RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO BOVE

Alcuni risultati di teoria spettrale per l'operatore di Laplace in regioni non limitate con frontiera non regolare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 197-215

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__197_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Alcuni risultati di teoria spettrale per l'operatore di Laplace in regioni non limitate con frontiera non regolare

ANTONIO BOVE (*)

SUMMARY - Some theorems are proved about the canonical diagonalization of the Laplace operator in unbounded regions, in 2 and 3 dimensions, the boundary of which presents corner points.

Introdnzione

In [1] G. Bottaro ha studiato lo spettro dell'operatore di Laplace in regioni non limitate, quali R^n, il semispazio, la regione esterna ad una sfera di raggio assegnato. In tale lavoro l'autore si è servito di un metodo dovuto a Gel'fand, Kostyučenko e Gårding [2], che permette, in un certo senso, di estendere agli operatori non limitati con spettro continuo tra spazi di Hilbert talune considerazioni che si possono fare per operatori dotati di spettro discreto: in particolare questo metodo fornisce un analogo dello sviluppo di un vettore in serie di autovettori dell'operatore assegnato.

In questo lavoro si vuole estendere l'esame del Bottaro per l'operatore di Laplace a certi casi in cui la frontiera della regione non sia regolare, e presenti punti angolosi.

Nel primo paragrafo si studia il caso cosiddetto retto in generale: il metodo è un elementare adattamento di quello seguito per regioni del tipo del semispazio.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

Nel secondo paragrafo si studia il caso dell'angolo piano e si utilizzano certi risultati dovuti a P. Grisvard [7] per l'operatore di Laplace nel poligono e il suo indice.

Nel terzo paragrafo si studia il caso di una regione di tipo piramide triangolare infinita.

1. - Il caso retto.

Siano $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu \leq n \;,\; 1 \leq \nu \leq n$, numeri naturali e

$$\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu} = \{ x \, ; x \in \mathbb{R}^n \, , x_{i_k} > 0 \;,\; 1 \leq K \leq \nu \}$$

$\partial \wedge_{i_1, \ldots, i_\nu}$ = frontiera di $\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu}$

In $L^2(\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu})$ consideriamo l'operatore $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ con dominio $H^2(\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu}) \cap H_0^1(\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu})$. Siano $j_1, \ldots, j_{n-\nu}$ quelli, degli indici 1, 2 ,..., n, distinti da $i_1, \ldots, i_\nu$. Conveniamo di porre $x = (x'_\nu, x''_{n-\nu})$, ove $x'_\nu = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_\nu})$, $x''_\nu = (x_{j1}, \ldots, x_{jn-\nu})$. Sia $U : L^2(\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu}) \to L^2(R^n)$ definita da

$$U(\varphi)(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}_+^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}} e^{i\langle x''_{n-\nu}, \xi''_{n-\nu}\rangle} \sin \xi_{i_1} x_{i_1} \ldots \sin \xi_{i_\nu} x_{i_\nu} \, \varphi(x'_\nu, x''_{n-\nu}) \, dx'_\nu \, dx''_{n-\nu}$$

ovviamente si ha che, se $\varphi \in \mathfrak{D}(\Delta) = H^2(\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu}) \cap H_0^1(\wedge_{i_1, \ldots, i_\nu})$,

$\big(U(\Delta\varphi)\big)(\xi) = - \|\xi\|^2 (U\varphi)(\xi) \quad , \quad \|\xi\|^2 = \|\xi'_\nu\|^2 + \|\xi''_{n-\nu}\|^2$ e quindi si

può ragionare come in [1].

2. - Il caso dell'angolo piano

Sia $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Poniamo

$\wedge = \{(x, y) \, ; x > 0 \, , 0 < y < (\text{tang}\, \alpha)\, x\}$

$\sigma_1 = \{(x, 0) \, ; \, x \geq 0\} \, , \sigma_2 = \{\big(x, (\text{tang}\, \alpha)\, x\big) \, ; x \geq 0\}$

$\partial \wedge = \sigma_1 \cup \sigma_2$

DEFINIZIONE 2.1 *Sia* $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. *Definiamo*

$L^2_\gamma(\mathbb{R}^+) = \{\varphi;\ \varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbf{C},\ \varphi$ *misurabile e tale che* $\|x^\gamma \varphi(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} < +\infty\}$

PROPOSIZIONE 2.2. $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ *è denso in* $L^2_\gamma(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ \gamma \geq 0$

Dimostrazione. Sia $f \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^+)$. Poniamo

$$\left(P_{\gamma+\frac{1}{2}} f\right)(x) = f(e^x)\, e^{\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)x}$$

Si ha $P_{\gamma+\frac{1}{2}} f: \mathbb{R} \to \mathbf{C}$ e $\|P_{\gamma+\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^+)}$.

