RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO BRESSAN

Su di un sistema dissipativo soggetto a forze dipendenti dal tempo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 183-195

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__183_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Su di un sistema dissipativo soggetto a forze dipendenti dal tempo (*)

SERGIO BRESSAN (**)

§ 1. - Introduzione.

In passato [1] mi sono interessato alla determinazione di condizioni sufficienti affinchè, per un sistema olonomo ad N gradi di libertà, riferito alle N coordinate lagrangiane $q_1, \ldots, q_N$, la posizione di equilibrio $q_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, N)$ sia di equilibrio stabile. Il sistema è supposto soggetto a vincoli fissi, a forze attive dissipative e a forze attive variabili col tempo e derivanti dal potenziale generalizzato :

$$U = -\frac{1}{2} w^2(t)\, V(q) \tag{1}$$

in cui $w(t)$ è una funzione positiva, continua, limitata e con derivata prima continua, e la $V(q)$ è una funzione delle coordinate lagrangiane che ammette un minimo effettivo nell'origine.

Vari autori [2] avevano in precedenza considerato lo stesso pro-

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'A. : Sergio Bressan - Seminario Matematico dell'Università - via Belzoni 7 - 35100 Padova.

[1] Vedi : S. BRESSAN, *Sulla stabilità dell'equilibrio di un sistema dissipativo soggetto ...* » Rendiconti ACC. Naz. Lincei - Serie VIII vol. LIX, fasc. 6, dicembre 1975.

[2] Vedi : R. NARDINI, *Su un sistema dissipativo ad n gradi di libertà,* Rendiconti Acc. Naz. Lincei - Vol. VII - Novembre 1949.

S. LEVONI, *Su un sistema dissipativo ...* » Rendiconti Acc. Naz. Lincei, 1964.

blema nel caso particolare che agissero delle forze derivanti, anzichè dal potenziale (1), da un potenziale generalizzato di tipo particolare:

$$U = -\frac{1}{2}\, w^2(t) \sum_{r=1}^{N} q_r^2$$

ove $w(t)$ gode delle stesse proprietà che in (1).

Come si è visto in tutti i lavori finora considerati le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva dipendono dal tempo allo stesso modo mediante la $w(t)$.

Nel presente lavoro mi sono proposto di vedere se sussiste qualche cosa di analogo anche senza la limitazione suddetta.

Considero dapprima il caso «finito», ossia suppongo che la sollecitazione attiva dipendente dal tempo derivi da un potenziale U del tipo:

$$U = \sum_{s=1}^{n} U_s \tag{2}$$

ove è:

$$U_s = -\frac{1}{2}\, w_s^2(t)\, V_s(q) \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{3}$$

con le $w_s(t)$ $(s = 1, \dots, n)$ funzioni positive, continue, limitate e con derivata prima continua e le funzioni $V_s(q)$ $(s = 1, \dots, n)$ che ammettono un minimo effettivo nella configurazione $q_r = 0$ $(r=1, \dots, N)$.

Nell'ipotesi, dunque, che la sollecitazione attiva dipendente dal tempo derivi da un potenziale del tipo (2), (3), dimostro il seguente:

TEOREMA I° – *Condizione sufficiente affinchè l'origine sia una posizione di equilibrio stabile è che i coefficienti $w_s(t)$ $(s = 1, \dots, n)$, anche se non decrescenti, si mantengano limitati.*

Estendo inoltre lo studio al caso di una dipendenza da una infinità di parametri in modo continuo. Suppongo cioè che la sollecitazione derivi da un potenziale U del tipo:

$$U = \int_0^1 U(q_\sigma, t)\, d\sigma \tag{4}$$

con :

$$5)\qquad U_\sigma(q\,,t) = -\frac{1}{2}\,w^2(\sigma\,,t)\;V(\sigma\,,q) \qquad (0 \leq \sigma \leq 1)$$

ove la funzione $w(\sigma\,,t)$ è supposta positiva, continua e limitata nella semistriscia in cui è definita e dotata ivi di derivate parziali prime continue e limitate. Si suppone anche che $[$posto $V(\sigma\,,0) = 0]$ la $V(\sigma,q)$ sia tale che esista un intorno completo J dell'origine 0 tale che $\forall\; P \in J$ e diverso da 0 risulti $V(\sigma,P) > 0 \quad \forall\; \sigma \in [0,1]$.

