

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. FUCHS

L. SALCE

## **Gruppi monotóni di successioni intere**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 56 (1976), p. 147-160

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1976\\_\\_56\\_\\_147\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__147_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Gruppi monotóni di successioni intere.

L. FUCHS - L. SALCE (\*)

Siano  $P$  il prodotto diretto ed  $S$  la somma diretta di una infinità numberabile di gruppi ciclici infiniti  $\langle \varepsilon_k \rangle$ , per  $k = 1, 2, \dots$ ; si possono allora scrivere gli elementi di  $P$  nella forma  $\sum_{k=1}^{\infty} m_k \varepsilon_k$ , con gli  $m_k$  interi. Seguendo la definizione in [3], chiameremo un sottogruppo  $T$  di  $P$  *monotóno* se soddisfa alla seguente proprietà

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \varepsilon_k \in T \quad \text{e} \quad |n_k| \leq \max_{h \leq k} (1, |m_h|) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varepsilon_k \in T$$

dove gli  $n_k$  sono interi. I sottogruppi monotóni di  $P$  (che chiameremo più brevemente gruppi *monotóni*) furono introdotti e studiati in [7] da Specker; ulteriori risultati vennero ottenuti da Reid in [5] e da Fuchs in [3].

In questa nota proseguiamo lo studio dei gruppi monotóni; nella prima parte proveremo che essi formano un sottoreticolo  $\mathfrak{C}(P)$  distributivo e completo del reticolo  $\mathfrak{L}(P)$  dei sottogruppi di  $P$  e studieremo le proprietà di  $\mathfrak{C}(P)$ . Nella seconda parte proveremo nuove proprietà della struttura dei gruppi monotóni; in particolare, se  $T$  è un gruppo monotóno diverso da  $B$ , il sottogruppo di  $P$  formato dalle successioni limitate, proveremo che  $T/S$  è isomorfo a  $P/S$ , e perciò è un gruppo algebricamente compatto; inoltre, se  $T$  è contenuto propriamente in

---

(\*) Indirizzi degli AA.: Tulane University, New Orleans, La. 70118, U.S.A. e Seminario Matematico, via Belzoni 7, 35100 Padova, Italia.

Durante la ricerca che è oggetto di questo lavoro, il secondo autore fruiwa di una borsa di studio della N.A.T.O., presso la Tulane University.

un altro gruppo monotono  $T'$ ,  $T'/T$  è isomorfo a  $\bigoplus_c \mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q}$  è il gruppo additivo dei razionali e  $c$  è il cardinale del continuo).

## 1. Il reticolo $\mathcal{G}(P)$ .

Se  $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varepsilon_k$  e  $v = \sum_{h=k}^{\infty} v_k \varepsilon_k$  sono due elementi di  $P$ , il loro estremo superiore  $u \vee v$  ed il loro estremo inferiore  $u \wedge v$  sono definiti puntualmente. Sia  $P^*$  il sottoinsieme di  $P$  formato dalle successioni  $\mathbf{t}$  positive, non decrescenti (cioè  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots$ ) e non limitate.  $P^*$  è, con le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$  indotte da  $P$ , un reticolo distributivo. Se  $T$  è un gruppo monotono diverso da  $B$ , denotiamo  $T \cap P^*$  con  $T^*$ ; anche  $T^*$  è un reticolo distributivo ( $T \neq B$  assicura che  $T^* \neq \emptyset$ ).

**DEFINIZIONE.** Sia  $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$  un sottoinsieme di  $P^*$ . Diremo che  $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$  genera il gruppo monotono  $T$  (o che  $T$  è generato da  $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$ ) se

$$T = \{\mathbf{t} \in P \mid |\mathbf{t}| \leq m(\mathbf{t}^{(i_1)} + \dots + \mathbf{t}^{(i_r)}) \quad \forall k; m \in \mathbb{N}; i_1, \dots, i_r \in I\}.$$

Si osservi che  $T$  è il minimo gruppo monotono contenente  $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$ . Diremo che  $T$  è un gruppo monotono *principale* (risp. *finitamente generato*,  $\aleph_0$ -*generato* etc...) se è generato da un solo elemento (risp. da un numero finito di elementi, da un insieme numerabile di elementi etc...); in tal caso, se  $\mathbf{t}$  è il generatore di  $T$ , scriveremo semplicemente  $T = T(\mathbf{t})$ . Un gruppo monotono finitamente generato da  $\mathbf{t}^{(1)}, \dots, \mathbf{t}^{(r)}$  è pure generato da  $\mathbf{t}^{(1)} \vee \dots \vee \mathbf{t}^{(r)}$  ed è perciò principale. Si osservi che, dati  $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in P$ ,  $T(\mathbf{t}) = T(\mathbf{t}')$  se e solo se esiste un intero positivo  $M$  tale che  $1/M \leq t_k/t'_k \leq M$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $T$  è  $\aleph_0$ -generato, si vede facilmente che si possono supporre i generatori  $\mathbf{t}^{(1)}, \dots, \mathbf{t}^{(r)}, \dots$ , ( $r \in \mathbb{N}$ ) soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$(1) \quad \mathbf{t}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{t}^{(r)} \leq \dots; t_k^{(r)} = t_k^{(k)} \text{ per ogni } k \leq r.$$

In seguito, quando avremo a che fare con gruppi monotoni  $\aleph_0$ -generati, supporremo sempre che i generatori soddisfino alle condizioni (1).

