

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

KHALID BENABDALLAH

ROBERT WILSON

**Endomorphismes maigres de groupes
abéliens primaires**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 205-213

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__205_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__205_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Endomorphismes maigres de groupes abéliens primaires.

KHALID BENABDALLAH - ROBERT WILSON (*)

Après les travaux de W. Liebert sur l'anneau d'endomorphismes des p -groupes séparables, L. Fuchs propose l'étude des anneaux d'endomorphismes des p -groupes en général ([3], problème 85). Ce travail est une contribution à ce problème.

Tous les groupes considérés ici sont abéliens primaires. Un sous-groupe H d'un groupe A est semi-essentiel dans A si tout sous-groupe H -haut est borné. Les sous-groupes semi-essentiels ont été caractérisés dans [2]. Un endomorphisme φ d'un groupe A est appelé maigre si son noyau est semi-essentiel dans A .

A l'aide de ces concepts, nous obtenons de nouvelles conditions nécessaires pour qu'un anneau E dont la partie torsion $T(E)$ est non bornée (le cas complémentaire étant bien connu) soit isomorphe à l'anneau d'endomorphismes d'un p -groupe; ce sont les suivantes:

- (a) $W = \{x \in E \mid (\text{Ann}^d(xy) = \text{Ann}^d y) \Rightarrow (y \in T(E))\}$ est un idéal bilatère de E ,
- (b) W est un sous-groupe essentiel de E ,
- (c) $\text{Ann}^o W = 0$,
- (d) Le radical de Jacobson de W est

$$J(W) = X \cap W \quad \text{où} \quad X/(\text{Ann}^o(E[p])) = \sum_{p \in \mathfrak{G}} F$$

où $\mathfrak{G} = \{\text{idéaux bilatères nils de } E/\text{Ann}^o(E[p])\}$.

(*) Département de Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, P.Q. Travail subventionné par le Fond C.N.R. n. A 5591

1. Sous-groupes semi-essentiels et endomorphismes maigres.

Pour débiter, nous allons considérer quelques résultats sur les sous-groupes semi-essentiels, qui nous seront utiles par la suite.

LEMME 1.1 [2, théorème 1.1]. Un sous-groupe H d'un groupe A est semi-essentiel dans A si et seulement si H contient le socle de la partie divisible de A et $(p^n A[p] + H)/H$ est fini pour un $n \in \mathbb{Z}^+$.

LEMME 1.2. Si H et H' sont deux sous-groupes semi-essentiels d'un groupe A alors $H \cap H'$ est semi-essentiel dans A .

PREUVE. Par le lemme 1.1, $H \cap H'$ contient le socle de la partie divisible de A . D'autre part, il existe $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ($n \geq m$ sans perte de généralité) tels que $(p^n A[p] + H)/H$ et $(p^m A[p] + H')/H'$ sont finis. Mais il existe une injection de $(p^n A[p] + (H \cap H'))/(H \cap H')$ dans $((p^n A[p] + H)/H) \oplus ((p^m A[p] + H')/H')$ et par le lemme 1.1, $H \cap H'$ est semi-essentiel dans A . $\square$

LEMME 1.3. Soient A, B deux groupes et $f \in \text{Hom}(A, B)$. Si H est un sous-groupe semi-essentiel de B , $f^{-1}(H)$ est semi-essentiel dans A .

PREUVE. Si $K \subseteq A$ est disjoint de $f^{-1}(H)$, $K \cap \ker f = 0$ et $f(K) \simeq K$. De plus, $(K \cap f^{-1}(H) = 0) \Rightarrow (f(K) \cap H = 0)$. Puisque H est semi-essentiel, $f(K) \simeq K$ est borné. $\square$

Fixons maintenant une notation que nous conserverons par la suite: pour un groupe A , notons

$$\begin{aligned} E(A) &= \{\text{endomorphismes de } A\} \\ W(A) &= \{\text{endomorphismes maigres de } A\} \\ I_n(A) &= \{\varphi \in E(A) \mid \ker \varphi \supseteq p^n A[p]\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ T(E(A)) &= \text{partie torsion de } E(A) \\ J(E(A)) &= \text{radical de Jacobson de } E(A). \end{aligned}$$

Tous ces ensembles sont des idéaux bilatères de $E(A)$, y compris l'ensemble des endomorphismes maigres, comme nous allons le voir maintenant.

