RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ITALO TAMANINI

Il problema della capillarità su domini non regolari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 169-191

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__169_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Il problema della capillarità su domini non regolari.

ITALO TAMANINI (*)

Vari autori si stanno da tempo interessando dello studio dei fenomeni di capillarità. In [1] R. Finn ha tracciato un quadro assai particolareggiato della ricerca che si svolge attualmente in questo campo, fornendo altresì una vasta bibliografia sull'argomento.

Per quanto riguarda la trattazione matematica dei problemi legati alla capillarità, sono stati recentemente ottenuti dei risultati di notevole importanza.

In [2] M. Emmer ha considerato il problema di minimizzare il funzionale

$$\mathscr{L}_\nu(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Df|^2} - \nu \int_{\partial\Omega} f(x)\, dH_{n-1} + \int_\Omega f^2(x)\, dx$$

nella classe $BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$; con detto funzionale si rappresenta, nel caso bidimensionale, l'energia del liquido contenuto in un tubo capillare illimitato, di sezione Ω.

Utilizzando tecniche variazionali, Emmer ha dimostrato l'esistenza e l'unicità della soluzione di tale problema, assumendo l'ipotesi che Ω sia aperto e limitato, con frontiera lipschitziana di costante L, e che $|\nu| < (1 + L^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Sempre in [2] è stato ottenuto un risultato di regolarità, completato successivamente da L. Pepe in [3], che prova l'analiticità della soluzione in Ω.

(*) Indirizzo dell'A.: Libera Università degli Studi di Trento, Facoltà di Scienze, 38050 Povo (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

Peraltro, come è stato osservato da R. Finn e C. Gerhardt in [4], la condizione $|\nu| < (1 + L^2)^{-\frac{1}{2}}$ può risultare troppo restrittiva, e di fatto non consente di trattare alcuni semplici esempi, dei quali è nota l'esistenza di soluzioni.

È il caso, per citarne qualcuno, di un dominio la cui frontiera presenti punte verso l'interno.

Scopo di questo lavoro è di estendere i risultati di Emmer ad esempi di questo tipo, caratterizzati non tanto dalla regolarità della frontiera del dominio, quanto piuttosto da una limitazione della sua curvatura (in un senso opportunamente definito).

Precisamente, viene dimostrata l'esistenza di soluzioni del problema variazionale considerato da Emmer, nelle ipotesi che Ω sia un sottoinsieme aperto e limitato di R^n $(n \geqslant 2)$, con frontiera di misura n-dimensionale nulla, e tale che per ogni L misurabile, contenuto in Ω, valga:

$$\int_{\partial\Omega} |D\varphi_L| \leqslant \int_{\Omega} |D\varphi_L| + cH_n(L) ,$$

con c indipendente da L.

Risultati analoghi sono stati ottenuti da Finn e Gerhardt (si veda [4], [5]), i quali considerano però domini lipschitziani e verificanti una « condizione di sfera interna » del tipo seguente:

$$\text{esiste } \varrho > 0 \text{ tale che } x \in \Omega \Rightarrow x \in B_\varrho \subset \Omega ,$$

dove B_ϱ è una sfera aperta di centro opportuno e di raggio ϱ.

Nel paragrafo successivo si dimostra che tale condizione è più forte delle ipotesi sulle quali si basa questo lavoro.

Ricordo ancora che E. Giusti in [6] ha studiato un problema simile, inserito in un contesto molto più generale, assumendo tuttavia l'ipotesi di lipschitzianità del dominio.

Per finire, desidero ringraziare il prof. M. Miranda che mi ha guidato in questa ricerca.

1. Posizione del problema.

Introduciamo subito alcune notazioni che verranno utilizzate nel corso di questo lavoro.

Con Ω indicheremo un sottoinsieme aperto e limitato di R^n, con

$\partial\Omega$ la sua frontiera, con $\bar{\Omega}$ la sua chiusura. Con φ_E indicheremo la funzione caratteristica dell'insieme E; se E è misurabile ed A è aperto (E, A sottoinsiemi di R^n), indicheremo con $\int_A |D\varphi_E|$ o più brevemente con $P_A(E)$ la variazione totale del gradiente di φ_E su A, definita dalla relazione:

$$\int_A |D\varphi_E| = \sup\left\{\int_E \sum_{i=1}^n D_i g_i(x)\,dx\colon g_i \in C_0^1(A),\ \sum_{i=1}^n g_i^2(x) \leqslant 1\right\}. \tag{1.1}$$

Se tale quantità risulta finita, diremo che E ha perimetro finito in A.

La definizione (1.1) viene poi estesa a tutti i boreliani di R^n ponendo:

$$\int_B |D\varphi_E| = \inf\left\{\int_A |D\varphi_E|\colon A \text{ aperto},\ B \subset A \subset R^n\right\}. \tag{1.2}$$

Indicheremo ancora con $\mathcal{G}$ la famiglia degli insiemi misurabili E di R^{n+1}, contenuti nel cilindro $\Omega \times R = \{(x, t)\colon x \in \Omega, t \in R\}$, e verificanti le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &(x, 0) \in E \qquad \forall x \in \Omega\,, \\ &(x, t) \in E \Rightarrow (x, s) \in E \qquad \forall s < t\,, \\ &P(\tilde{E}) = \int_{R^{n+1}} |D\varphi_{\tilde{E}}| < +\infty\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove si è posto:

$$\tilde{E} = \{(x, t) \in E\colon t \geqslant 0\}\,. \tag{1.4}$$

Consideriamo infine il funzionale:

$$\mathcal{F}_\alpha(E) = \int_{\Omega \times R} |D\varphi_E| - \alpha \int_{\partial\Omega \times R} |D\varphi_{\tilde{E}}| + \int_{\Omega \times R} t\varphi_{\tilde{E}}(x, t)\,dx\,dt\,, \tag{1.5}$$

definito per $E \in \mathcal{G}$ e $\alpha \in R$.

È immediato riconoscere che, per $\alpha \leqslant 0$, l'insieme $E = \{(x, t)\colon x \in \Omega, t \leqslant 0\}$ realizza il minimo del funzionale in esame nella classe $\mathcal{G}$. Per contro, nel caso $\alpha > 1$ si possono facilmente trovare esempi che comportano la non limitatezza del funzionale nella classe $\mathcal{G}$ (1). Nel seguito ci limiteremo quindi al caso $0 < \alpha \leqslant 1$.

---

(1) Per il significato fisico della costante α si rimanda ad [1].