$P_{\gamma+\frac{1}{2}}: L^2_\gamma(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R})$ è un isomorfismo algebrico e topologico.

Risulta

$$(P^{-1}_{\gamma+\frac{1}{2}} \varphi)(\varrho) = \varrho^{\left(-\gamma+\frac{1}{2}\right)} \varphi(\log\varrho)\ ,\quad \varrho \in \mathbb{R}^+$$

Ovviamente $P_{\gamma+\frac{1}{2}} \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, e analogamente per $P^{-1}_{\gamma+\frac{1}{2}}$. Con ciò l'affermazione è provata.

DEFINIZIONE 2.3 *Sia* $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbf{C}$, $\nu \in \mathbb{R}^+$. *Poniamo* $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^+$

$$B_\nu(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x)\, J_\nu(\xi x)\, x\, dx$$

supposto che l'integrale esista. Qui $J_\nu(\,.\,)$ *denota la funzione di Bessel di prima specie di ordine* $\nu > 0$.

Si ha il

TEOREMA 2.4. ([3], p. 456). *Sia* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$

Ha senso allora considerare

$$B_\nu(\varphi)(\xi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, J_\nu(\xi x)\, x\, dx$$

(*infatti* $|J_\nu(x)| \leq 1$, $\forall\ \nu \in \mathbb{R}^+$, $\forall\ x \geq 0$).

Vale la formula di inversione seguente:

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} B_\nu(\varphi)(\xi)\, J_\nu(x\xi)\, \xi\, d\xi \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^+$$

TEOREMA 2.5. *La trasformazione di Bessel si può prolungare in una isometria su* $L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$; *ossia*

$$f \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \Rightarrow B_\nu(f) \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$$

e

$$\|f\|_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)} = \|B_\nu(f)\|_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Poniamo

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{d}{d\xi} \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{\xi x} J_\nu(t) \sqrt{t}\, dt \Big) \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,. \tag{2.1}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi} \sqrt{t}\, \hat{\varphi}(t)\, dt &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{\xi x} J_\nu(t) \sqrt{t}\, dt \Big) \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{\xi} J_\nu(xu) \sqrt{xu}\; x\, du \Big) \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \\ &= \int_0^{+\infty} x \Big(\int_0^{\xi} J_\nu(xu) \sqrt{u}\, du \Big) \varphi(x)\, dx\,.\end{aligned}$$

Ora $(x, u) \longmapsto x\sqrt{u}\, J_\nu(xu)\, \varphi(x)$ è sommabile su $\mathbb{R}^+ \times [0, \xi]$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^+$, quindi per il teorema di Fubini si ha

$$\int_0^\xi \sqrt{t}\,\hat{\varphi}(t)\, dt = \int_0^\xi \Big(\int_0^{+\infty} J_\nu(xu)\, x\varphi(x)\, dx \Big) \sqrt{u}\, du$$

Derivando entrambi i membri dell'uguaglianza rispetto a ξ si ottiene :

$$\sqrt{\xi}\,\hat{\varphi}(\xi) = \sqrt{\xi} \int_0^{+\infty} J_\nu(x\xi)\, x\varphi(x)\, dx = \sqrt{\xi}\, B_\nu(\varphi)(\xi),$$

ossia $\hat{\varphi}(\xi) = B_\nu(\varphi)(\xi), \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Proviamo ora che la trasformazione (2.1), che su $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ coincide con la trasformazione di Bessel ordinaria, definisce funzioni di $L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$ se $\varphi \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$, e che tale trasformazione è isometrica ([4], cap. 8).

Sia $f \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$. Poniamo

$$f_*(t) = \sqrt{t}\, f(t).$$

Allora $f_* \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e quindi $\mathrm{M}(f_*)\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L^2(\mathbb{R})$.

Con $M(\cdot)$ si è indicata la trasformata di Mellin.

$$M(f_*)(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} f_*(t)\, dt \ , \ f \in L^2_{Res+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+),$$

che ammette l'inversa

$$f_*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Res-i\infty}^{Res+i\infty} M(f_*)(s)\, t^{-s}\, ds$$

ove entrambi gli integrali si intendono convergere nel senso di L^2.

Si ha

$$M\,(J_\nu)\,(s) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-s} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{s}{2}\right)\left(\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} - \frac{s}{2}\right)\right)^{-1}, \text{ per}$$

$-\nu < Re\, s < \dfrac{3}{2}$.