THÉOREME 1.4. L'ensemble $W(A)$ des endomorphismes maigres d'un groupe A est un idéal bilatère de $E(A)$.

PREUVE. Soient $f, g \in W(A)$ et $h \in E(A)$. Par le lemme 1.2, $\ker f \cap \ker g$ est semi-essentiel dans A et puisque $\ker f \cap \ker g \subseteq \ker(f-g)$, $f-g \in W(A)$. D'autre part, $\ker(f \circ h) = h^{-1}(\ker f)$ est semi-essentiel par le lemme 1.3 et puisque $\ker f \subseteq \ker(h \circ f)$, $\ker(h \circ f)$ est semi-essentiel dans A . Donc $f \circ h$ et $h \circ f \in W(A)$ et $W(A)$ est un idéal bilatère de $E(A)$. $\square$

En remarquant que pour tout $n \in \mathbf{Z}^+$, $p^n A[p]$ est un sous-groupe sem-essentiel de A , on vérifie facilement que

$$T(E(A)) \subseteq \bigcup_n I_n(A) \subseteq W(A) \subseteq E(A).$$

De plus, suivant [4], on a que

$$pE(A) \subseteq I_0(A) \subseteq J(E(A)).$$

Nous allons maintenant étudier comment les rapports entre ces idéaux déterminent la structure du groupe A .

THÉOREME 1.5. Soit A un groupe. Les énoncés suivant sont équivalents.

- (a) A est borné,
- (b) $W(A) = E(A)$,
- (c) $W(A) = T(E(A))$.

PREUVE (c) $\rightarrow$ (a). Si A est non borné, $\varphi: A \rightarrow A$ défini par $\varphi(a) = pa$ est tel que $\varphi \in I_0(A) \subseteq W(A)$ mais $\varphi \notin T(E(A))$.

(b) $\rightarrow$ (a). Si $W(A) = E(A)$ alors $1 \in W(A)$ et 0 est semi-essentiel dans A . Donc A est borné.

Les implications (a) $\rightarrow$ (b) et (a) $\rightarrow$ (c) sont évidentes. $\square$

THÉOREME 1.6. Soit A un groupe. Les énoncés suivants sont équivalents.

- (a) A est divisible,
- (b) $W(A) = pE(A)$,
- (c) $W(A) = I_0(A)$,
- (d) $W(A) = J(E(A))$.

PREUVE (a) $\rightarrow$ (b), (d). Si A est divisible, $W(A) = I_0(A)$ par le lemme 1.1. De plus, on peut vérifier que $pE(A) = I_0(A) = J(E(A))$.

(b) $\rightarrow$ (c). Évident car $pE(A) \subseteq I_0(A) \subseteq W(A)$.

(d) $\rightarrow$ (a) [(c) $\rightarrow$ (a)]. Supposons que $J(E(A)) = W(A)$ [$I_0(A) = W(A)$]. Si A n'est pas divisible, A possède un facteur direct cyclique $\langle x \rangle$. Si π est la projection sur $\langle x \rangle$, $\pi \in W(A)$. Toutefois, puisque $\pi(x) = x$, $x \in \ker(1 - \pi)$ et $\pi \notin J(E(A))$. [$\pi \notin I_0(A)$]. $\square$

THÉORÈME 1.7. Soit A un groupe et $n \in \mathbf{Z}^+$. Les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $A = D \oplus B$ où D est divisible et $p^n B = 0$,

(b) $W(A) = I_n(A)$,

(c) $I_n(A) = I_{n+k}(A)$, $\forall k \in \mathbf{Z}^+$.

PREUVE (a) $\rightarrow$ (b). Soit $A = D \oplus B$ où D est divisible et $p^n B = 0$. Soit $\varphi \in W(A)$ alors $p^n A[p] = p^n D[p] \subseteq \ker \varphi$ par le lemme 1.1 et $\varphi \in I_n(A)$.