Formuliamo adesso le seguenti ipotesi:

$$H_n(\partial\Omega) = 0 \text{ (}^2\text{)}; \tag{1.6}$$

esiste $N > 0$ tale che, $\forall L \subset \Omega$, L misurabile,

$$\int_{\partial\Omega} |D\varphi_L| \leqslant \int_{\Omega} |D\varphi_L| + NH_n(L) . \tag{1.7}$$

In particolare (per $L = \Omega$), le (1.6), (1.7) esprimono l'ipotesi che il perimetro di Ω è finito.

Talvolta scriveremo la diseguaglianza in (1.7) nel modo seguente:

$$P(L) \leqslant 2P_\Omega(L) + NH_n(L) , \tag{1.8}$$

dove al solito $P(L) = \int_{R^n} |D\varphi_L|$ è il perimetro di L.

È chiaro che le due forme sono equivalenti, essendo $P(L) = P_{\partial\Omega}(L) + P_\Omega(L)$ $\forall L \subset \Omega$ (si veda (1.1)).

Nei paragrafi successivi dimostreremo che, con la ulteriore ipotesi $0 < \alpha < 1$, il funzionale considerato ha minimo nella classe $\mathcal{G}$.

Prima di finire questa parte, analizziamo brevemente le ipotesi che abbiamo appena enunciato.

La (1.6) è piuttosto naturale in relazione al problema considerato mentre la (1.7), che è fondamentale negli sviluppi successivi, è la sola ipotesi di regolarità che viene assunta.

In generale, domini che presentino punte verso l'esterno non soddisfano tale condizione, mentre domini la cui frontiera abbia curvatura limitata la verificano (si veda a questo proposito M. Miranda [7], teorema nell'appendice).

Il fatto che l'ipotesi (1.7) esprima sostanzialmente una limitazione della curvatura della frontiera del dominio, è chiarito nella proposizione che segue; in essa si dimostra che la « condizione di sfera interna » di R. Finn e C. Gerhardt (si veda [4], [5]) implica la validità delle relazioni (1.6), (1.7).

PROPOSIZIONE. Sia $\Omega \subset R^n$ aperto e limitato, verificante la condizione:

$$\text{esiste } \varrho > 0 \text{ tale che } x \in \Omega \Rightarrow x \in B_\varrho \subset \Omega . \tag{1.9}$$

---

(2) H_s è la misura s-dimensionale di Hausdorff.

Allora valgono (1.6) e (1.7), precisamente:

$$P_{\partial\Omega}(L) \leqslant P_{\Omega}(L) + n\varrho^{-1}H_n(L) \tag{1.10}$$

per ogni L misurabile contenuto in Ω.

DIMOSTRAZIONE. Divideremo la dimostrazione in alcuni passi successivi.

(i) Notiamo intanto che (1.9) equivale alla seguente condizione:

$$\text{esiste } \varrho > 0, \text{ esiste } \{x^i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega, \text{ tale che } \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\varrho(x^i)\,. \tag{1.11}$$

Inoltre, ogni punto della frontiera di Ω appartiene alla chiusura di qualche $B_\varrho \subset \Omega$.

Sia infatti $x \in \partial\Omega$, sia $\{x^j\}_j \subset \Omega$ convergente ad x, sia $\{y^j\}_j$ tale che $x^j \in B_\varrho(y^j) \subset \Omega$ $\forall j$.

A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre $\{y^j\}_j$ convergente ad $y \in \bar{\Omega}$. È immediato verificare che $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) = \varrho = |x-y|$: infatti, $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) = \lim_{j\to+\infty} \operatorname{dist}(y^j, \partial\Omega) \geqslant \varrho$, mentre $\forall j$ vale $|x-y| \leqslant |x-x^j| + |x^j-y^j| + |y^j-y|$, da cui risulta $|x-y| < \varrho + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Si noti che il reciproco può essere falso; ad esempio, posto $K = \{(x_1, x_2) \in R^2 \colon x_2 = |x_1| \leqslant 1\}$ e posto $\Omega = B_3(0) - K$, si ha $x \in \partial\Omega \Rightarrow x \in \bar{B}_1$, con $B_1 \subset \Omega$, ma non esiste $\varrho > 0$ tale da verificare la (1.9).

(ii) La frontiera di Ω ha densità non superiore ad $\frac{1}{2}$ quasi ovunque in R^n, ovvero, posto

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\operatorname{mis}(\partial\Omega \cap B_\varepsilon(x))}{\operatorname{mis}(B_\varepsilon(x))}\,,$$

(il limite esiste per quasi ogni $x \in R^n$), risulta $0 \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Questo è ovvio se $x \notin \partial\Omega$; in caso contrario, da (i) esiste $B_\varrho \subset \Omega$, con $x \in \bar{B}_\varrho$, pertanto vale ancora

$$\max\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\operatorname{mis}(\partial\Omega \cap B_\varepsilon(x))}{\operatorname{mis}(B_\varepsilon(x))} \leqslant \tfrac{1}{2}\,.$$

Questo dimostra (1.6), essendo $\operatorname{mis}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \theta(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) Passiamo a dimostrare la (1.8) che, come abbiamo osservato, è equivalente alla (1.7). Per questo, supponiamo dapprima che Ω sia unione di una successione crescente di aperti verificanti (1.8):

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j\,, \qquad \text{con } \Omega_j \text{ aperto} \subset \Omega_{j+1} \qquad \forall j\,,$$

tale che, qualunque sia j e qualunque sia L misurabile contenuto in Ω_j, valga:

$$P(L) \leqslant 2P_{\Omega_j}(L) + N \operatorname{mis}(L)\,. \tag{1.12}$$

In queste ipotesi, sia L misurabile $\subset \Omega$, e poniamo $L_j = L \cap \Omega_j$. Essendo $P_{\Omega_j}(L) = P_{\Omega_j}(L_j)$, da (1.12) risulta $\forall j$:

$$P(L_j) \leqslant 2P_{\Omega_j}(L) + N \operatorname{mis}(L_j)\,. \tag{1.13}$$

Essendo inoltre $L = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$, $L_j \subset L_{j+1} \subset L$ $\forall j$, si ha subito:

$$\begin{aligned} \operatorname{mis}(L) &= \lim_{i \to +\infty} \operatorname{mis}(L_j)\,, \\ P_\Omega(L) &= \lim_{j \to +\infty} P_{\Omega_j}(L)\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Osservato che L_j converge ad L in L^1, da (1.13), (1.14) e dalla semicontinuità del perimetro ([8], pag. 8) si ricava allora:

$$P(L) \leqslant \min_{j \to +\infty} \lim P(L_j) \leqslant 2P_\Omega(L) + N \operatorname{mis}(L)\,. \tag{1.15}$$

Si può dunque affermare che, se gli aperti Ω_j verificano l'ipotesi (1.7) con la medesima costante N, anche $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ la verifica, sempre con la medesima costante.