Per rendersi conto dell'interesse pratico che può avere un potenziale di questo tipo basta pensare alle forze esplicate sul sistema da entità (cariche elettriche, centri di attrazione elastica ripartita, ecc.) distribuite con continuità lungo un arco di curva e variabili col tempo con legge opportuna. È immediato pensare al caso di una dipendenza da due o più parametri (entità distribuite su superfici o regioni tridimensionali).

Detto k un intero positivo e $I_i (i = 1\,,\ldots\,,k)$ intervalli disgiunti contenuti in $[0,1]$, sistinguo i due casi :

$$6)\quad \begin{cases} \mathrm{I}^{\circ})\ \dfrac{\partial w(\sigma,t)}{\partial t} \geq 0 \quad \forall \sigma \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i ; \quad \dfrac{\partial w(\sigma,t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall \sigma \in [0,1] - \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i \\ \mathrm{II}^{\circ})\ \dfrac{\partial w(\sigma,t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall \sigma \in [0,1] \end{cases}$$

Nell'ipotesi che la sollecitazione attiva dipendente dal tempo derivi dunque da un potenziale del tipo (4), (5) e (6), dimostro il seguente :

TEOREMA II° – *Condizione sufficiente affinchè l'origine sia posizione di equilibrio stabile è che il coefficiente sempre positivo $w(\sigma,t)$ si mantenga limitato e sia soddisfatta la :*

$$7)\qquad \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{w}\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dt' \leq \tau \qquad \forall \sigma \in \bigcup_{i=1}^{k} I_i$$

ove τ è una costante opportuna.

§ 2. - Premesse. Una relazione energetica.

Il sistema olonomo C a vincoli indipendenti dal tempo sia soggetto alla sollecitazione derivante dal potenziale dato da (2) o (4). Su di esso si esplichino inoltre delle forze dissipative la cui azione, ammettiamo si possa compendiare nella forma quadratica definita positiva F di Rayleigh:

$$F = \sum_{r,s=1}^{N} c_{rs} \, \dot{q}_r \dot{q}_s \tag{8}$$

ove c_{rs} sono costanti soddisfacenti le: $c_{rs} = c_{sr}$. Supponiamo inoltre che la forza viva sia rappresentata dalla forma quadratica definita positiva a coefficienti costanti:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N} b_{rs} \, \dot{q}_r \, \dot{q}_s \tag{9}$$

ove è:

$$b_{rs} = b_{sr} \, .$$

Le equazioni di Lagrange, nel caso in esame, si possono scrivere:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} \qquad (r = 1, \dots, N) \tag{10}$$

Moltiplico le (10) membro a membro per $\dot{q}_r$ e sommo rispetto ad r da 1 a N. In base a (8), (9) nel caso che valgano le (2), (3) si ha:

$$\frac{d(T-U)}{dt} + 2F + 2 \sum_{s=1}^{n} \frac{\dot{w}_s}{w_s} U_s = 0 \tag{11}$$

Nel caso che valgano le (4), (5) si ha invece:

$$\frac{d(T-U)}{dt} + 2F + 2 \int_0^1 \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} U_\sigma(q \, , t) \, d\sigma = 0 \tag{11'}$$

§ 3. - Condizioni sufficienti per la non crescenza di un certo funzionale.