(Si veda [5], p. 93), quindi

$$M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} + it\right) = M\,(J_\nu)\,(1 + it) =$$

$$= 2^{it}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} + i\,\frac{t}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - i\,\frac{t}{2}\right)\right]^{-1}$$

Poichè $\dfrac{\nu}{2} + \dfrac{1}{2} > 0$, risulta

$$\left| M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = 1.$$

Inoltre, poichè $f_* \in L^2\,(\mathbb{R}^+)$, se ne conclude che

$$M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} + it\right) M\,(f_*)\left(1 - \frac{1}{2} - it\right) =$$

$$= M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} + it\right) M\,(f_*)\left(\frac{1}{2} - it\right) \in L^2\,(\mathbb{R}).$$

Sia g_* l'antitrasformata di Mellin di questa funzione:

$$g_*\,(x) = M^{-1}\left(M\left(J_\nu(t)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} + it\right) M\,(f_*)\left(\frac{1}{2} - it\right)\right)(x) =$$

$$= L^2 - \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)(s)\, M\,(f_*)\,(1 - s)\, x^{-s}\, ds\ .$$

Risulta $g_* \in L^2\,(\mathbb{R}^+)$. Conveniamo di indicare con H la funzione di Heavyside, così definita:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & se\ t > 0 \\ 0 & se\ t < 0 \end{cases}.$$

Per la relazione di Parseval relativa alla trasformazione di Mellin si ha ([4] p. 95).

$$\int_0^x g_*(t)\, dt = \int_0^{+\infty} g_*(t)\, H(x-t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)(s)\, M(f_*)(1-s)\, \frac{x^{1-s}}{1-s}\, ds.$$

Ora poichè $\left(\frac{1}{2} - it\right)^{-1} M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L^2(\mathbb{R})$, posto

$$I_\nu(x) = M^{-1}\left(\frac{M\left(J_\nu(t)\sqrt{\tau}\right)\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2} - it}\right)(x),$$

si ha che $I_\nu(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Di più risulta che $I_\nu(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x J_\nu(t)\sqrt{t}\, dt$

(le relazioni sono sempre vere quasi dappertutto). Infatti $J_\nu(t)\sqrt{t} \in W^{-1}_{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ ($W^\nu_s(\mathbb{R}^+)$ è il completamento di $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ rispetto alla norma $\|u\|^2_{W^\nu_s(\mathbb{R}^+)} = \sum_{i=0}^{\nu} \int_0^{+\infty} \varrho^{2(s+i-\nu-1/2)} |u^{(i)}(\varrho)|^2 d\varrho$, [6]) e $I_\nu(x) \in L^2(\mathbb{R}^+) = W^0_{1/2}(\mathbb{R}^+)$, quindi, come si vede prendendo la trasformata di Mellin di ambo i membri, vale la relazione

$$(1 + x\, D_x)\, I_\nu(x) = J_\nu(x)\sqrt{x}.$$

Da quest'ultima, osservando che $I_\nu \in L^2(\mathbb{R}^+)$, si conclude nel modo desiderato.

Dalla relazione di Parseval si ha allora:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}(1-s)^{-1}\, M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\,\right)(s)\, M(f_*)(1-s)\, x^{1-s}\, ds =$$

$$= \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{xy} J_\nu(t)\sqrt{t}\, dt\Big) f_*(y)\frac{dy}{y}$$

(si veda [4], p. 54). Si può allora ottenere che

$$g(x) = x^{-1/2} g_*(x) = x^{-1/2}\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{xy} J_\nu(t)\sqrt{t}\, dt\Big) f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{y}} \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+).$$

Inoltre

$$\|g\|^2_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)} = \|g_*\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\|M\left(J_\nu(\tau)\sqrt{\tau}\,\right)\left(\frac{1}{2}+it\right) M(f_*)\left(\frac{1}{2}-it\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\|M(f_*)\left(\frac{1}{2}-it\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_*\|^2_{L^2(\;+)} = \|f\|^2_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)}.$$

e quindi si ha l'isometria. Con ciò il teorema è provato.

Prendiamo come dominio di Δ in $L^2(\wedge)$ l'insieme $H^2(\wedge) \cap H^1_0(\wedge)$.

DEFINIZIONE 2.6. *Per ogni* $f \in L^2(\wedge)$ *indichiamo con* $f_\pi : \mathbb{R}^+ \times \times\,]0, a[\to \mathbf{C}$ *la funzione così definita*: $f_\pi(\varrho, \theta) = f(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta)$. *Indichiamo anche con* π *l'applicazione*: $L^2(\wedge) \to L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} L^2(0,a)$ *definita da* $\pi : f \mapsto f_\pi$.