(iv) Per concludere la dimostrazione, basta costruire una successione $\{\Omega_j\}_j$ del tipo considerato in (iii).

Per far questo, tenendo presente la (1.11), poniamo $\Omega_j = \bigcup_{i=1}^{j} B_\varrho(x^i)$.

Rimane da verificare la validità della (1.8) per ogni Ω_j. Procediamo per induzione sull'indice j.

Sia $j=1$ e supponiamo per semplicità $\Omega_j = B = B_\varrho(0)$. Posto $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \varrho - |x|$, $B^* = B - \{0\}$, si ha, per note proprietà della funzione distanza (si veda [9], pag. 420):

$$\begin{aligned} &d(x) \in C^2(B^*)\,, \\ &-\operatorname{div}(Dd(x)) = \frac{n-1}{\varrho - d(x)} \quad \forall x \in B^*\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Sia allora L misurabile $\subset B$, con $P_B(L) < +\infty$; con semplici calcoli (si veda [5], lemma 1) si trova:

$$\begin{aligned} \varrho \int_{\partial B} \varphi_L(x)\, dH_{n-1} &= -\int_B \operatorname{div}\{\varphi_L(x)(\varrho - d(x))\, Dd(x)\}\, dx \\ &\leqslant n \int_B \varphi_L(x)\, dx + \varrho \int_B |D\varphi_L| \end{aligned} \tag{1.17}$$

e quindi

$$\int_{\partial B} \varphi_L(x)\, dH_{n-1} \leqslant \int_B |D\varphi_L| + n\varrho^{-1} \int_B \varphi_L(x)\, dx \tag{1.18}$$

che è proprio la (1.7) con $N = n\varrho^{-1}$.

Supponiamo ora di aver verificato la condizione per un certo $j \geqslant 1$ e consideriamo $\Omega_{j+1} = \Omega_j \cup B$, dove B sta al posto di $B_\varrho(x^{j+1})$.

Sia al solito L misurabile $\subset \Omega_{j+1}$, e poniamo:

$$\begin{aligned} E &= \partial\Omega_j \cap B \\ F &= \partial\Omega_j - B \\ G &= \partial B - \Omega_j \\ S &= L \cap \Omega_j \\ T &= L - \Omega_j\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Osservato che Ω_j è aperto, con frontiera lipschitziana salvo eventualmente in un insieme finito di punti, possiamo scrivere (si veda

M. Miranda [10]):

$$
(1.20)\qquad
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_j \cup B} |D\varphi_L| = \int_{\Omega_j} |D\varphi_S| + \int_{B-\overline{\Omega}_j} |D\varphi_T| + \int_E |\varphi_S(x) - \varphi_T(x)|\, dH_{n-1} \\
&\int_{\partial(\Omega_j \cup B)} \varphi_L(x)\, dH_{n-1} = \int_F \varphi_S(x)\, dH_{n-1} + \int_G \varphi_T(x)\, dH_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

Dall'ipotesi induttiva si ottiene inoltre:

$$
(1.21)\qquad
\begin{aligned}
&\int_F \varphi_S(x)\, dH_{n-1} \leqslant n\varrho^{-1}\,\mathrm{mis}(S) + \int_{\Omega_j} |D\varphi_S| - \int_E \varphi_S(x)\, dH_{n-1} \\
&\int_G \varphi_T(x)\, dH_{n-1} = \int_{\partial B} \varphi_T(x)\, dH_{n-1} \leqslant n\varrho^{-1}\,\mathrm{mis}(T) + \int_B |D\varphi_T| \\
&\int_B |D\varphi_T| = \int_E \varphi_T(x)\, dH_{n-1} + \int_{B-\overline{\Omega}_j} |D\varphi_T|\,.
\end{aligned}
$$

Da questo gruppo di relazioni si ricava facilmente:

$$
(1.22)\qquad \int_{\partial\Omega_{j+1}} \varphi_L(x)\, dH_{n-1} \leqslant n\varrho^{-1}\,\mathrm{mis}(L) + \int_{\Omega_{j+1}} |D\varphi_L|
$$

che, per quanto si è visto, conclude la dimostrazione.

2. Limitatezza del funzionale.

Se A è un aperto di R^n, diremo che $f \in BV(A)$ se $f \in L^1(A)$ e le sue derivate (nel senso delle distribuzioni) sono misure di Radon finite su A.

Per la variazione totale del gradiente della f sui boreliani di R^n valgono notazioni e relazioni analoghe alle (1.1), (1.2); si veda ad esempio M. Miranda [11].

Incominciamo col dimostrare alcuni lemmi preliminari.

LEMMA 2.1. Se $f \in BV(R^n \times R^m)$ e K è un compatto di R^n, vale:

$$
(2.1)\qquad \int_{K \times R^m} |D_y f| = \int_K dx \int_{R^m} |Df_x|\,,
$$

dove con $D_y f$ indichiamo il gradiente della f relativo alle sole variabili $y \in R^m$, mentre con f_x indichiamo la funzione $f(x, \cdot)\colon R^m \to R$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo ([12], teorema 3.3) che se A e B sono aperti, con $A \subset R^n$ e $B \subset R^m$, e se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A \times B)$, vale:

$$\int_{A \times B} |D_y f| = \int_A dx \int_B |Df_x| \,. \tag{2.2}$$

Consideriamo una successione $\{A_j\}_j$ decrescente verso K, ossia tale che:

$$\begin{aligned} &A_j \text{ aperto limitato} \quad \forall j\,, \\ &A_j \supset \overline{A}_{j+1} \supset K \quad \forall j\,, \\ &\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = K\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Gli insiemi $\Omega_j = A_j \times R^m$ sono pure aperti e verificano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} &\Omega_j \supset \Omega_{j+1} \supset K \times R^m \quad \forall j\,, \\ &\bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j = K \times R^m\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Per quanto detto all'inizio di questo paragrafo, risulta:

$$\int_{K \times R^m} |D_y f| = \lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega_j} |D_y f| \,. \tag{2.5}$$

Dalla (2.2) si deduce allora:

$$\int_{\Omega_j} |D_y f| = \int_{A_j} dx \int_{R^m} |Df_x| \,. \tag{2.6}$$

D'altro canto, posto:

$$\begin{aligned} g_j(x) &= \varphi_{A_j}(x) \int_{R^m} |Df_x| \\ g(x) &= \varphi_K(x) \int_{R^m} |Df_x| \,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

si ottiene dalle (2.3):

$$
(2.8) \qquad \begin{aligned} & g_j \in L^1(R^n) \qquad \forall j\,, \\ & 0 \leqslant g_j \leqslant g_1 \qquad \forall j\,, \\ & g(x) = \lim_{j \to +\infty} g_j(x) \qquad \forall x\,. \end{aligned}
$$

Dal teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata e dalle relazioni (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) precedenti, si ottiene dunque la (2.1). La dimostrazione è così conclusa.