**ESEMPLI.** 1) Si può dare la definizione di generatore di un gruppo monotono anche per elementi di  $P$  (positivi e non decrescenti) limitati;

è allora evidente che  $B$ , il gruppo delle successioni limitate, è principale e generato da un arbitrario elemento limitato.

2)  $P$  ha una struttura, oltre che di gruppo, anche di anello, con la moltiplicazione definita puntualmente; ha senso perciò, dato  $\mathbf{u} \in P^*$ , considerare le sue potenze  $\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3, \dots$ . Si consideri il gruppo monotóno

$$T = T(\{\mathbf{u}^n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

$T$  è  $\aleph_0$ -generato ma non è principale: infatti è facile verificare che  $T$  è un sottoanello di  $P$ , e se fosse  $T = T(\mathbf{t})$  per un  $\mathbf{t} \in P^*$ , si avrebbe che  $\mathbf{t}^2 \notin T$ , perchè per nessun  $m \in \mathbb{N}$  si ha che  $t_k^2 < mt_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , essendo  $\mathbf{t}$  non limitato.

3)  $P$  non è  $\aleph_0$ -generato: infatti se  $T(\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}})$  non è principale, (come non è  $P$ , essendo un anello), l'elemento  $\mathbf{t} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{t}^{(n)}$  definito da  $t_k = t_k^{(k)}$  non appartiene a  $T(\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}})$ .

Date due famiglie di elementi di  $P^*$ :  $\{\mathbf{u}^{(i)}\}_{i \in I}$  e  $\{\mathbf{v}^{(j)}\}_{j \in J}$ , sono di facile verifica le formule seguenti:

$$(2) \quad T(\{\mathbf{u}^{(i)}\}_{i \in I}) \cap T(\{\mathbf{v}^{(j)}\}_{j \in J}) = T(\{\mathbf{u}^{(i)} \wedge \mathbf{v}^{(j)}\}_{i,j}),$$

$$(3) \quad T(\{\mathbf{u}^{(i)}\}_{i \in I}) + T(\{\mathbf{v}^{(j)}\}_{j \in J}) = T(\{\mathbf{u}^{(i)} \vee \mathbf{v}^{(j)}\}_{i,j}),$$

perciò l'insieme dei gruppi monotóni forma un sottoreticolo  $\mathfrak{G}(P)$  del reticolo  $\mathfrak{L}(P)$  dei sottogruppi di  $P$ . Dalle formule (2) e (3) e dalla distributività del reticolo  $P^*$  segue che  $\mathfrak{G}(P)$  è un reticolo distributivo; poichè intersezioni ed unioni (gruppali) arbitrarie di gruppi monotóni sono ancora tali,  $\mathfrak{G}(P)$  risulta essere un reticolo completo, con  $P$  elemento massimo e  $B$  elemento minimo. Specker in [7] ha provato che  $\mathfrak{G}(P)$  ha cardinalità  $2^c$ . I gruppi monotóni principali formano un sottoreticolo distributivo  $\mathfrak{F}(P)$  di  $\mathfrak{G}(P)$ , ovviamente non completo, essendo  $P$  non principale. Vedremo in seguito che  $\mathfrak{F}(P)$  ha cardinalità  $c$ .

Essendo in particolare  $\mathfrak{G}(P)$  un reitolo modulare, dati due gruppi monotóni  $T_1$  e  $T_2$ , esiste un isomorfismo reticolare  $\varphi$  tra i due intervalli in  $\mathfrak{G}(P)$ ,  $I[T_1 \vee T_2 : T_2]$  e  $I[T_1 : T_1 \wedge T_2]$ , dato da:

$$\varphi: T \mapsto T_1 \wedge T \quad \text{se} \quad T_2 \leq T \leq T_1 \vee T_2$$

con l'inverso

$$\varphi^{-1}: T \mapsto T_2 \vee T \quad \text{se} \quad T_1 \wedge T_2 \leq T \leq T_1.$$

Ovviamente c'è anche l'isomorfismo gruppale:  $T_1 \vee T_2 / T_2 \cong T_1 / T_1 \wedge T_2$ . Analoghe considerazioni valgono nel reticolo  $\mathcal{F}(P)$ .

Il lemma seguente, dovuto a Sierpiński (vedi [6], pg. 77), sarà utilizzato spesso in seguito.

**LEMMA 1.** Se  $N$  è un insieme numerabile, esistono  $c$  sottoinsiemi infiniti di  $N$  a due a due con intersezione finita.

Una famiglia di  $c$  sottoinsiemi di  $N$  come nel lemma 1 sarà chiamata una *quasi-partizione* di  $N$ .

**LEMMA 2.** Siano  $T = T(\{t^{(i)}\}_{i \in I})$  e  $T(t)$  due gruppi monotóni, e sia  $T \leq T(t)$ . Allora risulta:  $T = T(\{t^{(i)} \wedge t\}_{i \in I})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** È una immediata conseguenza della formula (2).