DEFINIZIONE 2.7. *Per ogni* $f \in L^2(\wedge)$ *poniamo*

$$T(f)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \sin \frac{k\pi\theta}{a} \, J_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\xi x) \, f_\pi(x, \theta) \, x \, dx \right) d\theta$$

$\xi \in \mathbb{R}^+$, $k \in N$.

Osserviamo che l'integrale sopra scritto è ben definito. Infatti $x \longmapsto f_\pi(x, \theta) \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$ q. d. rispetto a θ, e quindi la sua trasformata di Bessel $\in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$.

TEOREMA 2.8. *Risulta* $T(f) \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} l^2$, $\forall f \in L^2(\wedge)$ *e, di più, vale la relazione*

$$\| T(f) \|_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} l^2} = \| f \|_{L^2(\wedge)}$$

$\big(L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} l^2$ si intende normato con:

$$\| \varphi \|^2_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} l^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} | \varphi(\xi, k) |^2 \, \xi \, d\xi\big).$$

DIMOSTRAZIONE. $f \in L^2(\wedge) \Rightarrow f_\pi \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} L^2(0, a)$.

Allora esiste una successione di funzioni del tipo $\varphi_n(x) \psi_n(\theta)$, $\varphi_n \in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)$, $\psi_n \in L^2(0, a)$, tale che $\varphi_n \psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\pi$ nella topologia di $L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} L^2(0, a)$.

Per densità è sufficiente ragionare su $\varphi_n(x) \psi_n(\theta)$.

Si ha:

$$\| T(\varphi_n \psi_n)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right) \|^2_{L_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} l^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} | T(\varphi_n \psi_n)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right) |^2 \, \xi \, d\xi .$$

Ma $T(\varphi_n \psi_n)\left(\xi, \dfrac{k\pi}{a}\right) = B_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\varphi_n)(\xi) \; \mathfrak{F}_s(\psi_n)\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)$,

ove $\mathfrak{F}_s$ denota la seno-trasformata finita di Fourier.

Per la relazione di Parseval relativa alla trasformazione di Bessel si ha:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \xi \mid T(\varphi_n \psi_n)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right)\mid^2 d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \| \varphi_n \|^2_{L^2{}_{1/2}(\mathbb{R}^+)} \mid \mathfrak{F}_s(\psi_n)\left(\frac{k\pi}{a}\right)\mid^2 =$$

$$= \| \varphi_n \|^2_{L^2{}_{1/2}(\mathrm{R}+)} \ \| \psi_n \|_{L^2(0,\alpha)}$$

e quindi

$$\| T(f) \|_{L^2{}_{1/2}(\mathbb{R}+)\hat{\otimes}\, l^2} = \| f_\pi \|_{L^2{}_{1/2}(\mathbb{R}+)\hat{\otimes}\, L^2(0,\alpha)} = \| f \|_{L^2(\Lambda)} .$$

LEMMA 2.9.

$$C^\infty_* (\wedge) = \{ \varphi ; \varphi \in C^\infty (\overline{\wedge}) , \varphi \mid \partial_\Lambda = 0 , \quad \text{supp } \varphi \textit{ limitato} \}$$

è denso in $H^2(\wedge) \cap H^1_0(\wedge)$ *con la topologia di* $H^2(\wedge)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\{ u ; u \in H^2(\wedge) \cap H^1_0(\wedge) ,\ \text{supp } u \text{ limitato} \}$ è denso in $H^2(\wedge) \cap H^1_0(\wedge)$, basta provare l'affermazione per gli $u \in H^2(\wedge) \cap H^1_0(\wedge)$ con supporto limitato. Sia $v = \Delta u$. Allora $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\ \bar{v} \in C^\infty_*(\wedge)$, $\| v - \bar{v} \|_{L^2(\wedge)} < \varepsilon$.

Sia $\wedge_a = \wedge \cap \{ x ; x \in \mathbb{R}^2 , \| x \| < a \}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

Sia a tale che $\wedge_a \supset \text{supp } u \cup \text{supp. } \bar{v}$.