LEMMA 2.2. Nelle stesse ipotesi del lemma 2.1, vale:

$$
(2.9) \qquad \int_{K \times R^m} |D_x f| = \int_{R^m} dy \int_K |Df_y|\,.
$$

DIMOSTRAZIONE. Procede nello stesso modo della dimostrazione del lemma 2.1; al posto della relazione (2.2) si usa la seguente, valida nelle medesime ipotesi:

$$
(2.10) \qquad \int_{A \times B} |D_x f| = \int_B dy \int_A |Df_y|\,.
$$

Inoltre si tien conto del fatto che $|D_x f|$ e $|Df_y|$ sono misure di Radon finite su $R^n \times R^m$ e rispettivamente su R^n.

LEMMA 2.3. Con le notazioni e le ipotesi del paragrafo 1, sia $F \subset \Omega \times R$, misurabile e di perimetro finito. Valgono allora le seguenti relazioni:

$$
(2.11) \qquad \int_{\Omega \times R} |D\varphi_F| \geqslant \int_R dt \int_\Omega |D\varphi_{F_t}|\,,
$$

$$
(2.12) \qquad \int_{\partial\Omega \times R} |D\varphi_F| = \int_R dt \int_{\partial\Omega} |D\varphi_{F_t}|\,,
$$

dove si è posto $F_t = \{x \in R^n\colon (x, t) \in F\}$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi assunte segue subito $F_t \subset \Omega$, F_t misurabile e di perimetro finito per quasi ogni $t \in R$.

Inoltre, $\varphi_F \in BV(R^{n+1})$, come si può vedere utilizzando la seguente

diseguaglianza isoperimetrica ([13], teorema VI):

$$\min\{H_{n+1}(F), H_{n+1}(R^{n+1}-F)\} \leqslant P(F)^{n/(n-1)} .$$

È anche chiaro che, se $f \in BV(R^{n+1})$, allora per ogni boreliano $B \subset R^{n+1}$ vale:

$$\int_B |D_x f| \leqslant \int_B |Df| \leqslant \int_B |D_x f| + \int_B |D_t f| . \tag{2.13}$$

Da questa relazione e dalla (2.10) segue:

$$\int_{\Omega \times R} |D\varphi_F| \geqslant \int_{\Omega \times R} |D_x \varphi_F| = \int_R dt \int_\Omega |D(\varphi_F)_t| \tag{2.14}$$

e quindi la (2.11), visto che

$$(\varphi_F)_t = \varphi_F(\cdot, t) = \varphi_{F_t} . \tag{2.15}$$

Per quanto riguarda la (2.12), dall'ipotesi (1.6) e dal lemma 2.1 segue subito

$$\int_{\partial\Omega \times R} |D_t \varphi_F| = 0 . \tag{2.16}$$

Dalle (2.13), (2.16) si ha allora:

$$\int_{\partial\Omega \times R} |D\varphi_F| = \int_{\partial\Omega \times R} |D_x \varphi_F| . \tag{2.17}$$

Per concludere la dimostrazione, basta dunque applicare il lemma 2.2 e ricordare la (2.15).

A questo punto possiamo enunciare il seguente

Teorema 2.1. Con le notazioni e le ipotesi del paragrafo 1, se $0 < \alpha \leqslant 1$, si ha:

$$\inf\{\mathcal{F}_\alpha(E) : E \in \mathfrak{G}\} > -\infty . \tag{2.18}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $E \in \mathcal{G}$ vale intanto, tenendo presente la (1.4),

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_t = \emptyset\,, \quad E_t = \Omega && \text{se } t < 0\,; \\ &\tilde{E}_t = E_t \subset \Omega && \text{se } t \geqslant 0\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Inoltre, come si è osservato nella dimostrazione del lemma 2.3, $\tilde{E}_t$ è misurabile ed ha perimetro finito per quasi ogni $t \in R$.

Dalle (2.10), (2.13), (2.15) e (2.19) si ottiene:

$$\int_{\Omega \times R} |D\varphi_E| \geqslant \int_{\Omega \times R} |D_x \varphi_E| = \int_R dt \int_\Omega |D\varphi_{E_t}| = \int_R dt \int_\Omega |D\varphi_{\tilde{E}_t}|\,. \tag{2.20}$$

Essendo

$$\int_{\Omega \times R} t\varphi_{\tilde{E}}(x, t)\, dx\, dt = \int_{\tilde{E}} t\, dx\, dt = \int_R t H_n(\tilde{E}_t)\, dt \tag{2.21}$$

e ricordando (2.12), (2.19) e (2.20), abbiamo

$$\mathcal{F}_\alpha(E) \geqslant \int_0^{+\infty} dt \int_\Omega |D\varphi_{\tilde{E}_t}| - \alpha \int_0^{+\infty} dt \int_{\partial\Omega} |D\varphi_{\tilde{E}_t}| + \int_0^{+\infty} t H_n(\tilde{E}_t)\, dt\,. \tag{2.22}$$

L'ipotesi (1.7) permette ora di scrivere

$$\int_{\partial\Omega} |D\varphi_{\tilde{E}_t}| \leqslant \int_\Omega |D\varphi_{\tilde{E}_t}| + N H_n(\tilde{E}_t) < +\infty\,, \tag{2.23}$$

relazione che, come si è visto, è valida per quasi ogni $t \in R$. D'altra parte, essendo $0 < \alpha \leqslant 1$, vale anche

$$\alpha \int_{\partial\Omega} |D\varphi_{\tilde{E}_t}| \leqslant \int_\Omega |D\varphi_{\tilde{E}_t}| + t H_n(\tilde{E}_t)\,, \tag{2.24}$$

qualunque sia $t \geqslant N > 0$.