**TEOREMA 1.** Siano  $T$  e  $T(t)$  due gruppi monotóni ( $t \in P^*$ ) tali che  $T$  è  $\aleph_0$ -generato e  $T < T(t)$ . Allora in  $I[T(t): T]$  esistono  $2^c$  gruppi monotóni non isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Per il lemma 2 e per (1) possiamo supporre che i generatori  $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$  di  $T$  siano tutti minori o uguali a  $t$ ; supponiamo inoltre che  $t^{(n)} \in P^*$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (e quindi che  $T \neq B$ ). Definiamo una successione crescente in  $\mathbb{N}$ :

$$k_1 \in \mathbb{N} \text{ tale che } t_{k_1} \geq 1 \cdot t_{k_1}^{(1)}$$

$$k_2 \in \mathbb{N} \text{ tale che } t_{k_2} \geq 2 \cdot t_{k_2}^{(2)} \text{ e } t_{k_2}^{(2)} \geq t_{k_1}$$

$$k_3 \in \mathbb{N} \text{ tale che } t_{k_3} \geq 3 \cdot t_{k_3}^{(3)} \text{ e } t_{k_3}^{(3)} \geq t_{k_2}$$

e così via. Sia  $\{N_i\}_{i \in I}$  una quasi-partizione di  $N = \{k_1, k_2, \dots\}$ , ( $|I| = c$ ). Definiamo un elemento  $v^{(i)}$  per ogni  $i \in I$  nel modo seguente

$$v_k^{(i)} = \begin{cases} t_k & \text{se } k \in N_i \\ t_k \vee t_k^{(s)} & \text{se } k_s \leq k < k_{s+1}, \quad k \notin N_i \text{ e } k_s \text{ è il massimo elemento} \\ & \text{in } N_i \text{ minore di } k_s. \end{cases}$$

Ovviamente  $v^{(i)} \in P^*$ ,  $\forall i \in I$ , e poichè  $v^{(i)} \leq t$  e, per  $k \geq k_s$ ,  $v_k^{(i)} \geq v_k^{(s)}$ , si ha:  $T \leq T(v^{(i)}) \leq T(t)$ . Poichè due gruppi monotóni sono isomorfi se e solo se sono uguali (vedi [7]) sarà sufficiente provare che, per ogni  $i \in I$ ,  $v^{(i)} \notin T(v^{(j)}_{j \neq i})$ . In caso contrario infatti esistono  $n \in \mathbb{N}$  e  $j_1, \dots, j_r \in I \setminus \{i\}$  tali che

$$v^{(i)} \leq n \cdot (v^{(j_1)} + \dots + v^{(j_r)}).$$

Ma allora per infiniti  $k_s \in N_i \setminus (N_{j_1} \cup \dots \cup N_{j_r})$  deve accadere

$$s \cdot v_{k_s}^{(s)} \leq t_{k_s} \leq r \cdot n \cdot v_{k_s}^{(s)}$$

che è ovviamente assurdo, essendo  $r$  ed  $n$  fissi. Gli argomenti fin qui usati valgono ovviamente anche nel caso in cui  $T$  sia principale e diverso da  $B$ , ma anche per  $T = B$ , modificando leggermente la prova precedente, vale che in  $I[T(\mathbf{t}): B]$  esistono  $2^c$  gruppi monotóni non isomorfi.

**COROLLARIO 1.** Se  $T$  è  $\aleph_0$ -generato e se  $T < T_1$ , allora in  $I[T_1: T]$  esistono  $2^c$  gruppi monotóni non isomorfi.

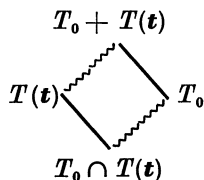
**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{t} \in T_1^* \setminus T$ . Dati l'isomorfismo reticolare tra  $I[T + T(\mathbf{t}): T]$  e  $I[T(\mathbf{t}): T(\mathbf{t}) \cap T]$  e il teorema 1, ed osservato che, per il lemma 2,  $T(\mathbf{t}) \cap T$  è ancora  $\aleph_0$ -generato, segue subito l'asserto.

**COROLLARIO 2.** Se  $T_1$  e  $T_2$  sono gruppi monotóni principali e  $T_1 < T_2$ , in  $I[T_2: T_1]$  esistono esattamente  $c$  gruppi monotóni principali;  $\mathfrak{F}(P)$  ha cardinalità  $c$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Basta considerare, nella dimostrazione del teorema 1, i  $c$  elementi  $\mathbf{v}^{(i)}$ , ( $i \in I$ ), che generano gruppi monotóni principali a due a due non isomorfi; d'altra parte  $P$  ha cardinalità  $c$ , perciò  $\mathfrak{F}(P)$  ha cardinalità  $c$ .

Nel corollario 1, la condizione per  $T$  di essere  $\aleph_0$ -generato è sufficiente per l'esistenza di  $2^c$  elementi in  $I[T_1: T]$ , ma non è necessaria, come prova l'esempio seguente.

