r})| \ge C|P_0(x^{1r})|$$

En regroupant les termes de (2.10) on obtient

$$P(\xi) = P_0^r(\xi^{1r}) + P'(\xi') + \sum_{j'=1}^{l} P_{j'}(\xi'')\,\xi'^{\alpha j} \tag{2.13}$$

où $P'(\xi')$ est le groupe des termes de $P_0(\xi')$ qui n'entrent pas dans $P_0^r(\xi^{1r})$, et P_j n'ont pas de termes libres.

De (2.3), 2.12) et (2.13) on déduit

$$|x_1|^{p_1^0} + \ldots + |x_r|^{p_r^0} \leq C_1 |\, P'(z')| + C_2 \sum_{j=1}^{l} |P_j(z'')|\, |z'^{\alpha j}| + C_3 \tag{2.14}$$

Soit un terme quelconque du polynôme $P'(z')$. Il sera de la forme

$$a_\alpha z_1^{\alpha_1} \ldots z_r^{\alpha_r} z_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \ldots z_m^{\alpha_m} \tag{2.15}$$

où α a la propriété qu'il existe au moins α_i, où $r+1 \leq i \leq m$, tel que $\alpha_i \neq 0$ (sinon, le terme considéré aurait appartenu à $P_0^r(\xi^{1r})$). En utilisant la condition de semi-ellipticité $|\alpha : p^0| \leq 1$ et l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |a_\alpha z_1^{\alpha_1} \ldots z_m^{\alpha_m}| \leq{} & C_4\, \varepsilon \left(|z_1|^{p_1^0} + \ldots + |z_r|^{p_r^0}\right) + \\ & + C_5(\varepsilon)\left(|z_{r+1}|^{p_{r+1}^0} + \ldots + |z_m|^{p_m^0}\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

où ε est un nombre positif arbitraire et $C_1(\varepsilon)$ est une fonction bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ (ε_1 est fixé arbitrairement).

En majorant de la même manière tous les termes du polynôme $P'(z')$. on obtient

$$\begin{aligned} |P'(z')| \leq{} & C_6\, \varepsilon \left(|z_1|^{p_1^0} + \ldots + |z_r|^{p_r^0}\right) + \\ & + C_7(\varepsilon)\left(|z_{r+1}|\, p_{r+1}^0 + \ldots + |z_m|^{p_m^0}\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

où $C_7(\varepsilon)$ a la même propriété que $C_5(\varepsilon)$.

Soit $|P_j(z'')|\, |z'^{\alpha j}|$ un des termes de la somme du membre droit de l'inégalité (2.14) et soit a $z_{m+1}^{m+1} \ldots z_n^n$ un des termes de P_j ayant le degré maximum. Pour obtenir une majoration du module de ce terme nous rappellerons la définition suivante (Friberg (4), (5)). Soit $P(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$ un polynôme quelconque. L'ensemble de multiindices $\alpha \in N^n$ pour lesquels $a_\alpha \neq o$ sera noté par (P). L'enveloppe convexe dans R^n de l'ensemble $(P) \cup \{0\}$ sera noté par $(P)^*$. Le polyèdre de Newton associé au polynôme P est par définition $F(P) = \cup F^i$ de toutes les faces à (n-1) dimensions du polyèdre $(P)^*$, qui ne sont contenues dans aucun hyperplan de coordonnées.

Dans (7) Volevitch et Guindikine démontrent un résultat duquel on déduit.

Lemme 1. Soit $R(\xi)$ un polynôme semielliptique et Q un polynôme tel que $Q \langle\langle$ R. Alors $(Q)^* \subset (R)^*$ et $F(Q) \cap F(R) = \varnothing$.

De ce lemme il résulte, en tenant compte que $P_\alpha \langle\langle P_0$

$$a_1^j/p_1^0 + a_2^j/p^0 + \ldots + a_m^j/p_m^0 < 1 \tag{2.18}$$

Nous avons :

$$|a\, z_{m+1}^{\alpha_{m+1}^j} \ldots z_n^{\alpha_n^j}| \cdot |z'^{\alpha j}| \leq C_5\, \varepsilon\, |z_1|^{p_1^0} \ldots |z_m|^{p_m^0} \cdot |z''|^{p_j}/\varepsilon$$

En appliquant l'inégalité de Hölder et (2.18) nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{l} |P_j(z'')|\; |z'^{\alpha j}| \leq C_8\, \varepsilon\, (|z_1|^{p_1^0} + \ldots + |z_m|^{p_m^0}) + C_9(\varepsilon)\; |z''|^{p_0 p_1^0} \tag{2.19}$$

où C_8 est une constante et $C_9(\varepsilon)$ a la même propriété que $C_5(\varepsilon)$ et $C_7(\varepsilon)$.