Da queste due ultime relazioni si ottiene:

$$\int_0^N dt \int_\Omega |D\varphi_{\tilde{E}_t}| - \alpha \int_0^N dt \int_{\partial\Omega} |D\varphi_{\tilde{E}_t}| \geqslant -N \int_0^N H_n(\tilde{E}_t)\, dt \tag{2.25}$$

$$\int_N^{+\infty} dt \int_\Omega |D\varphi_{\tilde{E}_t}| - \alpha \int_N^{+\infty} dt \int_{\partial\Omega} |D\varphi_{\tilde{E}_t}| + \int_N^{+\infty} t H_n(\tilde{E}_t)\, dt \geqslant 0 \,. \tag{2.26}$$

Dalla (2.22) risulta allora:

$$\mathcal{F}_\alpha(E) \geqslant -N \int_0^N H_n(\tilde{E}_t)\, dt \geqslant -N^2 H_n(\Omega) \,, \tag{2.27}$$

qualunque sia $E \in \mathcal{G}$.

Il teorema è così dimostrato.

3. Compattezza.

Fissato α, con $0 < \alpha \leqslant 1$, si ha dunque, grazie al teorema 2.1,

$$l = \inf\{\mathcal{F}_\alpha(E) \colon E \in \mathcal{G}\} > -\infty \,. \tag{3.1}$$

In queste condizioni, diremo che $\{E_j\}_j$ è una successione minimizzante per $\mathcal{F}_\alpha$ se accade che

$$\begin{aligned} &E_j \in \mathcal{G} \qquad \forall j \,, \\ &\lim_{j \to +\infty} \mathcal{F}_\alpha(E_j) = l \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Osserviamo che $E_0 = \{(x, t) \colon x \in \Omega, t \leqslant 0\} \in \mathcal{G}$, e che $\mathcal{F}_\alpha(E_0) = H_n(\Omega)$ per ogni $\alpha \in R$; non è quindi restrittivo supporre che per gli insiemi della successione minimizzante valga anche:

$$\mathcal{F}_\alpha(E_j) \leqslant H_n(\Omega) \qquad \forall j \,. \tag{3.3}$$

Come primo risultato abbiamo il seguente

LEMMA 3.1. Sia $0 < \alpha < 1$, sia $\{E_j\}_j$ una successione minimizzante per $\mathcal{F}_\alpha$, e poniamo:

$$\gamma_j = \int_{\Omega \times R} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\Omega \times R} t \varphi_{\tilde{E}_j}(x, t)\, dx\, dt \,. \tag{3.4}$$

Allora $\{\gamma_j\}_j$ è una successione reale limitata.

DIMOSTRAZIONE. È immediato verificare che $\forall_j$ vale:

$$\mathcal{F}_\alpha(E_j) = \alpha\mathcal{F}_1(E_j) + (1-\alpha)\gamma_j \,. \tag{3.5}$$

Dalla (3.3) segue allora $\forall j$

$$(1-\alpha)\,\gamma_j \leqslant H_n(\Omega) - \alpha\mathcal{F}_1(E_j) \,. \tag{3.6}$$

D'altra parte, il teorema 2.1 (valido per $\alpha = 1$), implica in particolare (si veda la (2.27)):

$$\mathcal{F}_1(E_j) \geqslant -N^2 H_n(\Omega) \qquad \forall_j \,. \tag{3.7}$$

In conclusione si ottiene per ogni j:

$$0 \leqslant \gamma_j \leqslant \frac{1+\alpha N^2}{1-\alpha} H_n(\Omega) \,. \tag{3.8}$$

Possiamo adesso dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1. Nelle stesse ipotesi del lemma 3.1, esistono un insieme $E \in \mathcal{G}$ ed una sottosuccessione di $\{E_j\}_j$, convergente ad E in $L^1(\Omega \times R)$.

DIMOSTRAZIONE. Il lemma 3.1 esprime in particolare la limitatezza uniforme dei perimetri degli insiemi E_j nell'aperto $\Omega \times R$. Il teorema 1.10 a pag. 126 di [8], garantisce in tale ipotesi l'esistenza di una sottosuccessione della $\{E_j\}_j$, che per semplicità indicheremo ancora con il simbolo $\{E_j\}_j$, convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times R)$.

Quindi, posto $z = (x, t) \in R^{n+1}$, si ha, per ogni $A \subset\subset \Omega \times R$ (3):

$$\lim_{i,j \to +\infty} \int_A |\varphi_{E_i}(z) - \varphi_{E_j}(z)|\, dz = 0 \,. \tag{3.9}$$

Poniamo adesso, per h, k interi positivi,

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h^{-1}\} \\ C_k &= \Omega \times (0, k) \\ D_{h,k} &= \Omega_h \times (0, k) \,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

---

(3) La notazione $A \subset\subset B$ significa: A, B aperti, $\bar{A}$ compatto contenuto in B.

In queste ipotesi, osservato che

$$|\varphi_{E_i}(z) - \varphi_{E_j}(z)| \leqslant \varphi_{E_i \cup E_j}(z) \leqslant 1 \tag{3.11}$$

per ogni coppia di indici i, j e per ogni $z \in R^{n+1}$, si ottiene per ogni i, j, h, k:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times R} |\varphi_{E_i}(z) - \varphi_{E_j}(z)|\, dz &= \int_{D_{h,h}} |\ldots|\, dz + \int_{C_k - D_{h,k}} |\ldots|\, dz + \int_{(\Omega \times R) - C_k} |\ldots|\, dz \\ &\leqslant \int_{D_{h,k}} |\ldots|\, dz + H_{n+1}(C_k - D_{h,k}) + H_{n+1}(\tilde{E}_i - C_k) + H_{n+1}(\tilde{E}_j - C_k)\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'altra parte, posto

$$c = \frac{1 + \alpha N^2}{1 - \alpha} H_n(\Omega)\,,$$

si ha, sempre per il lemma 3.1,

$$\int_{\Omega \times R} t \varphi_{\tilde{E}_j}(x, t)\, dx\, dt \leqslant c \qquad \forall j\,, \tag{3.13}$$

e quindi, per ogni j, k vale:

$$c \geqslant \int_{\tilde{E}_j} t\, dx\, dt \geqslant \int_{\tilde{E}_j - C_k} t\, dx\, dt \geqslant k H_{n+1}(\tilde{E}_j - C_k)\,, \tag{3.14}$$

da cui segue $\forall j, k$

$$0 \leqslant H_{n+1}(\tilde{E}_j - C_k) \leqslant c k^{-1}\,. \tag{3.15}$$

Dalle (3.12), (3.9), (3.10) e (3.15) si ottiene

$$\lim_{i,j \to +\infty} \int_{\Omega \times R} |\varphi_{E_i}(z) - \varphi_{E_j}(z)| dz = 0\,. \tag{3.16}$$