**ESEMPIO 4.** Siano  $\mathbf{t} \in P^*$  ed  $\mathcal{F} = \{T \in \mathfrak{G}(P) \mid \mathbf{t} \notin T\}$ .  $\mathcal{F}$  è una famiglia induttiva. Sia  $T_0$  massimale in  $\mathcal{F}$ . Ovviamente  $T_0$  è un sottogruppo monotóno massimale in  $T_0 + T(\mathbf{t})$  e si ha il diagramma reticolare



dove gli intervalli opposti sono isomorfi; tenendo conto del corollario 2 segue allora che in  $I[T_0: T_0 \cap T(\mathbf{t})]$  ci sono  $2^c$  gruppi monotóni distinti, ma  $T_0 \cap T(\mathbf{t})$  non è  $\aleph_0$ -generato, essendo massimale in  $T(\mathbf{t})$ .

L'esempio 4 prova che esistono elementi in  $\mathfrak{C}(P)$  che hanno, tra gli elementi ad essi minori, elementi massimali. Una condizione sufficiente per godere di tale proprietà è fornita dalla proposizione seguente.

**PROPOSIZIONE 1.** Se  $T(\mathbf{t})$  è un gruppo monotono principale, l'insieme degli elementi di  $\mathfrak{C}(P)$  minori di  $T(\mathbf{t})$  ha elementi massimali. Un tale elemento si può inoltre scegliere contenente un arbitrario  $T_0 \in \mathfrak{C}(P)$  tale che  $T_0 < T(\mathbf{t})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** È facile verificare che la famiglia  $\{T \in \mathfrak{C}(P) | T < T(\mathbf{t})\}$  è induttiva, come pure la famiglia  $\{T \in \mathfrak{C}(P) | T_0 \leq T < T(\mathbf{t})\}$ .

Si osservi che un sottogruppo monotono massimale tra i sottogruppi monotoni contenuti in un fissato gruppo monotono  $T$  non può essere  $\aleph_0$ -generato, per il corollario 1. Non tutti i gruppi monotoni ammettono però sottogruppi monotoni massimali, come prova la proposizione seguente.

**PROPOSIZIONE 2.** Sia  $T$  un sottoanello monotono di  $P$ . Allora  $T$  non ha sottogruppi monotoni massimali.

**DIMOSTRAZIONE.** Il caso  $T = B$  è banale. Sia  $T \neq B$ . Supponiamo per assurdo che  $M$  sia un sottogruppo monotono massimale in  $T$ . Sia  $\mathbf{t} \in T^* \setminus M$ ; allora  $M + T(\mathbf{t}) = T$ , perciò esistono  $m \in \mathbb{N}$  ed  $\mathbf{x} \in M^*$  tali che

$$\mathbf{t}^2 \leq m \cdot \mathbf{t} + \mathbf{x}.$$

Detto  $\mathbf{e}$  l'elemento di  $P$  tale che  $e_k = 1$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si ha:

$$(\mathbf{t} - m \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{x}.$$

Per  $k \geq k_0$ , con  $k_0$  intero opportuno, si ha:

$$t_k \leq (t_k - m) \cdot t_k \leq x_k$$

perciò  $\mathbf{t} \in M$ , da cui l'assurdo.

**COROLLARIO 3.** Se  $M$  è un sottogruppo monotono proprio di  $P$  e se  $\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \leq P^*$ , allora  $M + T(\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}) < P$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Non è restrittivo supporre i  $\mathbf{t}^{(n)}$  soddisfacenti alla condizione (1). Esiste allora un  $\mathbf{t} \in P$  tale che  $\mathbf{t} \geq \mathbf{t}^{(n)}$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Si ha allora

$$M + T(\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}) \leq M + T(\mathbf{t})$$

e dalla dimostrazione della proposizione 2 segue che  $M + T(\mathbf{t}) < P$ .

Vogliamo ora provare che nessun gruppo monotóno ha un sottogruppo monotóno massimo. Premettiamo perciò il lemma seguente.

LEMMA 3. Sia  $T(\mathbf{t})$  un gruppo monotóno principale ( $\neq B$ ). Allora esistono  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}' \in P^*$  tali che  $T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) < T(\mathbf{t}) < T(\mathbf{u}'), T(\mathbf{v}')$  e risulta

$$T(\mathbf{u}) \vee T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{t}) = T(\mathbf{u}') \wedge T(\mathbf{v}').$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $k_1, k_2, \dots$  una successione crescente in  $\mathbb{N}$  tale che

$$t_{k_s} \geq s \cdot t_{k_{s-1}} \quad \text{per } s = 2, 3, \dots$$

Definiamo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  nel modo seguente

$$u_k = \begin{cases} t_k & \text{se } k_{2n} < k \leq k_{2n+1} \\ t_{k_{2n-1}} & \text{se } k_{2n-1} < k \leq k_{2n} \end{cases} \quad v_k = \begin{cases} t_{k_{2n}} & \text{se } k_{2n} < k \leq k_{2n+1} \\ t_k & \text{se } k_{2n-1} < k \leq k_{2n} \end{cases}$$

Ovviamente  $\mathbf{u} \vee \mathbf{v} = \mathbf{t}$ ; inoltre, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha:

$$2 \cdot n \cdot u_{k_{2n}} = 2 \cdot n \cdot t_{k_{2n-1}} \leq t_{k_{2n}}; \quad (2n+1) \cdot v_{k_{2n+1}} = (2n+1) \cdot t_{k_{2n}} \leq t_{k_{2n+1}}$$

perciò  $\mathbf{t} \notin T(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{t} \notin T(\mathbf{v})$ . La costruzione degli elementi  $\mathbf{u}'$  e  $\mathbf{v}'$  è analoga alla precedente, perciò la omettiamo.