Sia $b > a + 2$.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = \bar{v} & \textit{in } \wedge_b \\ \bar{u} \mid_{\partial \wedge_b} = o \end{cases}$$

Per [7] si ha che $\bar{u} \in C^\infty_*(\wedge_b) = \{ \varphi ; \varphi \in C^\infty (\overline{\wedge}_b) , \varphi \mid_{\partial\wedge_b} = 0 \}$,

e vale la maggiorazione

$$\| \bar{u} - u \|_{H^2(\wedge_b)} \leq \| \Delta_D^{-1} \bar{v} - \Delta_D^{-1} v \|_{L^2(\wedge_b)} \leq C \| \bar{v} - v \|_{L^2(\wedge_b)} \leq$$

$$\leq C \| \bar{v} - v \|_{L^2(\wedge)} < C\, \varepsilon .$$

Sia $\omega \in C^\infty(\wedge)$ tale che

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{in un intorno di } \wedge_a \\ 0 & \text{in un intorno di } \wedge \setminus \wedge_b . \end{cases}$$

Sia $\bar{u}_0$ il prolungamento di $\bar{u}$ con zero fuori di $\wedge_b$. $\bar{u}_0 \in C(\wedge)$.

$$\| \omega \bar{u}_0 - u \|^2_{H^2(\wedge)} = \| \omega \bar{u} - u \|^2_{H^2(\wedge_a)} + \| \omega \bar{u} - u \|^2_{H^2(\wedge_b \setminus \wedge_a)} +$$

$$+ \| \omega \bar{u}_0 - u \|^2_{H^2(\wedge \setminus \wedge_b)} = \| \bar{u} - u \|^2_{H^2(\wedge_a)} + \| \omega \bar{u} \|^2_{H^2(\wedge_b \setminus \wedge_a)} \leq$$

$$\leq \| \bar{u} - u \|^2_{H^2(\wedge_a)} + C \| \bar{u} \|^2_{H^2(\wedge_b \setminus \wedge_a)} \leq (C+1) \| \bar{u} - u \|^2_{H^2(\wedge_b)} \leq$$

$$\leq (C' + 1)\, \varepsilon^2$$

TEOREMA 2.10. *Sia* $f \in \mathfrak{D}(\Delta)$; *allora si ha*

$$T(\Delta f)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right) = -\xi^2 \, T(f)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right).$$

DIMOSTRAZIONE. $f \in \mathfrak{D}(\Delta) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right) f_\pi(\varrho, \vartheta) \in$
$\in L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes} L^2(0, a) \overset{\pi^*}{\cong} L^2(\wedge)$.

(π^* denota l'aggiunto di π).

Per densità basta supporre $f \in C^\infty_*(\wedge)$.

È sufficiente quindi valutare

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \int_0^{\alpha} \sin \frac{k\pi\theta}{a} \, J_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\xi\varrho)\, \varrho \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f_\pi(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta,$$

ove $f \in C^\infty_*(\wedge)$.

Eseguendo delle integrazioni per parti, tenendo presente che valgono le formule (si veda p. es. [8], p. 360)

$$J_\nu (z) = O\left(\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\right) \qquad \text{per } z \to 0\,,\ \nu \neq -1, -2, \ldots$$

si ottiene che

$$T(\Delta f)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} \int_0^\alpha \int_0^{+\infty} \sin\frac{k\pi\theta}{a} f_\pi(\varrho_1 \theta)\,\varrho\,\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{k^2\pi^2}{a^2\varrho^2}\right) J_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\xi\varrho)\, d\varrho\, d\theta = -\,\xi^2\, T(f)\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right)$$

poichè $J_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\xi\varrho)$ è soluzione dell'equazione differenziale (di Bessel)

$$J''_\nu(\xi x) + \frac{1}{\xi x} J'_\nu(\xi x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2 x^2}\right) J_\nu(\xi x) = 0\,.$$

Si è così provato che la trasformazione T diagonalizza Δ in modo non canonico, e che T è isometrica.

Osservazione. T è unitaria e

$$T^*(f)(x,y) = \pi^*\left(\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty} f\left(\xi, \frac{k\pi}{a}\right) J_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\varrho\,\xi)\,\xi\, d\xi\right)\sin\frac{k\pi\theta}{a}\right)(x,y)$$

ove

$$\pi^*(f)(x\,,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \operatorname{arctang}\frac{y}{x}\right)$$

Cerchiamo di diagonalizzare Δ in modo canonico.

a) Supponiamo $\alpha \in \left]0\,, \frac{\pi}{2}\right[\setminus Q^+$; risulta allora impossibile verificare con $k, k' \in N$ la relazione $k\frac{\pi}{a} = k'\frac{\pi}{a} + 2\,m\,\pi\,,\ \ m \in \mathrm{I}\,.$

Se ne deduce quindi che le coppie $\left(\xi\,,\ \frac{k\pi}{a}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}^+$, $k \in N$, costituiscono un sistema di coordinate di tipo polare per l'insieme

$$A = \left\{ (q_1, q_2) = q \ ; \ \ q_1 = \xi \cos \frac{k\pi}{a} \ , \ \ q_2 = \xi \sin \frac{k\pi}{a} \right\}.$$

