

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI

Sullo stress e sulla deformazione di una microstruttura

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 55 (1976), p. 219-225

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__219_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__219_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sullo stress e sulla deformazione di una microstruttura.

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI (*)

Considero un continuo del tipo di quello considerato in [1]. Postulata per esso la validità del principio di indifferenza materiale e l'annullarsi della densità di lavoro delle forze interne per ogni spostamento rigido, mostro come si possa caratterizzare la deformazione del continuo mediante le matrici (1), invarianti per spostamenti rigidi.

Ricavo quindi delle relazioni sullo stress per un tale continuo e dò le condizioni di integrabilità cui devono soddisfare le matrici caratteristiche di cui sopra in base alla loro definizione (1).

1. – Riprendo in esame il continuo considerato in [1] e a tale nota rimando il lettore per le premesse geometriche e per il simbolismo usati nel seguito. D'ora in avanti si intenderà che la trasformazione del continuo avvenga dalla configurazione di riferimento C alla $C'(t)$ e si scriverà più semplicemente $\alpha(t)$ anziché $\alpha[C, C'(t)]$ e analogamente per R , E e γ . Per gli sviluppi della meccanica dei continui solidi è generalmente conveniente caratterizzare la deformazione mediante l'uso di derivazioni fatte rispetto alle coordinate dello stato di riferimento, stabilendo un'espressione di tipo lagrangiana del $\delta l^{(i)}$.

Se si denota con $\tilde{\alpha}_{rs}$ il complemento algebrico di α_{rs} nella matrice α e si pone $\mathcal{D} = \det \alpha > 0$, risulta $\partial/\partial x'_r = (\tilde{\alpha}_{rs}/\mathcal{D})(\partial/\partial x_s)$ per cui nessuna difficoltà c'è ad esprimere il $\delta l^{(i)}$ mediante l'uso di derivazione rispetto alle x_r anziché alle x'_r . Tali derivate si esprimeranno mediante l'uso della virgola. Suppongo valido il principio di indifferenza materiale nella forma richiamata in [1] e l'annullarsi del lavoro delle forze

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

interne per spostamenti rigidi (vedi [1] Teor. II, prop. b)), come è ben ragionevole dal punto di vista fisico.

L'annullarsi del lavoro delle forze interne per ogni spostamento rigido implica la possibilità che tale densità di lavoro si possa esprimere con un certo invariante lineare che rappresenta una forma differenziale nelle variazioni di certe matrici che risultino invarianti per spostamenti rigidi e siano costruite mediante l'uso delle matrici α , R , $R_{,s}$, E , $E_{,s}$ che ormai si intenderanno riferite alla configurazione di riferimento. Occorre pertanto procurarsi il massimo numero di matrici indipendenti di tale tipo.

TEOREMA I. Sia f una qualunque funzione scalare delle matrici α , R , $R_{,s}$, E , $E_{,s}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f risulti invariante per spostamenti rigidi è che essa dipenda da tali matrici tramite gli argomenti:

$$(1) \quad \eta = \alpha^{(T)} R, \quad P^{(s)} = \frac{1}{2} R^{(T)} R_{,s}, \quad E, \quad E_{,s}.$$

La condizione che f goda di una tale proprietà di invarianza è espressa, tenuto conto delle I (2), da:

$$(2) \quad f(\alpha, R, R_{,s}, E, E_{,s}) = f(r\alpha, rR, rR_{,s}, E, E_{,s})$$

da ritenersi valida qualunque sia la rotazione r .

In particolare per $r = R^{(T)}$ la (2) diviene:

$$(3) \quad f(\alpha, R, R_{,s}, E, E_{,s}) = f(R^{(T)} \alpha, 1, R^{(T)} R_{,s}, E, E_{,s});$$

essendo $R^{(T)} \alpha = \eta$ e $R^{(T)} R_{,s} = 2P^{(s)}$ resta così dimostrata la condizione necessaria. La condizione sufficiente deriva immediatamente osservando che se f dipende comunque dagli argomenti (1), la sua invarianza per spostamenti rigidi è assicurata dal fatto che tali risultano essere i suoi argomenti ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ne segue che condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione termodinamica di stato sia indifferente ad un moto rigido è che essa dipenda da α , R e $R_{,s}$ solo tramite η e P^s , senza neppure dipendere dalle loro derivate temporali (che pure si annullano per ogni atto di moto rigido). Si noti che per ogni s la matrice P^s è emisimmetrica.