Maintenant, de (2.14), (2.17) et (2.18) et choisissant ε tel que $(C_6 + C_8)\,\varepsilon = 1/2$, il résulte que

$$\begin{aligned} |x_1^{p_1}| + \ldots + |x_r|^{p_r^0} \leq C'\, (1 + |y'^r|^{p_r^0} + \\ + |z_{r+1}|^{p_{r+1}^0} + \ldots + |z_m|^{p_m^0} + |z''|^{p_0 p_1^0}). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Le théorème est ainsi démontré.

3. - L'extension du théorème d'unicité de Palamodov pour les opérateurs partiellement semi-elliptiques.

Nous utiliserons les notations suivantes (Palamodov (9)) :

— (3.1) $I(\xi) = \exp(A\,|\xi|^\delta)$, où $A > 0$ et $\delta > 1$ sont des constantes ;

— $\|\varphi\|_I^q$ et $\|\varphi\|_I^q - 1$ les normes dans $\mathfrak{D}\,(R)$ suivantes

$$\|\varphi\|_I^q = \sum_{|\alpha|\leq q} \|I\,(\xi)\, D^\alpha \varphi\|_{L_2} \qquad \text{et} \tag{3.2}$$

$$\|\varphi\|_I^q - 1 = \sum_{|\alpha|\leq q} \left\| \frac{D^\alpha \varphi}{I\,(\xi)} \right\|_{L_2} \quad \text{où } q \text{ est un entier positif,} \tag{3.3}$$

— S_I^q et $\mathcal{E}_I^q$ les espaces obtenus em complétant $\mathfrak{D}(R)$ avec les normes $\|\varphi\|_I^q$ et, respectivement $\|\varphi\|_{I-1}^q$. Si q est un entier négatif, S_I^q sera le dual de $\mathcal{E}_I^{-q}$ et $\mathcal{E}_I^q$ celui de S_I^{-q}.

Soit aussi $\xi^1 = (\xi_1\,, \ldots\,, \xi_{m-1})$, $\xi^2 = (\xi_{m+1}\,, \ldots\,, \xi_{m+k_2})$, $\xi^3 = (\xi_{m+k_2+1}\,, \ldots\,, \xi_{m+k_3})\,, \ldots\,,\ \xi^t = (\xi_{m+k_{t-1}+1}\,, \ldots\,, \xi_n)$ tel que $\xi'' = (\xi^2, \ldots\,, \xi^t)$ et soit $L_1 = (0\,, \ldots\,, 0\,, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots\,, \xi_n)$.

Soit A^1, A^m, $A_2\,, \ldots\,, A_t$ des constantes positives quelconques et q un nombre entier quelconque. Nous noterons

$$I(\xi) = I^1(\xi^1)\, I^m(\xi_m)\, I''^2(\xi^2) \ldots I''^t(\xi^t) \tag{3.4}$$

où

$$I^1(\xi^1) = \exp(A^1 |\xi^1|^{1/(1-\gamma)})$$

$$I^m(\xi_m) = \exp(A^m |\xi_m|^{1/(1-\gamma)})$$

$$I^j(\xi^j) = \exp(A_j |\xi^j|^{1/(1-\beta_j)}) \qquad \text{pour } 2 \leq j \leq t$$

Nous pouvons maintenant énoncer une variante du théorème de Palamodov, qui sera utilisé dans ce qui suit. Puisque la démonstration de ce théorème suit la même voie que celle du théorème de Palamodov, nous exposerons brièvement cette démonstration en relevant seulement les modifications par rapport à cette dernière.

Théorème 2. S'il existe $0 < \gamma\,, \beta_2\,, \ldots\,, \beta_t < 1$ et $a > 0$, $C > 0$ tel que l'inégalité

$$|x^1|^a + |x_m| \leq C(1 + |y'|^{1/\gamma} + |z^2|^{1/\beta_2} + \ldots + |z^t|^{1/\beta_t}) \quad (\forall)\, z \in N(P) \tag{3.6}$$

soit satisfaite, alors toute solution de distribution de l'équation $P(D)\ u = 0$ qui s'annule avec toutes ses dérivées par rapport à ξ' qui appartient à l'espace $\mathcal{E}^q_I$, s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, sur L_1.