(b) $\rightarrow$ (c). Clair car $I_n(A) \subseteq I_{n+k}(A) \subseteq W(A)$, $\forall k \in \mathbf{Z}^+$.

(c) $\rightarrow$ (a). Il est facile de vérifier que $I_m(A) = I_{m+1}(A)$ si et seulement si $p^m A[p] = p^{m+1} A[p]$. Mais alors, si $I_n(A) = I_{n+k}(A)$, $\forall k \in \mathbf{Z}^+$, $p^n A$ est divisible et $A = p^n A \oplus B$ où $p^n B = 0$. $\square$

THÉORÈME 1.8. Soit A un groupe séparable. Alors $W(A) = \bigcup_n I_n(A)$.

PREUVE. Soit $\varphi \in W(A)$. Puisque $\ker \varphi$ est semi-essentiel dans A , $\exists n \in \mathbf{Z}^+$ tel que $((p^n A[p] + \ker \varphi) / \ker \varphi) \cong \varphi(p^n A[p])$ est fini.

Alors la suite

$$\varphi(p^n A[p]) \supseteq \varphi(p^{n+1} A[p]) \supseteq \dots$$

est stationnaire et il existe $l \in \mathbf{Z}^+$ tel que

$$(p^l A[p]) = \varphi(p^{l+1} A[p]) \dots$$

Donc $\varphi(p^l A[p]) \subseteq A^1[p] = 0$ et $\varphi \in I_l(A) \subseteq \bigcup_n I_n(A)$. $\square$

2. L'idéal des endomorphismes maigres.

Dans cette section, nous allons répondre à la question suivante: sachant que $E(A)$ est l'anneau d'endomorphismes d'un groupe A , comment peut-on reconnaître de l'intérieur de $E(A)$, c'est-à-dire sans considérer les propriétés du groupe A lui-même, l'idéal $W(A)$ des endomorphismes maigres?

D'abord, nous allons citer un lemme dont la preuve est directe.

Lemme 2.1. Soit A un groupe qui n'est pas la somme d'un divisible et d'un borné et soient $\theta, \theta' \in E(A)$. Alors $\text{Ann}^a(\theta \circ \theta') = \text{Ann}^a(\theta')$ si et seulement si $(\ker \theta) \cap \theta'(A) = 0$.

THÉORÈME 2.2. Soit A un groupe.

(a) Si $T(E(A))$ est borné, $W(A) = pE(A) + T(E(A))$.

(b) Si $T(E(A))$ est non borné,

$$W(A) = \{\varphi \in E(A) \mid (\text{Ann}^a(\varphi \circ \theta) = \text{Ann}^a \theta) \Rightarrow (\theta \in T(E(A)))\}.$$

PREUVE. (a) Si $T(E(A))$ est borné, $A = D \oplus R$ où D est divisible et R est borné. Par le lemme 1.1, $\varphi \in W(A) \Leftrightarrow (D[p]) = 0$. Si π_1, π_2 sont les projections sur D et R alors $\varphi = \varphi \circ \pi_1 + \varphi \circ \pi_2$ où $\varphi \circ \pi_1 \in I_0(D) = pE(D) \subseteq pE(A)$ par le théorème 1.6 et $\varphi \circ \pi_2 \in T(E(A))$ car $\pi_2 \in T(E(A))$.

(b) Si $T(E(A))$ est non borné, A n'est pas la somme d'un divisible et d'un borné. Si $\varphi \in W(A)$ et $\text{Ann}^a(\varphi \circ \theta) = \text{Ann}^a \theta$ pour un $\theta \in E(A)$, alors $\theta(A) \cap \ker \varphi = 0$ par le lemme 2.1. Puisque $\ker \varphi$ est semi-essentiel dans A , $\theta \in T(E(A))$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse. Supposons que $\varphi \notin W(A)$. Alors il existe un sous-groupe K non borné de A tel que $K \cap \ker \varphi = 0$. Nous allons construire un endomorphisme θ d'ordre infini tel que $\text{Ann}^a(\varphi \circ \theta) = \text{Ann}^a(\theta)$. Pour cela, choisissons une suite $k_1, \dots, k_n, \dots \in K$ telle que pour chaque $n \in \mathbf{Z}^+$, $O(k_n) = p^n$. Alors il existe une suite $b_1, \dots, b_n, \dots \in A$ telle que

$$(1) \quad O(b_i) > p^{2i}, \quad \forall i \in \mathbf{Z}^+,$$

$$(2) \quad A_{i-1} = \langle b_i \rangle \oplus A_i, \quad \forall i \in \mathbf{Z}^+ \quad (A_0 = A).$$