Pongo :

$$\Gamma^2(t) = f(t)(T - U) \tag{12}$$

ove $f(t)$ è una funzione positiva che soddisfa ad ampie condizioni di regolarità. Derivando la (12) rispetto al tempo, nell'ipotesi di validità di (11) si ha :

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = -\left[2fF - \dot{f}T + \sum_{s=1}^{n} \left(\dot{f} + 2\frac{\dot{w}_s}{w_s} f\right) U_s\right] \tag{13}$$

Nell'ipotesi che sia valida la (11′) si ha :

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = -\left[2fF - \dot{f}T + \int_0^1 \left(\dot{f} + 2\frac{\partial w}{\partial t}\frac{l}{w} f\right) U_\sigma(q, t)\, d\sigma\right] \tag{13′}$$

Da (13) si ha che, per ogni moto che avviene in una regione ove è $U_s \leq 0$ $(s = 1, \ldots, n)$, la funzione non negativa Γ^2 è non crescente per $t \to +\infty$ se risulta :

$$\begin{cases} \dot{f} \leq 0 & \\ \dot{f} + 2\dfrac{\dot{w}_s}{w_s} f \leq 0 & (s = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{14}$$

Da (13′), per un moto che avviene in una regione ove è $U_\sigma \leq 0$, la funzione Γ^2 è non crescente per $t \to +\infty$ se $f(t)$ soddisfa le :

$$\begin{cases} \dot{f} \leq 0 & \\ \dot{f} + 2\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{1}{w} f \leq 0 & (0 \leq \sigma \leq 1) \end{cases} \tag{14′}$$

Considero separatamente il caso discreto e quello continuo.

Caso discreto

Detto ν un intero positivo soddisfacente la condizione $\nu \leq n$, distinguo le due possibilità o è:

$$\begin{cases} \dot{w}_s \geq 0 & (s = 1, \dots, \nu) \\ \dot{w}_s \leq 0 & (s = \nu + 1, \dots, n), \end{cases} \tag{15}$$

e allora definisco la funzione positiva e limitata $\lambda(t)$ mediante:

$$\lambda(t) = \prod_{s=1}^{\nu} w_s ; \tag{16}$$

o invece, risulta:

$$\dot{w}_s \leq 0 \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{17}$$

e allora pongo:

$$\lambda^2(t) = e^{\frac{1}{t+1}}. \tag{18}$$

Determino la $f(t)$ nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{1}{\lambda^2(t)} \, e^{\frac{1}{t+1}} \tag{19}$$

Si verifica facilmente che $f(t)$ così definita (e con la scelta opportuna della $\lambda^2(t)$ a seconda che per qualcuna delle $\dot{w}_s$ sia $\dot{w}_s \geq 0$ o meno) soddisfa le (14).

Caso continuo

Nell'ipotesi che siano valide le $(6)_1$, considero una funzione positiva e limitata $\mu(t)$ soddisfacente la:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \geq \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (\forall\, \sigma, t) \tag{20}$$

Posto:

21) $$\mu(t) = e^{\psi(t)} \qquad w(\sigma, t) = e^{\chi(\sigma,t)}$$

la (20) comporta per $\psi(t)$ la condizione:

22) $$\frac{d}{dt}\psi(t) \geq \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad (\forall\ \sigma, t)$$

Posto ancora:

23) $$\gamma(t) = \begin{cases} \sup\limits_{\sigma\in[0,1]} \left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}\right) & \text{se l'estremo superiore è } \geq 0 \\ 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} < 0 \end{cases}$$

la (22) è certamente soddisfatta se vale la:

24) $$\frac{d}{dt}\psi(t) \geq \gamma(t) \qquad \forall\ t \in [0, +\infty].$$

Da (24) si ricava:

25) $$\psi(t) = \int_0^t \gamma(t')dt'$$

Affinchè $\psi(t)$ sia limitata [e lo sia quindi anche la $\mu(t)$] deve esistere finito il seguente limite:

26) $$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \gamma(t')\,dt' = \tau \qquad (\tau \text{ finito}).$$

Una condizione sufficiente per la validità della (26) è:

27) $$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{w}\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad \forall \sigma \in \bigcup_{i=1}^{k} I_i .$$

Se è valida la $(6)_2$, pongo:

$$\mu^2(t) = e^{\frac{1}{t+1}}.$$

Definisco allora la $f(t)$ nel seguente modo:

$$f(t) = \frac{1}{\mu^2(t)}\, e^{\frac{1}{t+1}} \tag{28}$$

Si verifica facilmente che [se vale la (26) nel caso $(6)_1$ e sempre nel caso $(6)_2$] la $f(t)$ data da (28) [ove si intende scelta opportunamente la $\mu^2(t)$] soddisfa le (14').