DÉMONSTRATION. Notons pas

$$I'(\xi') = I^1(\xi^1)\cdot I^m\ (\xi^m) \qquad \check{I}'(\xi') = I'((1+\varepsilon)\ \xi')$$

$$I''(\xi'') = I^2(\xi^2) \dots I^t(\xi^t) \qquad I''(\xi'') = I''((1+\varepsilon)\ \xi'')$$

et par deux fonctions arbitraires φ et ψ respectivement de $S^{q'}_{I'}$ et $S^{q''}_{I''}$ où q', q'' sont arbitraires.

En utilisant le théorème de la représentation exponentielle des solutions et la condition (3.6) on obtient (cf. Palamodov (9), formule (8.6) ch. VI) :

$$(3.7) \qquad |(u\,,\varphi\,\psi)| \leq C_1\ \|\varphi\|^{q'}_{\check{I}'}\|\psi\|^{q''}_{\check{I}''} \operatorname*{Sup}_{N(P)} \frac{(|z'|+1)^{-q'}\ (|z''|+1)^{-q''}}{(|z|+1)^{q-B}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left[\ (a'+\varepsilon')|y'|^{\frac{1}{\gamma}} + \sum_{i=2}^{t} (a_i+\varepsilon''_i)\ |\ y^i|^{\frac{1}{\beta_i}}\right]}{\exp\left[\ (a^1+\delta')\,|y'|^{\frac{1}{\gamma}} + \sum_{i=2}^{t} (a_i+\delta_i)\ |\ y^i|^{\frac{1}{\beta_i}}\right]} \leq$$

$$\leq\ C_2\|\varphi\|^{q'}_{\check{I}'}\ \|\ \psi\ \|\ ^{q''}_{\check{I}''}\ \sup_{N(P)}\ (|\ z''\ |\ +1)^{-q''+B-q+\frac{1}{\beta}\ \left(-\frac{q'}{a}-q'+\frac{B-q}{a}+B-q\right)}$$

où nous avons mis $1/\beta = 1/\beta_2 + 1/\beta_3 + \dots + 1/\beta_t$. Prenons q' entier et arbitraire et q'' le plus petit entier qui satisfait l'inégalité

$$(3.8) \qquad q'' \geq -q + B + 1/\beta\,(-q'/a - q' + (B-q)/a + B - q)$$

De (3.7) nous obtenons ainsi

$$(3.9) \qquad |(u\,,\varphi \times \psi)| \leq C_3\ \|\varphi\|q^{q'}_{\check{I}'}\ \|\psi\|^{q''}_{\check{I}''}$$

Soit $\eta_m\ R^1$ arbitraire et j un nombre entier, également arbitraire. Soit $\eta' = (0\,,\dots,\ 0\,,\ \eta_m) \in R^m$. En substituant $\varphi = \delta^j\,(\xi'-\eta')$ (où δ^j est la dérivée d'ordre j de la mesure Dirac) de la formule de représentation exponentielle des solutions et en supposant, pour l'instant que l'inégalité

$$(3.10)\qquad |\tilde{\psi}\,(z'')| \leq C_4 \exp(-\,\delta'' \sum_{i=2}^{t} |\,x^i\,|^{1/\beta_i} + \delta'' \sum_{i=2}^{t} |y^i|^{1/\beta_i}\,,$$

est satisfaite, où $\tilde{\psi}$ est la transformée Fourier de ψ et δ'' un nombre positif quelconque, nous obtenons :

$$(3.11)\qquad |D^j{}_{\xi'}\,(u\,,\psi)_{\xi''}\,|\,\underset{\xi_m=\eta_m}{\xi^1=0}| \leq C_5 \sup_{N(P)} (|z| + 1)^{B-q}\,(|z_m| + |z| + 1)^j$$

$$\exp[\,|y_m||\eta_m| - (a^1 + \delta')\,|y'|^{1/\gamma}\,| - \delta'' \sum_{i=2}^{t} (a_i + \delta_i - \delta'')|y^i|^{1/\beta_i}$$

où $\big((f\,,\psi)\;\xi''\,,\varphi\big) = (f\,,\varphi\times\psi)$.