Il teorema ora enunciato ci assicura che un sistema massimale di argomenti con cui può esprimersi il $\delta l^{(i)}$ è proprio dato dalle (1). Risulta dunque ⁽²⁾:

$$(4) \quad \delta l^{(i)} = \frac{1}{\mathfrak{D}} I \{ \nu \Delta \eta + \beta^s \Delta P^s + \tau \Delta E + T^s \Delta E_{,s} \},$$

ove occorre osservare che è lecito scambiare l'operazione di derivazione con quella di variazione conseguente al passaggio da C' a $C' + \Delta C'$. I coefficienti di stress ν , β^s , τ e T^s dipendono dalle matrici α , R , $R_{,s}$, E , $E_{,s}$ eventualmente anche attraverso la loro storia. Tali coefficienti per il principio di indifferenza materiale, si devono ritenere invarianti nel passaggio tra storie equivalenti e pertanto per il teorema I sono determinati anch'essi dagli argomenti (1), eventualmente attraverso la loro storia.

2. - Relazioni di stress.

Ricavo delle relazioni di stress valide per un continuo del tipo in esame. Da (1) segue:

$$(5) \quad \Delta \eta = \Delta \alpha^{(T)} R + \alpha^{(T)} \Delta R \quad \Delta P^s = \frac{1}{2} (\Delta R^{(T)} R_{,s} + R^{(T)} \Delta R_{,s}),$$

da cui si ha:

$$(6) \quad \Delta \alpha^{(T)} = (\Delta \eta - \alpha^{(T)} \Delta R) R^{(T)}, \quad \Delta R_{,s} = R(2\Delta P^s - \Delta R^{(T)} R_{,s})$$

Risulta altresì:

$$(7) \quad R_A - 1 = \Delta R R^{(T)} + \frac{1}{2} R(\Delta E E^{-1} - E^{-1} \Delta E) R^{(T)}, \quad \alpha_A - 1 = \Delta \alpha \alpha^{-1}$$

Tenuto conto, con riferimento alla trasformazione del continuo da C

⁽²⁾ Appare l'invariante $\mathfrak{D}$ in modo che l'espressione I in (4) rappresenti il lavoro delle forze interne con riferimento all'unità di volume dello stato di riferimento.

a C' , di I (6), I (24)', (7), con qualche sviluppo la I (17) diviene:

$$(8) \quad \delta l^{(i)} = I \left\{ X \alpha^{(T)-1} \Delta \alpha + \left(\frac{X^{(T)} - X}{2} R \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} \psi^q R_{,p} \right) \Delta R^{(T)} + \right. \\ \left. + \psi^q R \Delta R_{,p}^{(T)} \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} + [\pi] \Delta E + (E^{-1} R^{(T)} \psi^q R + R^{(T)} M^q R E^{-1}) \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} \Delta E_{,p} \right\}$$

dove si è posto:

$$\pi = (E^{-1} R_{,p}^{(T)} \psi^q R - R_{,p}^{(T)} \psi^q R E^{-1} + E_{,p}^{-1} R^{(T)} \psi^q R) \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} + \\ + R^{(T)} \frac{X^{(T)} - X}{4} R E^{-1} + E^{-1} R^{(T)} \frac{X^{(T)} - X}{4} R + R^{(T)} L R E^{-1} + \\ + (R_{,p}^{(T)} M^q R E^{-1} + E^{-1} R_{,p}^{(T)} M^q R + R^{(T)} M^q R E_{,p}^{-1}) \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}}.$$

Da (6), (8) segue, data la emisimmetria di ΔP^s :

$$(9) \quad \delta l^{(i)} = I \left\{ X \alpha^{(T)-1} \Delta \eta R^{(T)} - 2 \psi^q R \Delta P^p R^{(T)} \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} + [\pi] \Delta E + \right. \\ \left. + (E^{-1} R^{(T)} \psi^q R + R^{(T)} M^q R E^{-1}) \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} \Delta E_{,p} \right\} = \\ = I \left\{ \alpha^{-1} X^{(T)} R \Delta \eta - 2 R^{(T)} \psi^q R \Delta P^s \frac{\bar{\alpha}_{qs}}{\mathfrak{D}} + [\pi] \Delta E + \right. \\ \left. + (E^{-1} R^{(T)} \psi^q R + R^{(T)} M^q R E^{-1}) \frac{\bar{\alpha}_{qp}}{\mathfrak{D}} \Delta E_{,p} \right\}.$$

Dal confronto di (4) e (9) si ricava:

$$(10) \quad X = \frac{1}{\mathfrak{D}} R \nu \alpha^{(T)}$$

$$(11) \quad \psi^r = - \frac{1}{2 \mathfrak{D}} R \beta^s R^{(T)} \alpha_{rs}$$

$$(12) \quad \tau = \mathfrak{D}[\pi] + A$$

$$(13) \quad T^p = (E^{-1} R^{(T)} \psi^q R + R^{(T)} M^q R E^{-1}) \bar{\alpha}_{qp} + B^p$$

dove A e B sono quattro arbitrarie matrici emisimmetriche e possono

essere determinate imponendo la condizione di rendere simmetriche la L e le tre M^a .