§ 4. - Dimostrazione del Teorema I°. Caratterizzazione del tipo di dipendenza temporale della sollecitazione attiva.

Nell'ipotesi di validità delle (2), (3), dimostro ora che, se sono valide le (15), l'origine è una posizione di equilibrio stabile.

In sostanza faccio vedere che, fissato comunque un'intorno di configurazioni I dell'origine e un numero reale $\varepsilon > 0$, è sempre possibile determinare un altro intorno di 0, I_0, e un numero reale $\delta > 0$ tali che, abbandonando il sistema in un punto qualunque $P_0 \in I_0$ con forza viva iniziale $T_0 < \delta$, esso, nel moto che ne consegue, occupa solo configurazioni $P \in I$ con forza viva $T < \varepsilon$.

Fissati dunque ad arbitrio I e $\varepsilon > 0$ e ricordando che le $V_s(q)$ $(s = 1, \dots, n)$ presentano un minimo effettivo nell'origine ove non è restrittivo supporre che sia $V_s(0) = 0$ $(s = 1, \dots, n)$, considero un intorno di 0, J, contenuto in I, limitato e tale che:

$$\forall\, P \begin{cases} \in J \\ \neq 0 \end{cases} \qquad V_s(P) > 0 \qquad\qquad (s = 1, \dots, n).$$

Detta $\bar{J}$ la frontiera di J, vale:

$$\forall\, P \in \bar{J} \qquad V_s(P) > 0 \qquad\qquad (s = 1, \dots, n)$$

Ricordando che $\lambda(t)$ e $w_s(t)$ $(s = 1, \dots, n)$ sono positive e limitate, è lecito scrivere:

$$\begin{aligned} &0 < m \leq \lambda^2(t) \leq M < +\infty \\ &0 < l \leq w_s^2(t) \leq L < +\infty \qquad\qquad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{29}$$

con m, l, M, e L costanti opportune.

Pongo inoltre:

$$V_m = \min_{\substack{(P \in \bar{J}) \\ (s = 1, \dots, n)}} V_s(P) \tag{30}$$

Risulta certamente $V_m > 0$.

Determino ora δ e I_0. Pongo:

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{1}{3} \min\left(\dfrac{lm}{LMe\,(L+1)}\, V_m\, ;\ \dfrac{m}{Me\,(L+1)}\, \varepsilon\right) \\ I_0 \subset J \ :\ \forall\ P \in I_0 \quad V_s(P) < \dfrac{\delta}{n} \qquad (s = 1, \dots, n) \end{cases} \tag{31}$$

Osservo che, detti P_0 e T_0 la configurazione e la forza viva all'istante iniziale, risulta nelle ipotesi del paragrafo 3:

$$f\left[T + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} w_s^2\, V_s(P)\right] \leq f_0 \left[T_0 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} w_s^2(0)\ \ V_s(P_0)\right] \tag{32}$$

ove f_0 è il valore assunto dalla $f(t)$ per $t = 0$.

Abbandonando il sistema in una qualunque configurazione $P_0 \in I_0$ con forza viva $T_0 < l\delta$ si genera un moto durante il quale, finchè il sistema rimane in J [cosicchè è $V_s(P) \geq 0$ $(s = 1, \dots, n]$ valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} T \leq T + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} w_s^2\, V_s(P) \leq \dfrac{f_0}{f} \left[T_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} w_s^2(0)\ \ V_s(P_0)\right] \leq \\ \qquad \leq \dfrac{f_0}{f}\left[l\delta + \dfrac{1}{2} L\delta\right] \leq \dfrac{f_0}{f}\, \dfrac{3}{2}\, L\delta \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n} V_s(P) \leq 2\left[\dfrac{T}{l} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} \dfrac{w_s^2}{l}\, w_s(P)\right] \leq 2\, \dfrac{f_0}{f}\left[\dfrac{T_0}{l} + \right. \\ \left. + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} \dfrac{L}{l}\ V_s(P_0)\right] \leq 2\, \dfrac{f_0}{f}\left[\dfrac{L}{l}\, \delta + \dfrac{1}{2}\, \dfrac{L}{l}\, \delta\right] \leq 3\, \dfrac{f_0}{f}\, \dfrac{L}{l}\, \delta . \end{cases} \tag{33}$$