En utilisant de nouveau (3.6) et en prenant $\delta'' \leq \delta_i$ $(i = 2\,,\,\ldots\,,\,t)$ nous obtenons

$$(3.12)\qquad |D^j{}_{\xi_m}\,(u\,,\psi)|_{\xi'}\;|\,\underset{\xi_m=\eta_m}{\xi^1=0}| \leq C_6 \sup\,(|z|\;+1)^{B-q}\,(|z_m| + |z''| + 1)^j$$

$$\exp(-\,\delta_1'\,|z^1|^a - \delta_2'|z_m|\; - \delta_3'|z''|)$$

où δ_1' , δ_2' , δ_3' sont des constantes positives.

De (3.12) il résulte (cf. (9)) que $(u\,,\psi)_{\xi''/L_1} = 0$ pour toute fonction ψ satisfaisant (3.10). On termine la démonstration du théorème en éliminant la condition supplémentaire (3.10), exactement de la même manière que dans (9).

Nous donnerons maintenant un théorème d'unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs partiellement semi-elliptiques en ξ'.

Théorème 3. Soit $P(D)$ un opérateur partiellement semi-elliptique en ξ', sa partie semi-elliptique étant définie par les nombres $p_1^0 \leq p_2^0 \leq \ldots \leq p_m^0$. Si p_0 (donné par (2.9)) est tel que $p_0 > 1$, toute solution de distribution de l'équation $P(D)u = 0$ qui s'annule avec toutes ses dérivées sur L et qui appartient à l'espace $\mathcal{E}_I^{q}{}^*$, est identiquement nulle.

Nous avons noté ci-dessus par q un nombre entier quelconque et par I^*

$$(3.13)\qquad I^* = I^*(\xi) = I_1'(\xi_1)\cdot I_2'(\xi_2)\ldots I_m'(\xi_m)\cdot I''(\xi'')$$

où

$$I_1'(\xi_1) = \exp\left(A_1 \, |\xi_1|^{1/(1-b\,)}\right) \tag{3.14}$$

$$I_i'(\xi_i) = \begin{cases} \exp\left(A_i |\xi_i|^{1/(1-b_i)}\right) & \text{si } p_i^0 = p_1^0 \\ \exp\left(A_i |\xi_i|^{p_i^0/(p_i^0-p_1^0)}\right) & \text{si } p_i^0 \neq p_1^0 \end{cases} \tag{3.15}$$

pour $i = 2, \dots, m$ et

$$I''(\xi'') = \exp\left(A'' \, |\xi''|^{p_0/(p_0-1)}\right) \tag{3.16}$$

$A_1, \dots, A_m, A''$ sont des constantes positives et b_i des nombres arbitraires tels que $0 < b_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Démonstration. Nous procéderons par récurrence. Poson $r = m$ dans le théorème 1. Du (2.8) il résulte :

$$|x^1|^a + |x_m| \le C\left(1 + y' + |z''|^{p_0 \, p_1^0/p_r^0}\right) \quad (\forall)\, z \in N(P) \tag{3.17}$$

L'inégalité (3.6) est donc vérifiée sur $N(P)$ avec $a = p_1^0/p_m^0$, γ un nombre arbitraire tel que $0 < \gamma < 1$, $k_2 = n - m$, $z^2 = z''$ et

$$\beta_2 = \begin{cases} p_m^0/p_0 p_1^0 & \text{si} \quad p_0\, p_1^0/p_m^0 > 1 \\ \text{un nombre arbitraire appartenant à l'intervalle (0,1) si} \\ p^0\, p_1^0/p_m^0 \le 1 \end{cases}$$

Choisissons tel que

$$1 > \gamma \ge \begin{cases} \max b_i & \text{si } p_i^0 = p_1^0 \\ \max p_1^0/p_i^0 & \text{si } p_i^0 > p_1^0 \end{cases}$$

et, si $p_0 p_1^0/p_m^0 \le 1$, nous choisissons aussi β_2 tel que $1 > \beta_2 \ge 1/p_0$.
Nous avons maintenant :

$$I_1'(\xi_1)\, I_2'(\xi_2) \dots I_m'(\xi_m) \le I^1(\xi^1) \dots I^m(\xi^m)$$

$$I''(\xi'') \le I''^j(\xi^j)$$

d'où

$$I^*(\xi) \leq I(\xi) \tag{3.18}$$

De (3.18) il résulte que $\mathcal{E}^q_{I^*} \subset \mathcal{E}^q_I$ ce qui entraîne que notre solution est $u \in \mathcal{E}^q_I$. Les conditions du théorème 2 sont donc satisfaites, d'où la conclusion que $D^i_{\xi^1} u|_{L_1} = 0$, pour tout i.