Il lemma 3 non vale per  $B$ : infatti se  $T(\mathbf{u})$  e  $T(\mathbf{v})$  contengono propriamente  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in P^*)$ , allora  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in P^*$ , perciò  $T(\mathbf{u}) \wedge T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) > B$ .

COROLLARIO 4. Non esistono gruppi monotóni con sottogruppi monotóni massimi.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo esista  $T \in \mathfrak{T}(P)$  con sottogruppo monotóno massimo  $T_0$ .  $T$  non può essere principale: se infatti fosse  $T = T(\mathbf{t})$ , si scelgano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  come nel lemma 3 e siano  $M_1$  ed  $M_2$  due sottogruppi monotóni massimali in  $T$  contenenti rispettivamente  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , sicuramente esistenti per la proposizione 1. Ma allora  $\mathbf{v} \in T_0 \setminus M_1$ , perciò  $M_1 + T(\mathbf{v}) = T$  e  $M_1 \leq T_0$  implica che  $M_1 + T(\mathbf{v}) \leq T_0$ , il che è assurdo. Ne segue che, se  $\mathbf{t} \in T$ ,  $T(\mathbf{t}) < T$ , perciò  $\mathbf{t} \in T_0$ , da cui segue  $T = T_0$ .

OSSERVAZIONE. Si è visto come per un gruppo monotóno l'essere anche un sottoanello di  $P$  porti delle particolari proprietà. Rivolgendo

l'attenzione ai sottoanelli monotóni di  $P$ , si può vedere facilmente che pure essi formano un reticolo distributivo e completo (il sup di due anelli monotóni è il minimo anello monotóno che li contiene entrambi) che non è ovviamente un sottoreticolo di  $\mathfrak{G}(P)$ . Si può definire il concetto di famiglia  $\{t^{(i)}\}_{i \in I}$  di elementi di  $P^*$  che genera l'anello monotóno  $R$  nel modo seguente

$$R = \{t \in P \mid |t_k| < (t_k^{(i_1)} \dots t_k^{(i_r)})^n, \forall k \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}; i_1, \dots, i_r \in I\}.$$

e quindi i concetti di anelli principali,  $\aleph_0$ -generati etc... Molte delle proprietà dimostrate per i gruppi monotóni si possono allora provare per gli anelli monotóni. Noi ci limitiamo a provare il fatto seguente.

**PROPOSIZIONE 3.** Esistono  $2^\circ$  anelli monotóni non isomorfi.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $k_1, k_2, \dots$  una successione strettamente crescente in  $\mathbb{N}$  tale che:

$$k_s > k_{s-1}^{k_s-1} \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{N}.$$

Siano  $N = \{k_1, k_2, \dots\}$  ed  $\{N_i\}_{i \in I}$  una quasi-partizione di  $N$  ( $|I| = c$ ). Per ogni  $i \in I$  definiamo un elemento  $t^{(i)}$  nel modo seguente

$$t_k^{(i)} = \begin{cases} k & \text{se } k \in N_i \\ k_h & \text{se } k_s \leq k < k_{s+1}, k \notin N_i \text{ e } k_h \text{ è il massimo elemento di } N_i \\ & \text{minore di } k_s. \end{cases}$$

È sufficiente ora provare che, per ogni  $i \in I$ ,  $t^{(i)}$  non appartiene all'anello monotóno generato da  $\{t^{(j)}\}_{j \neq i}$ . In caso contrario esistono un  $n \in \mathbb{N}$  e  $j_1, \dots, j_r \in I \setminus \{i\}$  tali che:

$$t_k^{(i)} \leq (t_k^{(j_1)} \dots t_k^{(j_r)})^n \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Ma allora per infiniti  $k_s \in N_i \setminus (N_{j_1} \cup \dots \cup N_{j_r})$  si ha:

$$k_{s-1}^{k_s-1} < k_s = t_{k_s}^{(i)} \leq (t_{k_s}^{(j_1)} \dots t_{k_s}^{(j_r)})^n \leq k_{s-1}^{r \cdot n}$$

il che è ovviamente assurdo.

Chiudiamo questa prima parte ponendo il seguente problema: può accadere che in  $\mathfrak{G}(P)$  risulti:  $P = T_1 \vee T_2$ , con  $T_1$  e  $T_2$  sottogruppi monotóni propri di  $P$ ? Si osservi che, per il corollario 3, nè  $T_1$  nè  $T_2$  possono essere  $\aleph_0$ -generati.

## 2. La struttura di $T/S$ .

È ben noto che  $P/S$  è un gruppo senza torsione algebricamente compatto, ed ha quindi una decomposizione del tipo:

$$\frac{P}{S} = \frac{D}{S} \oplus \frac{P_0}{S}$$

dove  $D/S$  è la parte divisibile, e quindi  $D$  è un sottogruppo univocamente individuato di  $P$ , e  $P_0/S$ , unico a meno di isomorfismi, è un gruppo completo di Hausdorff nella topologia naturale. Gli elementi  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k \varepsilon_k \in D$  sono caratterizzati dalla proprietà: per ogni  $s \in \mathbb{N}$  esiste  $k_s \in \mathbb{N}$  tale che, per  $k \geq k_s$ ,  $s!$  divide  $d_k$ .