Risulta che $\forall\, t \in [0\,, +\infty[$ è:

$$34)\qquad \frac{f_0}{f} \leq \frac{M}{m}\, l \quad \text{se } \nu \geq 1\,, \qquad\qquad \frac{f_0}{f} = 1 \quad \text{se } \nu = 0\,,$$

per cui da (33) si ricavano le:

$$35)\qquad \begin{cases} T < \varepsilon \\ \sum_{s=1}^{n} V_s(P) < V_m\,. \end{cases}$$

Sulla frontiera $\bar{J}$ di J risulta invece essere:

$$36)\qquad \sum_{s=1}^{n} V_s(P) \geq n V_m\,.$$

Il sistema non può quindi uscire dall'intorno J e la sua forza viva non può superare ε, c. d.d.

Osservazione. Le condizioni (15) permettono di osservare che, nell'espressione di U, il coefficiente, che esprime la dipendenza temporale e che moltiplica una $V_s(q)$, può essere una funzione oscillante o addirittura periodica. Infatti le $V_s(q)$ distinte possono essere in numero minore di n. Supposto, ad esempio, che siano uguali fra loro le prime m $(m \leq n)$, risulta che il coefficiente è dato da: $u(t) = \sum_{i=1}^{m} w_i^2(t)$. Risulta che $u(t)$ è una funzione positiva, derivabile a variazione limitata nell'intervallo $[0, +\infty[$. Essa è soggetta alla ulteriore condizione che la sua variazione negativa $N(u)$ (3) in

(3) Detta $\dot{u}$ la derivata di $u(t)$, pongo $v = \dot{u}$ e $v^+ = \begin{cases} v & \text{se } v \geq 0 \\ 0 & \text{se } v < 0 \end{cases}$: $v^- = v^+ - v$.

Pongo inoltre:

$$N(u) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b v^-\, dt\,.$$

Si noti che, nel caso in esame, il limite esiste ed è finito.

$[0, +\infty[$ deve soddisfare la:

$$N(u) < u(0) \tag{37}$$

essendo $u(0)$ il valore iniziale di $u(t)$ certamente positivo.

§ 5. - Dimostrazione del Teorema II°.

Supponogo ora che la sollecitazione attiva dipenda anche da un potenziale del tipo (4), (5) e dimostro il Teorema II°.

Il ragionamento è analogo a quello del paragrafo 4.

Osservo che non è restrittivo [4] supporre che sia: $V(\sigma, 0) = 0$. Fissati dunque ad arbitrio l'intorno di configurazioni I e il numero reale $\varepsilon > 0$, per l'ammessa esistenza dell'intorno J dell'origine in cui si risente del minimo effettivo della $V(\sigma, q)$ $\forall$ $\sigma \in [0, 1]$, posso considerare un intorno J della configurazione $q_h = 0$ $(h = 1, \dots, N)$ contenuto in I, limitato e tale che sia:

$$\forall P \begin{cases} \in J \\ \neq 0 \end{cases} \qquad V(\sigma, P) > 0 \qquad\qquad (0 \leq \sigma \leq 1)\,.$$

Detta $\bar{J}$ la frontiera di J, vale:

$$\forall \ P \in \bar{J} \qquad V(\sigma, P) > 0 \qquad\qquad (0 \leq \sigma \leq 1). \tag{38}$$