Supposons que $D^i_{\xi\,1r} u|_{L_{m-r}} = 0$ où L_{m-r} est le sous-espace linéaire de R^n dont les points ont les coordonnées $(0, \dots, 0, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$

Posons dans le théorème 2 : $x^1 = x^{1r}$, $x_m = x_r$, $z^2 = z_{r+1}$, $z^3 = z_{r+2}$, $\dots$, $z^{m-r+1} = z_m$, $z^{m-r-2} = z''$ et

$$\beta_2 = p_r^0/p_{r+1}^0\,, \quad \beta_3 = p_r^0/p_{r+2}^0\,, \dots, \quad \beta_{m-(r-1)} = p_r^0/p_m^0\,,$$

$$\beta_{m-r} \begin{cases} = p_0^r/p_0 p_1^0 & \text{si} \quad p_0\, p_1^0/p_r^0 > 1 \\ \text{un nombre arbitraire appartenant à } (0{,}1) & \text{si} \quad p_1^0 p_0/p_r^0 \leq 1 \end{cases}$$

$a = p_1^0/p_r^0$ et γ un nombre arbitraire appartenant à $(0, 1)$.

Si nous choisissons γ et β_{m-r} de la même manière que plus haut, nous arrivons dans ce cas aussi à (3.18). Du théorème 2 il résulte que $D^i{}_{\xi 1r}\, u|_{L_{m-r+1}} = 0$ où L_{m-r+1} est l'espace des points $(0, \dots, 0, \xi_r, \dots, \xi_n)$. Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire 1. Toute solution indéfiniment différentiable qui s'annule sur L, ainsi que toutes ses dérivées par rapport à ξ', et qui satisfait l'inégalité

$$|u(\xi)| \leq C \exp[A(|\xi_1|^{b_1} + |\xi_2|^{p_2^0/(p_2^0-p_1^0)} + \dots + |\xi_m|^{p_m^0/(p_m^0-p_1^0)} + \\ + |\xi''|^{p_0/(p_0-1)} \tag{3.20}$$

où $b_1 > 1$, est identiquement nulle.

4 - Théorème de non-unicité du problème de Cauchy pour opérateurs partiellement semi-elliptiques.

Dans ce paragraphe nous montrerons que le théorème 3 est le meilleur au sens de Thichonov-Täklind. C'est-à-dire nous démontrerons les théorèmes suivants :

THÉORÈME 4. Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe une solution de l'équation partiellement semi-elliptique $P(D)\ u = 0$ appartenant à C^∞ et s'annulant avec toutes ses dérivées par rapport à ξ' sur L, qui satisfait l'inégalité

$$(4.1)\qquad |u(\xi)| \leq C \exp\left[A(|\xi_1| + |\xi_k|^{p_k^0/(p_k^0-p_1^0)+\varepsilon})\right],\ 2 \leq k \leq m$$

où k est tel que $p_1^0 < p_k^0$,

mais qui n'est pas identiquement nulle.

THÉORÈME 5. Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe une solution non-nulle de l'équation partiellement semi-elliptique $P(D)\ u = 0$ appartenant à C^∞ et s'annulant avec toutes ses dérivées par rapport à ξ', sur L, et qui satisfait l'inégalité

$$(4.2)\qquad |u(\xi)| \leq C \ \exp\ \left[A(|\xi_1| + |\xi_2|^{p_2^0/(p_2^0-p_1^0)} + \ldots + \right.$$
$$\left. + |\xi_m|^{p_m^0/(p_m^0-p_1^0)} + |\xi''|^{p^0/(p_0-1)+\varepsilon})\right]$$

si $p_1^0 < p_2^0$ (s' il existe des i pous lesquels $p_1^0 = p_i^0$, les exposants de ces $|\xi_i|$ dans (4.2) doivent être remplacés par 1), mais qui n'est pas identiquement nulle.

A et C sont des constantes positives et on a supposé $p_0 > 1$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. On démontre le théorème exactement de la même manière que le théorème 4 de (11).