Indichiamo con τ l'applicazione

$$\tau\left(f\left(\xi\,,\ \frac{k\pi}{a}\right)\right)(q_1, q_2) = f_\tau\ (q_1, q_2) = f\left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}\,,\right.$$

$$\left.\operatorname{arctang}\frac{q_2}{q_1} + \frac{\pi}{2}\,\big(1 - \operatorname{sgn}(q_1)\big) + \frac{\pi}{2}\,\big(1 + \operatorname{sgn}(q_1)\big)\,\big(1 - \operatorname{sgn}(q_2)\big) + 2l\pi\right)$$

ove l è l'unico intero (positivo) per cui è intero $\frac{a}{\pi}$ arctang $\frac{q_2}{q_1} + 2\,l\,a$.

Allora

$$\tau(T\,(\Delta f))\,(q_1\,, q_2) = -\ |q|^2\,\tau(Tf)\,(q_1\,, q_2)\,, \qquad q = (q_1\,, q_2).$$

Per $t > 0$ sia $A_t = \{\, q\,;\ |q|^2 = t\,,\ q \in A \,\}$.

Sia

$l^2(A_t) = \{\,\varphi\,;\ \ \varphi : A_t \to \mathbf{C}\,,\ \ \|\,\varphi\,\|_{l^2(A_t)} < +\infty\,,$ essendo

$$\|\,\varphi\,\|^2_{l^2(A_t)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\,\left|\,\varphi\left(\sqrt{t}\,\cos\frac{k\pi}{a}\,,\ \ \sqrt{t}\,\sin\frac{k\pi}{a}\right)\right|^2 \Big\}$$

Denotiamo con $<\cdot\,,\,\cdot>_t$ il prodotto scalare in $l^2\,(A_t)$.

Sia $\{\, e_j\,(t)\,;\ j \in N \,\}$ una base ortonormale per $l^2\,(A_t)$.

Poniamo

$$L = \int_{\mathbb{R}^+}^{\oplus} l^2\,(A_t)\,dt$$

($L = \{ \varphi ;\ \mathbb{R}^+ \ni t \longmapsto \varphi(t) \in l^2(A_t) ;\ \varphi_j(t)$ è misurabile $\forall\, j$ e $\| \varphi(t) \|_{l^2(A_t)}$ è misurabile e $\int_{\mathbb{R}+} \| \varphi(t) \|^2_{l^2(A_t)}\, dt < +\infty \}$ ove $\varphi_j(t)$ è il coefficiente di Fourier j-esimo per φ e si identificano due campi vettoriali che coincidono quasi dappertutto)

$$V :\ L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes}\, l^2 \to L$$

sia l'applicazione così definita

$$(Vf)_j(t) = \langle f(\sqrt{t}, \cdot) , e_j(t) \rangle_t$$

Si ha che

$$V^* :\ L \to L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes}\, l^2$$

è data da

$$(V^*)(\xi, k) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j(\xi^2)(k)\, w_j(\xi^2) ,$$

ove la serie converge in $L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes}\, l^2$, w_j il coefficiente di Fourier di w rispetto alla base e_j

Infatti

$$\langle Vf, w \rangle_L = \int_{\mathbb{R}+} \langle (Vf)(t), w(t) \rangle_t\, dt = \int_{\mathbb{R}+} \sum_{j=1}^{\infty} (Vf)_j(t)\, \overline{w_j(t)}\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}+} \sum_{j=1}^{\infty} \langle f(\sqrt{t}, \cdot),\ e_j(t)(\cdot) \rangle_t\, \overline{w_j(t)}\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}+} \langle f(\sqrt{t}, \cdot),\ \sum_{j=1}^{\infty} e_j(t)(\cdot)\ w_j(t) \rangle_t\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}+} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[f(\sqrt{t}, k) \overline{\sum_{j=1}^{\infty} l_j(t)(k)\, w_j(t)} \right] dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}+} \sum_{k=1}^{\infty} f(\xi, k) \overline{\sum_{j=1}^{\infty} e_j(\xi)(k)\ w_j(\xi^2)}\ \xi\, d\xi .$$

Proviamo che V è unitaria. V è isometrica:

$$\|Vf\|_L^2 = \int_{\mathbb{R}^+} <(Vf)(t), (Vf)(t)>_t dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j-i}^{\infty} |<f(\sqrt{t},\cdot), e_j(t)>_t|^2 dt = \int_{\mathbb{R}^+} \|f(\sqrt{t},.)\|^2_{l^2(A_t)} dt =$$

$$= \|f\|^2_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+)\hat{\otimes} l^2}.$$