Esistono allora un insieme misurabile $E \subset \Omega \times R$ ed una sottosuccessione estratta dalla precedente, tali da verificare:

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega \times R} |\varphi_{E_j}(z) - \varphi_E(z)| dz = 0\,, \tag{3.17}$$

dove continuiamo ad usare il simbolo $\{E_j\}_j$ anche per questa nuova sottosuccessione.

Rimane da dimostrare che E è (equivalente ad) un elemento della famiglia $\mathcal{G}$.

Dalla (3.17), a meno di passare ad una nuova sottosuccessione e di modificare E con un insieme di misura nulla, si ottiene:

$$\lim_{j\to+\infty} \varphi_{E_j}(z) = \varphi_E(z) \tag{3.18}$$

per ogni $z \in R^{n+1}$, relazione che permette di verificare facilmente le prime due condizioni della (1.3).

Per verificare la terza condizione è sufficiente dimostrare che i perimetri degli insiemi $\tilde{E}_j$ soddisfacenti la (3.17), sono uniformemente limitati: questo grazie alla già ricordata semicontinuità del perimetro rispetto alla convergenza in L^1.

Fissato l'indice j, la relazione (1.7), scritta per l'insieme

$$F_t = (\tilde{E}_j)_t = \{x \in \Omega\colon (x, t) \in \tilde{E}_j\} \tag{3.19}$$

che è misurabile e di perimetro finito per quasi ogni $t \in R$, e integrata su tutto R, diventa:

$$\int_R dt \int_{\partial\Omega} |D\varphi_{F_t}| \leqslant \int_R dt \int_\Omega |D\varphi_{F_t}| + N \int_R H_n(F_t)\, dt\,. \tag{3.20}$$

Tenendo presenti le (2.11), (2.12), dalla (3.19) e dalla (3.20) si deduce:

$$\int_{R^{n+1}} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| = \int_{\partial\Omega\times R} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\Omega\times R} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| \leqslant 2\int_{\Omega\times R} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + NH_{n+1}(\tilde{E}_j)\,, \tag{3.21}$$

relazione valida $\forall j$.

Ora è facile verificare che $\forall G \in \mathcal{G}$ risulta:

$$\left| \int_{\Omega\times R} |D\varphi_G| - \int_{\Omega\times R} |D\varphi_{\tilde{G}}| \right| \leqslant H_n(\Omega)\,. \tag{3.22}$$

Dalle (3.21), (3.22), (3.15) e dal lemma 3.1 si ottiene allora:

$$\sup_j \int_{R^{n+1}} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| < +\infty\,. \tag{3.23}$$

Per quanto visto in precedenza, questo conclude la dimostrazione del teorema.

4. Semicontinuità.

Dimostriamo qualche risultato preliminare.

LEMMA 4.1. Con le notazioni e le ipotesi del paragrafo 1, sia $f \in BV(R^n)$ una funzione non negativa, con $f(x) = 0$ per $x \in R^n - \Omega$. Vale allora:

$$\int_{\partial\Omega} |Df| \leqslant \int_{\Omega} |Df| + N \int_{\Omega} f(x)\, dx\,, \tag{4.1}$$

dove N è la costante che compare in (1.7).

DIMOSTRAZIONE. Posto per $t \in R$, $S_t = \{x \in R^n : f(x) \geqslant t\}$, risulta:

$$\begin{aligned} S_t &= R^n \quad \text{se } t \leqslant 0 \\ S_t &\subset \Omega \quad \text{se } t > 0\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dalla (1.8) si ottiene allora (si veda [14], teorema 1.6):

$$\begin{aligned} \int_{R^n} |Df| &= \int_0^{+\infty} P(S_t)\, dt \\ &\leqslant 2 \int_0^{+\infty} P_\Omega(S_t)\, dt + N \int_0^{+\infty} H_n(S_t)\, dt \\ &= 2 \int_{\Omega} |Df| + N \int_{\Omega} f(x)\, dx\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Per concludere la dimostrazione basta osservare che, nelle ipotesi fatte,

$$\int_{R^n} |Df| = \int_{\Omega} |Df| + \int_{\partial\Omega} |Df| < +\infty\,. \tag{4.4}$$

LEMMA 4.2. Sia $L \subset \Omega$, misurabile e di perimetro finito, sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste una costante $c(\varepsilon, \Omega)$, indipendente da L, tale che:

$$\int_{\partial\Omega} |D\varphi_L| \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} |D\varphi_L| + c(\varepsilon, \Omega) \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_L(x)\, dx \tag{4.5}$$

dove si è indicato con Ω_ε l'aperto:

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\} . \tag{4.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo, per $\delta > 0$,

$$D_\delta = \{x \in R^n \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\} . \tag{4.7}$$

Risulta in particolare $\partial\Omega \subset D_{\varepsilon/2} \subset\subset D_\varepsilon$.
Consideriamo poi una funzione $\tau \in C_0^\infty(D_\varepsilon)$, tale che

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \tau(x) \leqslant 1 \qquad \forall x . \\ &\tau(x) = 1 \qquad \text{se } x \in D_{\varepsilon/2} , \end{aligned} \tag{4.8}$$

e poniamo $f(x) = \tau(x)\varphi_L(x)$, $\forall x \in R^n$. Risulta evidentemente:

$$\begin{aligned} &f \in BV(R^n) \\ &0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad \forall x \\ &f(x) = 0 \qquad \text{se } x \in R^n - \Omega \\ &f(x) = \varphi_L(x) \quad \text{se } x \in D_{\varepsilon/2} . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dal lemma 4.1 e dall'ipotesi $\tau \in C_0^\infty(D_\varepsilon)$ segue:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |D(\tau\varphi_L)| &\leqslant \int_\Omega |D(\tau\varphi_L)| + N\int_\Omega \tau(x)\varphi_L(x)\,dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |D(\tau\varphi_L)| + N\int_{\Omega_\varepsilon} \tau(x)\varphi_L(x)\,dx . \end{aligned} \tag{4.10}$$

D'altra parte vale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |D(\tau\varphi_L)| &\leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} \tau(x)|D\varphi_L| + \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_L(x)|D\tau(x)|dx \\ &\leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} |D\varphi_L| + \sup_{x\in R^n}|D\tau(x)| \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_L(x)\,dx , \end{aligned} \tag{4.11}$$

dove $\int_{\Omega_\varepsilon} \tau(x)|D\varphi_L|$ rappresenta l'integrale della funzione $\tau(x)$ rispetto alla misura $|D\varphi_L|$.