Avant de démontrer le théorème 5, nous rappellerons les résultats suivants :

LEMME 2 (*Zolotareff* (10). Soit l'équation

$$(4.3)\qquad \lambda^n + P_1(s)\,\lambda^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(s)\,\lambda + P_n(s) = 0$$

où $P_j(s)$ sont des polynôme de degrés M_j. Notons par $M = \max M_j$, par p_r — l'ordre de croissance de la racine $\lambda_r(s)$, $1/q_i$ — l'ordre de croissance de la racine $s_i(\lambda)$ et, finalement, par $p' = \max\limits_{1 \leq r \leq n} p_r$, $1/q' = \min\limits_{1 \leq i \leq M} 1/q_i$. Alors on a

$$(4.4)\qquad p' = q'.$$

Formule de Borok [1]. Soit $P(\xi)$ un polynome de la forme

$$(4.5)\qquad \xi_1^0 + \sum_{j=1} P_j\,(\xi'')\,\xi_1^{p-j} \qquad \text{où } p = \deg P$$

et soit

$$(4.6)\qquad p_0 = \max_{1\leq j\leq p} \deg P_j/j$$

Alors l'inégalité

$$(4.7)\qquad |z_1| \leq C\,(|z''|^{p_0} + 1)$$

est satisfaite pour tout $z \in N(P)$ et p_0 est le plus petit nombre pour lequel (4.7) est vérifié (on dit que p_0 est « l'ordre réduit » de l'équation $P(\xi) = 0$).

Démonstration du théorème 5. Supposons $p_1^0 < p_2^0$. Notons pour chaque j :

$$(4.8)\qquad a_j = a_2^j/p_2^0 + a_3^j/p_3^0 + \ldots + a_m^j/p_m^0$$

$$(4.9)\qquad A_j = p_1^0\,|a^j : p_0|.$$

Parmi tous les polynômes $P_j\,(\xi'')$ pour lesquels l'égalité

$$(4.10)\qquad p_0 = \frac{p_j}{p_1^0(1 - a_1^j/p_1^0 - \ldots - a_m^j/p_m^0)} = p_j/(p_1^0 - A_j)$$

est satisfaite, choisissons seulement ceux pour lesquels on a p_j/a_j maximum. Parmi ces polynôme, choisissons ceux pour lesquels le degré p_j est maximum. Soit $P_{j_1}\,(\xi''), \ldots, P_{j_k}\,(\xi'')$ l'ensemble ainsi défini. Evidemment on a $p_{j_1} = p_{j_2} = \ldots = p_{j_k}$. Soit

$$(4.11)\qquad S\,(\xi) = P_{j_1}\,(\xi'')\,\xi'^{\alpha j_1} + \ldots + P_{j_k}\,(\xi'')\,\xi'^{\alpha j_k}$$

Choisissons un $a \in R^m$ tel que $\deg S\,(a, \xi'') = p_{j_1}$ et un $\xi^0 \in R^{n-m}$ tel que $\deg S(a\,, v\,\xi^0) = p_{j_1}$.

Notons par

$$J = \{ j \in [1\,,l], j \text{ étant un nombre entier et } 0 < (A_{j_1} - A_j)/(a_{j_1} - a_j) < \infty \} \tag{4.12}$$

Soit δ un nombre rationnel et strictement positif satisfaisant les conditions :

$$\delta < p_1 \tag{4.13}$$

$$\delta < \min_{j\,J} (A_{j_1} - A_j)/(a_{j_1} - a_j) \tag{4.14}$$

et tel que pour tout indice j, $j \in [1\,,l]$ pour lequel $p_j/(p_1^0 - A_j) < p_0 = p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$ on a

$$p_j/(p_1^0 - A_j + \delta\, a_j) \le p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1} + \delta\, a_{j_1}). \tag{4.15}$$

Considérons maintenant l'équation

$$P\left(a_1 s\,,\, a_2 s^{(p_1^0-\delta)/p_2^0}\,, \dots\,,\, a_m s^{(p_1^0-\delta)/p_m^0}\,,\, v\,\xi_{m+1}^0\,, \dots, v\,\xi_n^0\right) = 0 \tag{4.16}$$

qui, en appliquant (2.8), s'écrit aussi

$$P_0\left(a_1 s\,,\, a_2 s^{(p_1^0-\delta)/p_2^0}\,, \dots\,,\, a_m s^{(p_1^0-\delta)/p_m^0}\right) + \sum_{j=1}^{l} P_j(v\,\xi^0)\; a^{\alpha j}\; s^{A_j-\delta a_j} \tag{4.17}$$