Vogliamo provare che, se  $T$  è un gruppo monotóno diverso da  $B$ , allora  $T/S$  è isomorfo a  $P/S$ . Premettiamo perciò alcuni lemmi.

**LEMMA 4.** Sia  $t \in P^*$ . Per ogni  $x \in P$  esiste  $d \in D$  tale che:  $x \leq d \leq x + t$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $s \in \mathbb{N}$  esiste  $k_s \in \mathbb{N}$  tale che, per  $k \geq k_s$ , risulta  $t_k \geq s!$  e si possono scegliere i  $k_s$  in modo che  $k_1 < k_2 < \dots$ . Per ogni  $s \in \mathbb{N}$  e per  $0 \leq r < k_{s+1} - k_s$  poniamo:

$$d_{k_s+r} = \text{minimo multiplo di } s! \text{ maggiore o uguale a } x_{k_s+r}.$$

Ovviamente, risulta, per ogni  $s \in \mathbb{N}$  e per  $0 \leq r < k_{s+1} - k_s$ :

$$0 \leq d_{k_s+r} - x_{k_s+r} \leq s! \leq t_{k_s+r}.$$

È ovvio allora che l'elemento  $d = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varepsilon_k$  definito sta in  $D$  e  $x \leq d \leq x + t$ .

**LEMMA 5.** Siano  $T$  e  $T'$  due gruppi monotóni tali che  $B < T \leq T'$ . Allora

$$T + (D \cap T') = T'.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ovviamente  $T + (D \cap T') \leq T'$ . Viceversa, sia  $x \in T'$ . Allora, essendo  $B < T$ , esiste  $t \in T^*$ . Sia  $x = x' - x''$ , con  $x'$

e  $\mathbf{x}''$  elementi non negativi di  $T'$ . Per il lemma 4 esistono  $\mathbf{d}', \mathbf{d}'' \in D$  tali che:

$$0 \leq \mathbf{x}' \leq \mathbf{d}' \leq \mathbf{x}' + \mathbf{t}; \quad 0 \leq \mathbf{x}'' \leq \mathbf{d}'' \leq \mathbf{x}'' + \mathbf{t}.$$

Ne segue che  $0 \leq \mathbf{d}' - \mathbf{x}' \leq \mathbf{t}$  e  $0 \leq \mathbf{d}'' - \mathbf{x}'' \leq \mathbf{t}$ , perciò  $\mathbf{d}' - \mathbf{x}' \in T$  e  $\mathbf{d}'' - \mathbf{x}'' \in T$ ; ma allora  $\mathbf{d}', \mathbf{d}'' \in D \cap T'$ , quindi  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in T + (D \cap T')$ ; segue che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' \in T + (D \cap T')$ .

Si osservi che  $D \cap B = S$ ; da [4] segue che  $S$  è un addendo diretto di  $B$  e che  $B/S = F$ , dove  $F$  è libero di rango  $c$ .

LEMMA 6. Sia  $T$  un gruppo monotono diverso da  $B$ . Allora la parte divisibile di  $T/S$  è  $(T \cap D)/S$  ed è isomorfa a  $\bigoplus_c \mathbb{Q}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $d(T/S)$  la parte divisibile di  $T/S$ . È ovvio che:

$$d(T/S) \leq T/S \cap D/S = (T \cap D)/S.$$

L'inclusione inversa segue dalla purezza di  $T/S$  in  $P/S$ . Proviamo infine che  $(T \cap D)/S = \bigoplus_c \mathbb{Q}$ . Basta provare che  $|T \cap D| = c$ . Sia  $\mathbf{t} \in T^*$ .

Per il lemma 4 esiste  $\mathbf{d} \in D$  tale che  $\mathbf{t} \leq \mathbf{d} \leq 2\mathbf{t}$ , e ciò prova intanto che  $0 \neq \mathbf{d} + S \in (T \cap D)/S$ . Sia  $\{N_i\}_{i \in I}$  una quasi-partizione di  $\mathbb{N}$ . Per ogni  $i \in I$  definiamo un elemento  $\mathbf{d}^{(i)}$ , a partire da  $\mathbf{d} \in D$ , nel modo seguente:

$$d_k^{(i)} = \begin{cases} d_k & \text{se } k \in N_i \\ 0 & \text{se } k \notin N_i. \end{cases}$$

Ovviamente  $\mathbf{d}^{(i)} \in T \cap D$  per ogni  $i \in I$  e i  $\mathbf{d}^{(i)}$  sono indipendenti modulo  $S$ .

TEOREMA 2. Siano  $T$  ed  $R$  due gruppi monotoni diversi da  $B$ . Siano

$$\frac{T}{S} = \frac{T \cap D}{S} \oplus \frac{T_0}{S} \quad \text{e} \quad \frac{R}{S} = \frac{R \cap D}{S} \oplus \frac{R_0}{S}$$

due decomposizioni di  $T/S$  e  $R/S$  nelle parti divisibili e ridotte. Allora:

$$1) \quad \frac{T \cap D}{S} \cong \bigoplus_c \mathbb{Q} \cong \frac{R \cap D}{S}.$$

2) Si può scegliere  $R_0$  uguale a  $T_0$ .  
In particolare  $T/S \cong P/S \cong R/S$ .