Pour chaque n , $A = \langle b_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \oplus A_n$. Posons $\pi_i: A \rightarrow \langle b_i \rangle$.

les projections canoniques. Alors

$$\psi = \sum_1^{\infty} p^i \pi_i \in E(A) \quad \text{et} \quad \psi(b_i) = p^i b_i.$$

Posant $\beta: \oplus \langle p^i b_i \rangle \rightarrow K$,

$$p^i b_i \mapsto k_i \quad \text{et} \quad \theta = \beta \circ \psi$$

on obtient que $\theta(b_i) = k_i$ et donc que $\theta \notin T(E(A))$. D'autre part, $\theta(A) \subseteq K$ et puisque $K \cap \ker \varphi = 0$, $\theta(A) \cap \ker \varphi = 0$ et par le lemme 2.1, $\text{Ann}^s(\varphi \circ \theta) = \text{Ann}^s(\theta)$. $\square$

COROLLAIRE 2.3. Soit A un groupe. Alors $\text{Ann}^s(W(A)) = 0$.

PREUVE. Si $A = D \oplus B$ où D est divisible et B est borné, $W(A) = {}_p E(A) + T(E(A))$. Si $\psi \in \text{Ann}^s(W(A))$, $p\psi = 0$ et donc $\psi(D) = 0$. De plus la projection $\pi: A \rightarrow B$ est maigre et $\psi \circ \pi = 0$. Donc $\psi = 0$.

Si A n'est pas la somme d'un divisible et d'un borné, si $\psi \in \text{Ann}^s(W(A))$ et si $x \in A$ alors $\exists \varphi \in W(A)$ tel que $\varphi(A) = \langle x \rangle$. Mais alors $\psi \circ \varphi(A) = \varphi(\langle x \rangle) = 0$ et $\psi = 0$. $\square$

Nous allons maintenant donner une caractérisation de l'idéal des endomorphismes maigres dans le cas où A est séparable.

THÉORÈME 2.4. Soit A un groupe séparable. Les énoncés suivants sont équivalents.

- (a) $\varphi \in W(A)$,
- (b) $\exists \pi \in E(A)$ tel que $\pi^2 = \pi$, $1 - \pi \in T(E(A))$,
 $\varphi \circ \pi \in \text{Ann}^s(E(A)[p])$
- (c) $\varphi \in \text{Ann}^s(E(A)[p]) + T(E(A))$

PREUVE (a) $\rightarrow$ (b). Si $\varphi \in W(A)$, $\exists n \in \mathbf{Z}^+$ tel que $p^n A[p] \subseteq \ker \varphi$ par le théorème 1.8. Par le corollaire 2 au théorème 3.7 de [1], on peut écrire $A = K \oplus B$ où $K[p] = (\ker \varphi)[p]$ et $p^n B = 0$. En posant π la projection de A sur K , on a l'idempotent cherché.

(b) $\rightarrow$ (c). Évident.

(c) $\rightarrow$ (a). Puisque $T(E(A)) \subseteq W(A)$, il suffit de montrer que $\text{Ann}^s(E(A)[p]) \subseteq W(A)$. Il est facile de vérifier que $\text{Ann}^s(E(A)[p]) = I_0(A) \subseteq W(A)$ car A est séparable. $\square$

3. L'anneau des endomorphismes maigres.

Dans cette section, nous allons étudier l'anneau $W(A)$ des endomorphismes maigres d'un groupe et nous allons en caractériser le radical de Jacobson.

LEMME 3.1. Soit A un groupe et

$$H(A) = \{\varphi \in E(A) \mid \forall x \in A[p] \setminus A^1, h(\varphi(x)) > h(x)\}.$$

Alors $J(E(A)) \subseteq H(A)$.