Soit d tel que les nombres

$$\left((p_1^0 - \delta)/p_2^0\right)\cdot d\,,\; \left((p_1^0 - \delta)/p_3^0\right)\cdot d\,, \dots,\; \left((p_1^0 - \delta)/p_m^0\right)\cdot d \tag{4.18}$$

soient tous des nombres entiers. En faisant dans (4.17) le changement de variable $s = \lambda^d$, nous obtenons

$$P_0(a_1 \lambda^d\,,\, a_2\,\lambda^{((p_1^0-\delta)/p_2^0)d}\,, \dots,\; a_m{}^{((p_1^0-\delta)/p_m^0)d}) + \sum_{j=1}^{l} P_j(v\,\xi^0)\; a^{\alpha j}\; \lambda^{d(A_j-\delta a_j)} = 0 \tag{4.19}$$

Pour déterminer la solution $v(\lambda)$ ayant le plus petit ordre de croissance, nous devrons, conformément au Lemme 2, déterminer d'abord la solution $\lambda(v)$ ayant l'ordre de croissance le plus grand. Mais, cet ordre maximum est « l'ordre réduit » même que nous pouvons calculer à l'aide de la formule de Borok.

Soit un terme quelconque du premier membre de l'équation (4.19). Il sera de la forme

$$(4.20) \qquad a_\alpha\, a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}\, \lambda^{\alpha_1 d}\, \lambda^{((p_1^0-\delta)/p_2^0)d\alpha_2} \ldots \lambda^{((p_1^0-\delta)/p_m^0)d\alpha_m}$$

où α a la propriété

$$(4.21) \qquad \alpha_1/p_1^0 + \alpha_2/p_2^0 + \ldots + \alpha_m/p_m^0 \leq 1\,.$$

De (4.20) et (4.21) l'on voit que la puissance maximum de λ dans le premier terme de l'équation sera obtenue lorsque $\alpha_2/p_2^0 + \ldots + \alpha_m/p_m^0 = 0$ et $\alpha_1/p_1^0 = 1$. Par conséquent la puissance maximum de λ en P_0 est dp_1^0.

Vu la relation $P_\alpha \langle\langle P_0$, en utilisant (2.18), il résulte que dans (2.8), les α_j ont la propriété

$$(4.22) \qquad \alpha_1^j/p_1^0 + \ldots + \alpha_m^j/p_m^0 < 1\,.$$

De (4.22) il résulte que dans les termes de 1 à l de l'équation (4.20) les puissances de λ sont plus petites que dp_1^0.

Dans l'équation (4.20) on a aussi le terme

$$(4.23) \qquad S(a_1\, \lambda^d\,,\, a_2\, \lambda^{((p_1^0-\delta)/p_2^0)d}\,, \ldots ,\, a_m^{((p_1^0-\delta)/p_n^0)d}\,,\; v\, \xi^0) = \\ = \lambda^{d(A_{j_1}-a_{j_1})}\, S(a_1\, v\, \xi^0).$$

Nous montrerons que dans l'équation il n'apparaît aucun autre terme avec lequel le terme (4.23) pourrait se réduire.

En fait, soit un monôme quelconque de l'équation qui ne figure pas dans S :

$$(4.24) \qquad b\, \xi'^{\alpha j}\, \xi''^{\beta j} = b\, a^{\alpha j}\, \xi_0^{\beta j}\, s^{d(A_j-\delta\, a_j)}\, v^{\,|\beta j|}\,.$$

Pour que ce monôme et le terme de degré p_j en v de S se réduisent, il faudrait que

$$(4.25) \qquad A_j - \delta\, a_j = A_{j_1} - \delta\, a_{j_1}\,.$$

Si $j \in J$, (4.25) ne peut pas être vraie à cause de (4.14).

Si $j \notin J$, il y a deux possibilités :

a) $a_j = a_{j_1}$; dans ce cas, de (4.25) il résulte $A_j = A_{j_1}$. Mais $p_j/(p_1^0 - A_j) \leq p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$ entraîne $p_j \leq p_{j_1}$ (p_j étant le degré du polynôme P_j auquel appartient le monôme (4.24) ; d'où $|\beta^j| \leq p_j$.