DIMOSTRAZIONE. 1) È già stato provato nel lemma 6.2) Dal lemma 5 si ha, per  $T' = T \cap R$

$$\frac{R}{S} = \frac{T' + (R \cap D)}{S} = \frac{T'}{S} + \frac{R \cap D}{S} = \left( \frac{T'_0}{S} \oplus \frac{T' \cap D}{S} \right) + \frac{R \cap D}{S}$$

e analogamente per  $T/S$ , perchè  $T'$  è ancora diverso da  $B$ , come si verifica facilmente. Ne segue che:

$$\frac{R}{S} = \frac{T'_0}{S} + \frac{R \cap D}{S}; \quad \frac{T}{S} = \frac{T'_0}{S} + \frac{T \cap D}{S}.$$

Ma  $T'_0/S \cap (R \cap D)/S = 0$ , altrimenti, essendo  $T'_0/S$  puro in  $R/S$  (perchè  $T'_0$  è puro in  $T'$  che è puro in  $R$ ),  $T'_0/S$  non sarebbe ridotto. Ne segue che  $R/S = T'_0/S \oplus (R \cap D)/S$  e analogamente per  $T/S$ .

Si osservi che, se  $T \neq B$ , nella decomposizione

$$\frac{T}{S} = \frac{T \cap D}{S} \oplus \frac{T_0}{S}$$

si può scegliere  $T_0/S \geq B/S$ , poichè  $B \cap D = S$ ; poichè  $T/B$  è divisibile, tale è  $(T_0/S)/(B/S)$ . Perciò  $B/S$  è un sottogruppo basico di  $T/S$ , per ogni gruppo monotono  $T$ , e  $B$  è basico in  $T_0$ .

COROLLARIO 5. Sia  $T$  un gruppo monotóno diverso da  $B$ . Allora  $T/S$  è algebricamente compatto e la sua parte ridotta  $T_0/S$  è il completamento di  $B/S$  nella topologia naturale.

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema 2 segue che  $T/S \cong P/S$ , ed è ben noto (vedi [1]) che  $P/S$  è algebricamente compatto. Essendo  $B/S$  sottogruppo basico di  $T_0/S$ ,  $T_0/S$  ne è il completamento nella topologia naturale.

COROLLARIO 6. Se  $T$  è un gruppo monotóno diverso da  $B$  e se  $G$  è un gruppo slender, ogni omomorfismo  $\varphi: T \rightarrow G$  è individuato dalla sua restrizione  $\varphi|_S$ .

DIMOSTRAZIONE. Essendo  $T/S$  algebricamente compatto,

$$\text{Hom}(T/S, G) = 0$$

(vedi [2, vol II, pag. 159]). Perciò se due omomorfismi da  $T$  in  $G$  coincidono su  $S$ , essi sono uguali.

Si osservi che il corollario 6 estende ad un arbitrario gruppo slender, senza restrizioni di cardinalità, la seconda parte del teorema 2 in [3].

Siano ora  $T$  e  $T'$  due gruppi monotoni tali che  $B < T < T'$ . Dal teorema 2 segue che  $T'/T \cong (T' \cap D)/(T \cap D) \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{Q}$ , con  $\sigma$  numero cardinale  $> 0$ . È naturale chiedersi quanto grande sia  $\sigma$ . Premettiamo una notazione. Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $t \in P$ , indichiamo con  $\alpha * t$  l'elemento di  $P$  così definito:

$$(\alpha * t)_k = [\alpha \cdot t_k]$$

dove, se  $r \in \mathbb{R}$ ,  $[r]$  indica la parte intera di  $r$ . Indicato con  $e$  l'elemento costantemente uguale ad 1 di  $P$  ( $e_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ ) è ovvio che:

$$\alpha \cdot t - e < \alpha * t \leq \alpha \cdot t$$

dove il significato di  $\alpha \cdot t$  è ovvio.

LEMMA 7. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . Allora, per ogni  $t \in P^*$  vale:  $T(t) = T(\alpha * t)$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\alpha = 1$  l'uguaglianza è ovvia. Sia  $\alpha > 1$ . Allora  $\alpha * t \geq t$  perciò  $T(t) \leq T(\alpha * t)$ . D'altra parte  $\alpha * t \leq \alpha \cdot t < ([\alpha] + 1) \cdot t$ , quindi  $T(\alpha * t) \leq T(t)$ . Sia  $\alpha < 1$  e sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\alpha \geq 1/n$  e, per  $k$  sufficientemente grande,  $t_k > 2n$ ; si ha allora  $2(t_k - n) \geq t_k$ . Da  $\alpha * t \leq \alpha \cdot t \leq t$  segue  $T(\alpha * t) \leq T(t)$ . Viceversa:

$$\alpha \geq 1/n \Rightarrow \alpha \cdot t \geq (1/n) \cdot t \Rightarrow \alpha * t \geq (1/n) * t \Rightarrow 2n(\alpha * t) \geq 2n((1/n) * t).$$

Tenuto conto che  $(1/n) * t \geq (1/n) \cdot t - e$  si ha:

$$2n(\alpha * t) \geq 2n((1/n) * t) \geq 2n((1/n) \cdot t - e) = 2(t - ne);$$

ma per  $k$  sufficientemente grande  $2(t_k - n) \geq t_k$ , perciò  $T(t) \leq T(\alpha * t)$ .