PREUVE. On peut remarquer que $H(A)$ est un idéal bilatère de $E(A)$. Soit $\varphi \in E(A)$ et supposons que $h(\varphi(x)) = h(x) = n < \infty$ pour un $x \in A[p]$. Alors $A = \langle z \rangle \oplus C = \langle z' \rangle \oplus C'$ où $p^n z = x$ et $p^n z' = \varphi(x)$. En définissant $\pi: A \rightarrow A$ par $\pi(z') = z$ et $\pi(C') = 0$, on obtient que $(1 - \pi\varphi)(x) = 0$ et donc $\varphi \notin J(E(A))$. $\square$

LEMME 3.2. Soit A un groupe et $\mathfrak{G} = \{\text{idéaux bilatères nils de } E(A)/I_0(A)\}$. Soit $X(A)$ l'idéal de $E(A)$ défini par $X(A)/I_0(A) = \sum_{F \in \mathfrak{G}} F$.

Alors $X(A) \subseteq J(E(A))$.

PREUVE. Si $\varphi \in X(A)$, $\exists n \in \mathbf{Z}^+$ tel que $\varphi^n \in I_0(A)$. Si $x \in A[p]$ est tel que $(1 - \varphi)(x) = 0$, alors $x = \varphi(x) = \varphi^n(x) = 0$. Donc $1 - \varphi$ est injectif. D'autre part, si $x \in p^k A[p]$, $k \in \mathbf{Z}^+$, $(1 - \varphi)(x + \varphi(x) + \dots + \varphi^{n-1}(x)) = x$ et $(1 - \varphi)(p^k A[p]) = p^k A[p]$. Donc $1 - \varphi$ est surjectif.

Puisque $X(A)$ est un idéal de $E(A)$, $X(A) \subseteq J(E(A))$. $\square$

LEMME 3.3. Soit A un groupe et $\varphi \in W(A)$. Un des deux énoncés est vrai:

- (a) $\exists l, k \in \mathbf{Z}^+$ tel que $\varphi^l \in I_k(A)$,
- (b) $\exists l, k, t \in \mathbf{Z}^+$ tel que $\varphi^{l+t} - \varphi^l \in I_k(A)$.

PREUVE. Puisque $\varphi \in W(A)$, $\exists k \in \mathbf{Z}^+$ tel que $\varphi(p^k A[p])$ est fini et la chaîne

$$\varphi(p^k A[p]) \supseteq \varphi^2(p^k A[p]) \supseteq \dots \text{ est stationnaire.}$$

Si la chaîne va à 0, $\exists l \in \mathbf{Z}^+$ tel que $\varphi^l(p^k A[p]) = 0$ et $\varphi^l \in I_k(A)$. Sinon, $\exists l \in \mathbf{Z}^+$ tel que

$$\varphi^i(p^k A[p]) = \varphi^{i+1}(p^k A[p]) = \dots$$

et φ est une bijection sur $\varphi^i(p^k A[p])$. Mais alors, $\exists t \in \mathbf{Z}^+$ tel que

$$(\varphi^{i+t} - \varphi^i)(p^k A[p]) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^{i+t} - \varphi^i \in I_k(A). \quad \square$$

LEMME 3.4. Soit A un groupe et $\varphi \in J(W(A))$. Alors $\exists l, k \in \mathbf{Z}^+$ tels que $\varphi^l \in I_k(A)$.

PREUVE. Soit $\varphi \in W(A)$; si $\varphi^i \notin I_k(A)$, $\forall l, k \in \mathbf{Z}^+$, il existe par le lemme 3.3 $l, t, k \in \mathbf{Z}^+$ tels que $\varphi^{i+t} - \varphi^i \in I_k(A)$. Soit $0 \neq x \in \varphi^i(p^k A[p])$; alors $(1 - \varphi^t)(x) = 0$. Puisque $1 - \varphi^t$ n'est pas inversible, $\varphi \notin J(W(A))$. $\square$

THÉORÈME 3.5. Soit A un groupe. Alors $J(W(A)) = X(A) \cap W(A)$.