Si $|\beta^j| = p_{j_1}$ alors $p_j = p_{j_1}$ et $p_j/a_j = p_{j_1}/a_j$, donc P_j figurerait en S ce qui contredit (4.24).

Si $|\beta^j| < p_{j_1}$, (4.23) pourrait se réduire, tout au plus avec un monôme de S dont la puissance en v est strictement plus petite que p_{j_1} .

b) $a_j \neq a_{j_1}$; mais puisque $j \notin J$, nous avons $(A_{j_1} - A_j)/(a_{j_1} - - a_j) < 0$ et donc, d'après (4.25), $\delta < 0$. Ce qui est impossible.

Par conséquent, le terme (4.23) figure effectivement en (4.19).

En appliquant maintenant la formule de Borok, nous montrerons que « l'ordre réduit » de l'équation (4.19) est

$$p_0' = \frac{p_{j_1}}{d(p_1^0 - A_j + \delta\, a_j)} . \tag{4.26}$$

Pour ceci, considérons de nouveau le monôme (4.24). Nous montrerons que

$$\frac{p_j}{p_1^0 - A_j + \delta\, a_j} \leq \frac{p_{j_1}}{p_1^0 - A_{j_1} + \delta\, a_{j_1}} . \tag{4.27}$$

Mais $p_j/(p_1^0 - A_j) \leq p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$.

Si on a $p_j/(p_1^0 - A_j) = p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$ il résulte (moyennant le choix de P_{j_1}) $p_{j_1}/a_{j_1} \geq p_j/a_j$ et on a donc (4.27).

Si $p_j/(p_1^0 - A_j) < p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$, d'après (4.15) on a (4.27).

Du Lemme 2 il résulte qu'il existe une solution analytique $v(\lambda)$ de cette équation telle que

$$|v(\lambda)| \leq C\, |\lambda|^{\frac{1}{dp_0'}} \tag{4.28}$$

lorsque $|\lambda|$ est suffisamment grand. Par conséquent il existe une solution analytique de cette équation telle que

$$|v(s)| \leq C\, |s|^{1/dp_0'} \tag{4.29}$$

lorsque $|s|$ est suffisamment grand.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. De $p_0 > 1$ on a

$$0 < \frac{p_0 + \varepsilon(p_0 - 1)}{p_0[1 + \varepsilon(p_0 - 1)]} < 1 .$$

Posons $\delta_1 = p_0 - p'_0 d$. D'après (4.25) l'on voit que $\delta_1 \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. On peut donc choisir δ tel que

$$0 < \delta_2 = \frac{p_0 + \varepsilon(p_0 - 1)}{(p_0 - \delta_1)[1 + \varepsilon(p_0 - 1)]} < 1 . \tag{4.30}$$

Soit également un nombre ϱ tel que

$$\max\left(\delta_2, 1 - \frac{\delta}{p_1^0}\right) < \varrho < 1 . \tag{4.31}$$

Maintenant on peut construire la « solution nulle » (Hörmander |8|) de l'équation $P(D)u = 0$

$$u(\xi) = \int_{i\tau+\infty}^{i\tau-\infty} \exp \{ i[a_1 \xi_1 s + a_2 \xi_2 s^{(p_1^0 - \delta/p_2^0)} + \dots \tag{4.32}$$

$$\dots + a_m \xi_m s^{(p_1^0-\delta)/p_m^0} + v(s)(\xi'', \xi^0) \quad e^{-(s/i)^\varrho} ds$$

où τ est suffisamment grand.

Conformément à |8| pag. 122, il résulte que u satisfait toutes les hypothèses du théorème, sauf (4.2). Pour démontrer cette inégalité nous utiliserons l'inégalité

$$Re \{ i[a_1 \xi_1 s + a_2 \xi_2 s^{(p_1^0-\delta)/p_2^0} + \dots + a_m \xi_m s^{(p_1^0-\delta)/p_m^0} + \tag{4.33}$$

$$+ v(s)(\xi'', \xi^0)] - (s/i)^\varrho \} \leq - \tau \xi_1 a_1 + C_1(|\xi_2|(s)^{p_1^0-\delta/p_1^0} + \dots +$$

$$+ |\xi_m||s|^{(p_1^0-\delta)/p_m^0} + |\xi''||o|^{1/(p_0+\delta_1)}) - |s|^\varrho \quad \cos \frac{\pi\varrho}{2}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) et (4.33) on obtient (4.2).