TEOREMA 3. Siano  $T$  e  $T'$  gruppi monotoni tali che  $T < T'$ . Allora  $T'/T \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{Q}$ .

DIMOSTRAZIONE. Esiste  $\mathbf{t} \in (T')^* \setminus T$ . Allora  $T + T(\mathbf{t}) > T$  e si ha:

$$\frac{T'}{T} > \frac{T + T(\mathbf{t})}{T} \cong \frac{T(\mathbf{t})}{T \cap T(\mathbf{t})}.$$

Non è restrittivo perciò supporre  $T < T(\mathbf{t})$  e provare l'asserto per  $T$  e  $T(\mathbf{t})$ . Sia  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  una famiglia di cardinalità  $|I| = c$  di numeri reali linearmente indipendenti, e consideriamo,  $\forall i \in I$ , l'elemento  $\alpha_i * \mathbf{t}$ . Proviamo che gli elementi  $\alpha_i * \mathbf{t}$  sono linearmente indipendenti modulo  $T$ . Sia  $\sum_r m_r \cdot (\alpha_r * \mathbf{t}) \in T$  (la sommatoria è finita), con gli  $m_r \in \mathbb{Z}$ . Possiamo supporre, previo cambiamento di segno, che  $\sum_r m_r \alpha_r > 0$ , perciò, per il lemma 7,  $T\left(\sum_r m_r \cdot \alpha_r * \mathbf{t}\right) = T(\mathbf{t})$ . Proviamo che esiste un intero positivo  $M$  per il quale vale:

$$(4) \quad \left| \left( \sum_r m_r \alpha_r \right) * \mathbf{t} - \sum_r m_r (\alpha_r * \mathbf{t}) \right| < M$$

essendo chiaro il significato di tale scrittura, dal che segue ovviamente che

$$T(\mathbf{t}) = T\left(\left(\sum_r m_r \alpha_r\right) * \mathbf{t}\right) = T\left(\sum_r m_r (\alpha_r * \mathbf{t})\right)$$

il che porta all'assurdo perchè si è supposto che  $\sum_r m_r (\alpha_r * \mathbf{t}) \in T$ . Sia  $k \in \mathbb{N}$  fissato. Per ogni  $r$  si ha:

$$m_r \cdot \alpha_r \cdot t_k - |m_r| \leq m_r [\alpha_r \cdot t_k] \leq m_r \cdot \alpha_r \cdot t_k + |m_r|$$

perciò, posto  $M' = \sum_r |m_r|$ , si ha

$$(5) \quad \left( \sum_r m_r \alpha_r \right) \cdot t_k - M' \leq \sum_r m_r [\alpha_r \cdot t_k] \leq \left( \sum_r m_r \alpha_r \right) \cdot t_k + M'.$$

D'altra parte vale:

$$(6) \quad \left( \sum_r m_r \alpha_r \right) \cdot t_k - 1 \leq \left[ \left( \sum_r m_r \alpha_r \right) \cdot t_k \right] \leq \left( \sum_r m_r \alpha_r \right) \cdot t_k.$$

Da (5) e (6), posto  $M = M' + 1$ , segue subito (4). Segue che deve essere  $\sum_r m_r \alpha_r = 0$ , e quindi  $m_r = 0$  per ogni  $r$ .

OSSERVAZIONE. Se  $T$  è un gruppo monotono diverso da  $B$ , il suo comportamento nei confronti dei gruppi slender è simile a quello di  $P$  (vedi [3]). In contrasto con ciò è il fatto seguente: poichè l'applicazione

$$\varphi: P \rightarrow D \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k! m_k \varepsilon_k$$

è un omomorfismo, un gruppo  $G$  è slender se e solo se ogni omomorfismo  $f: D \rightarrow G$  manda a 0 quasi tutti gli  $\varepsilon_k$ ; ciò non è più vero se si sostituisce  $D \cap T$  a  $D$ ; infatti la restrizione a  $D \cap T$  dell'omomorfismo identico  $1_T: T \rightarrow T$  fornisce il controesempio.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BALCERZYK, *On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups*, Bull. Acad. Polon. Sci., **7** (1959), pp. 141-142.
- [2] L. FUCHS, *Infinite Abelian Groups*, Vol. I e II, Academic Press, New York-London, 1970 e 1973.
- [3] L. FUCHS, *Note on certain subgroups of products of infinite cyclic groups*, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **19** (1971), pp. 51-54.
- [4] G. NÖBELING, *Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Specker*, Invent. Math., **6** (1968), pp. 41-55.
- [5] G. A. REID, *Almost free abelian groups*, Lecture Notes, Tulane University (1967).
- [6] W. SIERPIŃSKI: *Cardinal and ordinal numbers*, Warszawa (1958).
- [7] E. SPECKER, *Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen*, Portug. Math., **9** (1950), pp. 131-140.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 13 aprile 1976.