V è suriettiva:

sia $g \in L$

$$*\Lambda\Lambda)g)_k(t) = <\sum_{j=1}^{\infty} e_j(t)(\cdot)\, g_j(t), e_k(t)(\cdot)>_t = g_k(t).$$

Poniamo $W = V\,T$. W diagonalizza $-\Delta$ in modo canonico. Infatti.

$$\big(W(-\Delta f)\big)_j(t) = \big[V\big(T(-\Delta f)\big)\big]_j(t) = <t\,T(f)(\sqrt{t},\cdot), e_j(t)(\cdot)>_t =$$

$$= t\big[V\big(T(f)\big)\big]_j(t) = t\big(W(f)\big)_j(t),$$

e a questo punto si possono applicare i risultati di G. Bottaro, sulla sintesi spettrale.

b) Sia $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cap Q^+$, $\alpha = \frac{p}{q}$ con p, q primi tra loro.

L'insieme $\left\{\left(\xi \cos\frac{k\pi}{\alpha}, \xi \sin\frac{k\pi}{\alpha}\right); \xi \in \mathbb{R}^+, k \in N\right\}$ è costituito da una stella di p semirette uscenti dall'origine, se q è pari, di $2\,p$ semirette uscenti dall'origine, se q è dispari.

Le coppie $\left(\xi, \frac{k\pi}{\alpha}\right)$ (o in maniera abbreviata (ξ, k)) rappresentano un sistema di coordinate per l'insieme sotto specificato.

Sia

$$B = \bigoplus_{h\in N} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \ldots$$

In B consideriamo il sottoinsieme

$$A = \left\{ \left(\underset{1}{0}, \dots, \underset{j}{\left(\xi \cos \frac{k\pi}{\alpha}, \ \xi \sin \frac{k\pi}{\alpha} \right)}, \underset{j+1}{0}, \dots \right); K = (j-1)p+1, \dots, jp \right.$$

$$\text{se } q \text{ è pari, oppure } K = (j-1)\,2p+1, \dots, 2jp\,,$$

$$\left. \text{se } q \text{ è dispari, } j \in N\,, \xi \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

A questo punto si possono ripetere le considerazioni fatte al punto a).

3. Il caso del diedro.

Sia $\wedge_1 = \wedge \times \mathbb{R}$ ove $\wedge \subset \mathbb{R}^2$ è definito al punto 2.

Per ogni $\varphi \in L^2(\wedge_1)$, poniamo

$$T_1(\varphi)(\xi, k, \zeta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} d\varrho \int_0^{\alpha} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} dz \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} J_{\frac{k\pi}{\alpha}}(\xi\varrho)\, e^{-iz\zeta} \varrho\, \varphi_c(\varrho, \theta, z)$$

ove $\varphi_c(\varrho, \theta, z) = \varphi(\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta, z)$.

Per quanto è stato detto al paragrafo precedente si ha

$$\| T_1(\varphi) \|_{L^2_{1/2}(\mathbb{R}^+) \hat{\otimes}\, l^2\, \hat{\otimes} L^2(\mathbb{R})} = \| \varphi \|_{L^2(\wedge_1)}\,.$$

e

$$[T_1(-\Delta\varphi)](\xi, k, \zeta) = (\xi^2 + \zeta^2)\, T_1(\varphi)(\xi, k, \zeta)$$

quindi T_1 diagonalizza Δ in modo non canonico.

Basta ragionare come sopra con ovvie modifiche.

4. Il caso di una regione di tipo piramidale non limitata.

Sia

r_1 una semiretta del piano x, y, uscente dall'origine, che forma con l'asse delle x (positive) un angolo φ_1

r_2 una semiretta del piano x, y, uscente dall'origine, che forma con l'asse delle x(positive) un angolo $\varphi_2 > \varphi_1, \varphi_1, \varphi_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

r_3 una semiretta non appartenente al piano x, y, uscente dall'origine, individuata dalle coordinate angolari (polari) $\varphi', \theta_1, \varphi' \in$ $\in]\varphi_1, \varphi_2[, \theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Sia π_0 il piano di r_1, r_2: π_1 quello di r_1 e r_3, π_2 quello di r_2 e r_3.

Sia $\wedge$ la piramide infinita $(\subset (\mathbf{R}^+)^3)$ delimitata da π_0, π_1, π_2. $\partial \wedge$ sia la frontiera di $\wedge$.

Consideriamo $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ in $L^2(\wedge)$ con dominio $H^2(\wedge) \cap H_0^1(\wedge)$.