---

(4) Infatti se è $V(\sigma, 0) \neq 0$ pongo $V'(\sigma, q) = V(\sigma, q) - V(\sigma, 0)$ e definisco il potenziale U' nel seguente modo:

$$U' = -\frac{1}{2}\int_0^1 w^2(\sigma, t)\; V'(\sigma, q)\, d\sigma\,.$$

Risulta:

$$\frac{\partial U'}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h}\,(h = 1, \dots, N) \quad \text{ed anche} \quad V'(\sigma, 0) = 0\,.$$

Essendo $w(\sigma, t)$ e $\mu(t)$ positive e limitate si può scrivere:

$$39)\qquad \begin{cases} 0 < d \leq w^2(\sigma, t) \leq D < +\infty \\ 0 < g \leq \mu^2(t) \leq G < +\infty \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leq \sigma \leq 1 \\ 0 \leq t < +\infty \end{pmatrix}$$

con d, g, D e G costanti opportune.

Pongo:

$$V_m = \min_{\substack{\sigma \in [0, 1] \\ P \in \bar{J}}} V(\sigma, P)$$

Risulta certamente:

$$V_m > 0 .$$

Determino ora δ e I_0. Pongo:

$$40)\qquad \begin{cases} \delta = \dfrac{1}{3} \min \left(\dfrac{dg}{DGe^\tau (D+1)} V_m ; \dfrac{g}{Ge^\tau (D+1)} \varepsilon \right) \\ I_0 \subset J \ : \ \forall P \in I_0 \qquad V(\sigma, P) < \delta \qquad\qquad (0 \leq \sigma \leq 1) , \end{cases}$$

ove τ è la costante che compare nella (7).

Chiamo al solito P_0 e T_0 la configurazione e la forza viva iniziale. Nelle ipotesi del paragrafo 3 risulta:

$$41)\qquad f(T - U) \leq f_0(T_0 - U_0)$$

ove con f_0 e U_0 si intende ciò che diventano f e U all'istante iniziale $t = 0$.

Si abbandoni ora il sistema in una qualunque posizione $P_0 \in I_0$ con forza viva $T_0 < d\delta$. Per il moto che ne consegue, almeno finchè il sistema resta in J $[$cosicchè è $V(\sigma, P) \geq 0$ $(0 \leq \sigma \leq 1)]$ valgono le seguenti disuguaglianze

$$
42)\quad \left\{
\begin{aligned}
& T \leq T + \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(\sigma,t)\, V(\sigma,P)d\sigma \leq \frac{f_0}{f}\left[T_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(\sigma,0)\, V(\sigma,P_0)d\sigma\right] \leq \\
& \qquad \leq \frac{f_0}{f}\left[d\delta + \frac{1}{2}D\delta\right] \leq \frac{3}{2}D\delta\frac{f_0}{f} \\
& \int_0^1 V(\sigma,P)d\sigma \leq 2\left[\frac{T}{d} + \frac{1}{2d}\int_0^1 w^2(\sigma,t)\, V(\sigma,P)d\sigma\right] \leq \\
& \leq 2\frac{f_0}{f}\left[\frac{T_0}{d} + \frac{D}{2d}\int_0^1 V(\sigma,P_0)d\sigma\right] \leq 2\frac{f_0}{f}\left[\delta + \frac{D}{2d}\delta\right] \leq 3\frac{D}{d}\delta\frac{f_0}{f}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Da (28) in base a (21) (25) e (26) si ricava:

$$
43)\qquad \frac{f_0}{f} \leq \frac{G}{g}e^{\tau} \quad \text{se vale } (6)_1\,, \qquad \frac{f_0}{f} = 1 \quad \text{se vale } (6)_2\,.
$$

Sostituendo la (43) nelle (42) risulta:

$$
44)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& T < \varepsilon \\
& \int_0^1 V(\sigma\,,P)\,d\sigma < V_m\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ricordando il significato di Vm si trova che sulla frontiera $\bar{J}$ di J è:

$$
45)\qquad \int_0^1 V(\sigma\,,P)\,d\sigma \geq V_m\,.
$$

Il sistema non può quindi uscire dall'intorno J e la sua forza viva non supera mai ε, c., d. d. .

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 marzo 1977