Posto allora:

$$c(\varepsilon, \Omega) = N + \sup_{x \in R^n} |D\tau(x)| , \tag{4.12}$$

si ottiene dalle (4.10), (4.11) la relazione:

$$\int_{\partial\Omega} |D(\tau\varphi_L)| \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} |D\varphi_L| + c(\varepsilon, \Omega) \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_L(x)\, dx . \tag{4.13}$$

Dalle (4.9) risulta poi

$$\int_A |D(\tau\varphi_L)| = \int_A |D\varphi_L| \tag{4.14}$$

qualunque sia l'aperto A, con $\partial\Omega \subset A \subset D_{\varepsilon/2}$. Quindi, per la regolarità delle misure in gioco, si ottiene:

$$\int_{\partial\Omega} |D(\tau\varphi_L)| = \int_{\partial\Omega} |D\varphi_L| \tag{4.15}$$

che con la (4.13) conclude la dimostrazione.

LEMMA 4.3. Siano $E, F \in \mathcal{G}$, indichiamo con $E \triangle F = (E \cup F) - (E \cap F)$ la loro differenza simmetrica. Vale allora, per ogni aperto $A \subset R^{n+1}$:

$$\int_A |D\varphi_{E \triangle F}| \leqslant \int_A |D\varphi_E| + \int_A |D\varphi_F| . \tag{4.16}$$

Vale inoltre:

$$\left| \int_{\partial\Omega \times R} |D\varphi_{\tilde{E}}| - \int_{\partial\Omega \times R} |D\varphi_{\tilde{F}}| \right| \leqslant \int_{\partial\Omega \times R} |D\varphi_{\widetilde{E \triangle F}}| . \tag{4.17}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo subito che in queste ipotesi si ha:

$$E \triangle F = \tilde{E} \triangle \tilde{F} = \widetilde{E \triangle F} . \tag{4.18}$$

In generale, se H, K sono sottoinsiemi misurabili di R^{n+1} ed A è un aperto contenuto in R^{n+1}, essendo $\varphi_{H \triangle K} = \varphi_{H \cup K} - \varphi_{H \cap K}$, si ot-

tiene dalla (1.1):

$$\int_A |D\varphi_{H\triangle K}| \leqslant \int_A |D\varphi_{H\cup K}| + \int_A |D\varphi_{H\cap K}| \,. \tag{4.19}$$

Dalla prima diseguaglianza dimostrata nell'appendice di [15] (si veda anche [8], teorema 3.5, a pagina 18), segue allora:

$$\int_A |D\varphi_{H\triangle K}| \leqslant \int_A |D\varphi_H| + \int_A |D\varphi_K| \tag{4.20}$$

che dimostra la (4.16).

La (4.20), scritta per $H = \tilde{E} \triangle \tilde{F}$, $K = \tilde{F}$ e successivamente per $H = \tilde{E} \triangle \tilde{F}$, $K = \tilde{E}$ (in modo che $H \triangle K$ sia nel primo caso $\tilde{E}$ e nel secondo $\tilde{F}$), conduce alle relazioni:

$$\begin{aligned} &\int_A |D\varphi_{\tilde{E}}| \leqslant \int_A |D\varphi_{\tilde{E}\triangle\tilde{F}}| + \int_A |D\varphi_{\tilde{F}}| < +\infty \\ &\int_A |D\varphi_{\tilde{F}}| \leqslant \int_A |D\varphi_{\tilde{E}\triangle\tilde{F}}| + \int_A |D\varphi_{\tilde{E}}| < +\infty \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

La (4.17) si ottiene allora facilmente, considerando la solita successione di aperti di R^{n+1}, decrescente verso $\partial\Omega \times R$.

Siamo adesso in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA 4.1. Sia $0 < \alpha \leqslant 1$, sia $\{E_j\}_j$ una successione di elementi di $\mathfrak{S}$, convergente in $L^1(\Omega \times R)$ verso l'insieme $E \in \mathfrak{S}$. Vale allora:

$$\mathcal{F}_\alpha(E) \leqslant \min\lim_{j\to+\infty} \mathcal{F}_\alpha(E_j) \,. \tag{4.22}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\varepsilon > 0$; consideriamo poi un indice j, e poniamo per semplicità $F = E \triangle E_j$.

Dalle (4.18), (4.20) si ha $P(F) < +\infty$; dal lemma 4.2 si ottiene allora, per quasi ogni $t \in R$:

$$\int_{\partial\Omega} |D\varphi_{F_t}| \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} |D\varphi_{F_t}| + c(\varepsilon, \Omega) \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_{F_t}(x)\, dx \,. \tag{4.23}$$

Se si integra questa relazione su tutto R, tenendo conto delle (2.11),

(2.12), si ottiene:

$$\int_{\partial\Omega\times R} |D\varphi_{\widetilde{E\triangle E_j}}| \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon\times R} |D\varphi_{E\triangle E_j}| + c(\varepsilon, \Omega)\int_{\Omega_\varepsilon\times R} \varphi_{\widetilde{E\triangle E_j}}(x, t)\, dx\, dt \tag{4.24}$$

che è valida $\forall j$.

Dal lemma 4.3, dalla (4.24) e dall'ipotesi su α risulta che

$$-\alpha\int_{\partial\Omega\times R} |D\varphi_{\tilde{E}}| \leqslant \int_{\Omega'_\varepsilon\times R} |D\varphi_E| + \int_{\Omega'_\varepsilon\times R} |D\varphi_{E_j}| - \alpha\int_{\partial\Omega\times R} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + \\ + c(\varepsilon, \Omega)\int_{\Omega_\varepsilon\times R} \varphi_{\widetilde{E\triangle E_j}}(x, t)\, dx\, dt\,, \tag{4.25}$$

dove si è posto $\Omega'_\varepsilon = \{x\in\Omega\colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\leqslant\varepsilon\}\supset\Omega_\varepsilon$.