PREUVE. Par le lemme 3.2, $X(A) \cap W(A) \subseteq J(E(A)) \cap W(A) = J(W(A))$. Soit $\varphi \in J(W(A))$; par le lemme 3.4, $\exists l, k \in \mathbf{Z}^+$ tels que $\varphi^l \in I_k(A)$ et par le lemme 3.1, $\varphi \in H(A)$. Soit $x \in A[p]$; alors $h(x) < h(\varphi(x)) < h(\varphi^2(x)) < \dots$ ou bien $\exists i \in \mathbf{Z}^+$ tel que $h(\varphi^i(x)) = \infty$. Dans les deux cas, $h(\varphi^n(x)) \geq n$ pour tout n . En particulier, $h(\varphi^k(x)) \geq k$ et $\varphi^{i+k}(x) = 0$. Donc $\varphi^{i+k} \in I_0(A)$, $J(W(A))/I_0(A)$ est un idéal bilatère nil de $E(A)/I_0(A)$ et $J(W(A)) \subseteq X(A) \cap W(A)$. $\square$

Pour terminer, nous allons caractériser $J(W(A))$ dans le cas où A est un groupe séparable.

LEMME 3.6. Soit A un groupe séparable. Alors $H(A) \cap W(A) \subseteq J(W(A))$.

PREUVE. Soit $\varphi \in H(A) \cap W(A)$. Si $x \in A[p] \cap \ker(1 - \varphi)$, $x = \varphi(x)$ et $h(x) = \infty$ car $\varphi \in H(A)$. Donc $x = 0$ et $1 - \varphi$ est injectif. D'autre part, soit $x \in p^t A[p]$, $t \in \mathbf{Z}^+$. Par le théorème 1.8, $\varphi \in I_k(A)$ pour un $k \in \mathbf{Z}^+$ et puisque A est séparable,

$$h(x) < h(\varphi(x)) < h(\varphi^2(x)) < \dots$$

et en particulier, $h(\varphi^k(x)) \geq k$. Puisque $\varphi \in I_k(A)$, $\varphi^{k+1}(x) = 0$ et

$$(1 - \varphi)(x + \varphi(x) + \dots + \varphi^k(x)) = x.$$

Donc $(1 - \varphi)(p^t A[p]) = p^t A[p]$ et $1 - \varphi$ est surjectif. Puisque $1 - \varphi$ est inversible pour tout $\varphi \in H(A) \cap W(A)$, $H(A) \cap W(A) \subseteq J(W(A))$. $\square$

THÉORÈME 3.7. Soit A un groupe séparable. Les idéaux suivants de $W(A)$ sont égaux.

- (a) $J(W(A))$,
- (b) $I_0(A) + T(J(E(A)))$,
- (c) $H(A) \cap W(A)$.

PREUVE (a) $\subseteq$ (b). Par le théorème 2.4, $W(A) = I_0(A) + T(E(A))$. Puisque $I_0(A) \subseteq J(W(A))$, $J(W(A)) \subseteq I_0(A) + T(J(E(A)))$.

(b) $\subseteq$ (c). Puisque $I_0(A) \subseteq H(A) \cap W(A)$ et que $T(E(A)) \subseteq W(A)$, en appliquant le lemme 3.1, on obtient que $I_0(A) + T(J(E(A))) \subseteq H(A) \cap W(A)$.

(c) $\subseteq$ (a). Lemme 3.6. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. BENABDALLAH - J. M. IRWIN, *On quasi-essential subgroups of primary abelian groups*, Can. J. Math., **22** (1970), pp. 1176-1184.
- [2] K. BENABDALLAH - J. M. IRWIN, *N-high subgroups and p-adic topology*, Comment. Math. Univ. St-Pauli, **21** (1972), pp. 43-45.
- [3] L. FUCHS, *Infinite abelian groups* (I et II), Academic Press, New York, 1970.
- [4] A. MADER, *On the normal structure of the automorphism group and the ideal structure of the endomorphism ring of abelian p-groups*, Publ. Math. Debrecen, **13** (1966), pp. 123-137.

Manoscritto pervenuto in Redazione l'1 Luglio 1976.