In coordinate polari si ha:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \Delta_\Gamma ,$$

essendo

$$\Gamma = \wedge \cap \{ x \in \mathbf{R}^3, \| x \| = 1 \} = \wedge \cap S^2$$

$$\Delta_\Gamma = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

l'operatore di Laplace-Beltrami su S^2.

Poniamo

$$\chi = \log \left(\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \right)$$

Δ_Γ si scrive allora

$$(\cosh \chi)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = A_\chi \, \Delta_{\chi,\varphi} \tag{4.1}$$

ove A_χ denota l'operatore di moltiplicazione per $(\cosh \chi)^2$ e $\Delta_{\chi,\varphi}$ il laplaciano nelle variabili χ, φ.

Sia Γ' il trasformato di Γ.

Ora $u \in H^2(\wedge) \cap H_0^1(\wedge) \Rightarrow u/S^2 \in H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$

e quindi

$$u(\varrho, \chi, \varphi)\,|_{\varrho=1} \in H^2(\Gamma') \cap H_0^1(\Gamma'),$$

poiché il cambiamento di variabili è C^∞ con tutte le derivate limitate.

Ora l'operatore A_χ è continuo in $L^2(\Gamma')$ e dotato di inverso continuo. D'altra parte, per [7], l'operatore $\Delta_{\chi,\varphi} : H^2(\Gamma') \cap H_0^1(\Gamma') \to L^2(\Gamma')$ è un isomorfismo algebrico e topologico; dunque ammette inverso. Sia $i\,; H^2(\Gamma') \cap H_0^1(\Gamma') \to L^2(\Gamma')$.

Per il teorema di Rellich i è compatta. Poniamo $B = i \circ \Delta_{\chi,\varphi}^{-1}$. B è compatta $\Rightarrow$ ha spettro discreto $\Rightarrow \Delta_{\chi,\varphi}$ ha spettro discreto.

D'altronde $-\Delta_{\chi,\varphi} > 0 \Rightarrow 0 \in \varrho(\Delta_{\chi,\varphi}) \Rightarrow$ le autofunzioni formano un sistema completo e ortonormale.

Siano λ_n, $n \in N$, gli autovalori e $u_n(\varphi, \theta)$ le autofunzioni di Δ_Γ in Γ.

Per $u \in L^2(\wedge)$ consideriamo

$$T(u)(\xi, n) = \int_0^{+\infty} \int_\Gamma J_{\left(-\lambda_n + \frac{1}{4}\right)^{1/2}}(\xi\varrho) \frac{1}{\sqrt{\xi\varrho}} \, u_n(\omega)\, u(\varrho,\omega)\, \varrho^2 \, d\varrho \, d\omega$$

$$\left((\xi\varrho)^{-1/2} J_{\left(-\lambda_n + \frac{1}{4}\right)^{1/2}}(\xi\varrho) \text{ risolve l'equazione } u'' + \frac{2}{\varrho} u' + \lambda_n u = -\xi^2 u \right).$$

Ragionamenti analoghi a quelli fatti nel caso piano danno che, posto per $\varphi \in L_1^2(\mathbb{R}^+)$

$$B_\nu(\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_{\mathbb{R}^+} J_\nu(\xi\varrho)\, \varphi(\varrho)\, \varrho^{3/2}\, d\varrho$$

si ha

$$B_\nu : L_1^2(\mathbb{R}^+) \to L_1^2(\mathbb{R}^+) \qquad \text{isometrica,}$$

e quindi

$$T : L^2(\wedge) \to L_1^2(\mathbb{R}^+) \,\hat{\otimes}\, l^2 \qquad \text{isometrica}$$

poichè $$L^2(\wedge) \cong L_1^2(\mathbb{R}^+) \,\hat{\otimes}\, L^2(\Gamma)$$

Si possono, a questo punto, ripetere con ovvie modifiche i ragionamenti già fatti nel caso piano.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bottaro, *Alcuni risultati di analisi spettrale per l'operatore di Laplace su insiemi non limitati*, Ann. di Mat. pura e appl. Ser. IV, **105** (1975), 205.

[2] L. Garding, *Eigenfunction Expansion*, p. 303, in Bers, John, Schechter, Partial Differential Equations, New York, 1964.

[3] G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1922.

[4] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford, 1950.

[5] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms*, New York, Heidelber, Berlin, 1974.

[6] A. Avantaggiati - M. Troisi, *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo*, I. Ann. di Mat. **95** (1973), 361-408.

[7] P. Grisvard, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre*, Boll. U.M.I. (4) **5** (1972), 132.

[8] F. W. J. Olver, *Bessel Functions of Integer Order*, in M. Abramowitz and I. A. Stegun eds., Handbook of Mathematical Functions, New York, 1970.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 aprile 1977.