D'altra parte, esisterà un indice $j_0 = j_0(\varepsilon)$, tale che risulti:

$$\int_{(\Omega-\Omega'_\varepsilon)\times R} |D\varphi_E| < \int_{(\Omega-\Omega'_\varepsilon)\times R} |D\varphi_{E_j}| + \varepsilon \tag{4.26}$$

$$\int_{\Omega\times R} t\varphi_{\tilde{E}}(x, t)\, dx\, dt < \int_{\Omega\times R} t\varphi_{\tilde{E}_j}(x, t)\, dx\, dt + \varepsilon\,, \tag{4.27}$$

non appena $j > j_0(\varepsilon)$, grazie alla semicontinuità dei funzionali in gioco.

Sommando membro a membro le diseguaglianze (4.25), (4.26), (4.27), nonchè la quantità $\int_{\Omega'_\varepsilon\times R} |D\varphi_E|$, si ottiene per $j > j_0(\varepsilon)$:

$$\mathcal{F}_\alpha(E) < \mathcal{F}_\alpha(E_j) + 2\int_{\Omega'_\varepsilon\times R} |D\varphi_E| + \\ + c(\varepsilon, \Omega)\int_{\Omega_\varepsilon\times R} \varphi_{\widetilde{E\triangle E_j}}(x, t)\, dx\, dt + 2\varepsilon\,. \tag{4.28}$$

D'altra parte, ricordando la (4.18) ed il fatto che per ipotesi E è il limite in $L^1(\Omega\times R)$ della successione $\{E_j\}_j$, esisterà un indice $j_1(\varepsilon) > j_0(\varepsilon)$, tale che:

$$c(\varepsilon, \Omega)\int_{\Omega_\varepsilon\times R} \varphi_{\widetilde{E\triangle E_j}}(x, t)\, dx\, dt < \varepsilon \tag{4.29}$$

non appena $j > j_1(\varepsilon)$.

Quindi, per quell'ε fissato e per $j > j_1(\varepsilon)$ vale:

$$\mathcal{F}_\alpha(E) < \mathcal{F}_\alpha(E_j) + 2\int_{\Omega_{2\varepsilon}\times R} |D\varphi_E| + 3\varepsilon\,. \tag{4.30}$$

Consideriamo ora una successione $\{\varepsilon_h\}_h$ di numeri reali positivi, decrescente e convergente a zero. Essendo $\int_{\Omega\times R}|D\varphi_E| < +\infty$ (si veda la (3.22)), anche la successione $\left\{\int_{\Omega_{2\varepsilon_h}\times R}|D\varphi_E|\right\}_h$ risulta decrescente e convergente a zero.

Sia finalmente σ un arbitrario numero reale positivo. Per quanto si è appena detto, esisterà $\eta = \eta(\sigma)$ positivo, tale che:

$$\int_{\Omega_\eta\times R}|D\varphi_E| < \sigma/4\,, \qquad \eta < \sigma/3\,. \tag{4.31}$$

Posto $\varepsilon = \eta/2$, grazie alla (4.30) è possibile trovare j_1 (dipendente da σ) tale che, $\forall j > j_1$ valga:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(E) &< \mathcal{F}_\alpha(E_j) + 2\int_{\Omega_\eta\times R}|D\varphi_E| + 3\eta/2 \\ &< \mathcal{F}_\alpha(E_j) + \sigma\,. \end{aligned} \tag{4.32}$$

La dimostrazione è quindi conclusa.

5. Esistenza di soluzioni.

Dai risultati dei paragrafi precedenti segue immediatamente il

TEOREMA 5.1. Nelle ipotesi del paragrafo 1 e con $0 < \alpha < 1$, il funzionale $\mathcal{F}_\alpha$ possiede minimo nella classe $\mathcal{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, $\mathcal{F}_\alpha$ è inferiormente limitato in $\mathcal{G}$ (teorema 2.1) e per il teorema 3.1, da ogni successione minimizzante $\{E_j\}_j$ si può estrarre una sottosuccessione $\{E_{j(s)}\}_s$, convergente in $L^1(\Omega\times R)$ ad un insieme E di $\mathcal{G}$; dal teorema 4.1 si ha allora:

$$\mathcal{F}_\alpha(E) \leqslant \min_{s\to+\infty}\lim \mathcal{F}_\alpha(E_{j(s)}) = \inf\{\mathcal{F}_\alpha(F)\colon F\in\mathcal{G}\}\,.$$

Quindi E realizza il minimo di $\mathcal{F}_\alpha$ in $\mathcal{G}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. FINN, *Capillarity phenomena*, Uspehi Mat. Nauk., **29** (1974), pp. 131-152.

[2] M. EMMER, *Esistenza, unicità e regolarità nelle superfici di equilibrio nei capillari*, Annali Univ. Ferrara, **18**(1973), pp. 79-94.

[3] L. PEPE, *Analiticità delle superfici di equilibrio dei capillari in ogni dimensione*, Symposia Mathematica, 1974.

[4] R. FINN - C. GERHARDT, *The Internal Sphere Condition and the Capillary Problem*.

[5] C. GERHARDT, *Existence and regularity of capillary surfaces*, Boll. Un. Mat. Ital., (4), **10** (1974), pp. 317-335.

[6] E. GIUSTI, *Boundary value problems for non-parametric surfaces of prescribed mean curvature*, in corso di stampa.

[7] M. MIRANDA, *Dirichlet problem with L^1 data for the non-omogeneous minimal surface equation*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1974), pp. 227-241.

[8] E. DE GIORGI - F. COLOMBINI - L. C. PICCININI, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*, Ed. Sc. Norm. Sup. Pisa (1972).

[9] J. SERRIN, *The Problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A **264** (1969), pp. 413-496.

[10] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Padova, **38** (1967), pp. 238-257.

[11] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure, ecc.*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **18** (1964), pp. 27-56.

[12] M. MIRANDA, *Superfici cartesiane generalizzate, ecc.*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **18** (1964), pp. 515-542.

[13] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura $(r-1)$ dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl., **36** (1954), pp. 191-213.

[14] M. MIRANDA, *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **19** (1965), pp. 626-665.

[15] M. MIRANDA, *Un principio di massimo forte, ecc.*, Rend. Sem. Mat. Padova, **45** (1971), pp. 355-366.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 26 Maggio 1976.