A tale scopo può riuscire conveniente esprimere le matrici emisimmetriche A e B^p mediante vettori, ponendo:

$$(14) \quad \begin{cases} A_{rs} = e_{rls} Q_l \\ B_{rs}^p = e_{rls} S_l^p \end{cases}$$

ove Q_l e S_l^p rappresentano quattro vettori da determinarsi in base alla condizione sopra enunciata.

In definitiva, scritto ciascuno dei quattro sistemi (12), (13) nella forma simbolica:

$$(15) \quad v_{rs} = \varphi_{rs} + e_{rls} u^l$$

la condizione di simmetria per v_{rs} dà:

$$(16) \quad u_l = \frac{1}{4} e_{rls} (\varphi_{rs} - \varphi_{sr}).$$

Determinate così A e B^p è immediato risolvere la (13) rispetto ad M^a , e successivamente la (12) rispetto ad L .

3. - Condizioni di integrabilità.

Date le matrici η , P^s ed E come funzioni delle coordinate, è naturale chiedersi se ad esse corrisponda una configurazione di insieme α , γ (vedi I (1)) del continuo. A tale scopo è sufficiente l'integrabilità delle $(1)_1$, $(1)_2$ pensate come equazione nelle $x_{i,s}$ R_{is} . È facile ricavare che: *condizione necessaria e localmente sufficiente per tale integrabilità è che sussistano le:*

$$(17) \quad \eta_{rs,v} - \eta_{vs,r} + 2(\eta_{rq} P_{sq}^p - \eta_{vq} P_{sq}^r) = 0$$

$$(18) \quad P_{qs}^p (P_{qs,h}^p - P_{qs,p}^h) = 0$$

Infatti, dopo avere esplicitato la (1) mediante le sue componenti, si ricava;

$$(19) \quad x_{i,r} = \eta_{rs} R_{is}.$$

Derivando la (19) si ottiene;

$$(20) \quad x_{i,rp} = \eta_{rs,p} R_{is} + \eta_{rs} R_{is,p}.$$

D'altra parte risolvendo la (1)₂ si ha;

$$(21) \quad R_{is,p} = 2P_{qs}^p R_{iq}$$

La (20) diviene dunque;

$$(22) \quad x_{i,rp} = \eta_{rs,p} R_{is} + 2\eta_{rs} R_{iq} P_{qs}^p.$$

Scambiando r con p si ha;

$$(23) \quad x_{i,pr} = \eta_{ps,r} R_{is} + 2\eta_{ps} R_{iq} P_{qs}^r.$$

La condizione di integrabilità locale per (1)₁ si ottiene imponendo che sia;

$$(24) \quad x_{i,rp} - x_{i,p,r} = 0.$$

Si deve dunque avere:

$$(25) \quad R_{is}[\eta_{rs,p} - \eta_{ps,r} + 2(\eta_{rq} P_{sq}^p - \eta_{pq} P_{sq}^r)] = 0$$

da cui segue immediatamente (17).

Derivando (21) si ha:

$$(26) \quad R_{is,p} = 2(P_{qs,h}^p R_{iq} + P_{qs}^{(p)} R_{iq,h})$$

che tenuto conto di (21) diviene:

$$(27) \quad R_{is,p} = 2(P_{qs,h}^p R_{iq} + 2P_{qs}^p P_{kq}^h R_{ik}).$$

Scambiando p con h si ottiene:

$$(28) \quad R_{is,h} = 2(P_{qs,p}^h R_{iq} + 2P_{qs}^h P_{kq}^p R_{ik}).$$

La condizione di integrabilità per (1)₂ è:

$$(29) \quad R_{is,p} - R_{is,h} = 0.$$

Deve dunque essere:

$$(30) \quad R_{iq}(P_{qs,h}^p - P_{qs,v}^h) + 2R_{ik}(P_{qs}^p P_{kq}^h - P_{qs}^h P_{kq}^p) = 0$$

che, con un opportuno cambiamento di indici muti, diviene:

$$(31) \quad R_{iq}[P_{qs,h}^p - P_{qs,v}^h + 2(P_{rs}^p P_{qr}^h - P_{rs}^h P_{qr}^p)] = 0$$

che implica:

$$(32) \quad P_{qs,h}^p - P_{qs,v}^h + 2(P_{rs}^p P_{qr}^h - P_{rs}^h P_{qr}^p) = 0 .$$

Moltiplicando la (32) per P_{qs}^p , si ottiene con opportuni cambiamenti di indici muti:

$$(33) \quad P_{qs}^p(P_{qs,h}^p - P_{qs,v}^h) = 2P_{qs}^p(P_{rs}^h P_{qr}^p - P_{rs}^p P_{qr}^h) = \\ = 2(P_{qs}^p P_{rs}^h P_{qr}^p - P_{rs}^h P_{rq}^p P_{sq}^p) = 0 .$$

La (33), data la simmetria di P_{qs}^p rispetto ai due indici in basso, implica (18).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. C. GRIOLI, *Sul principio di indifferenza materiale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **55** (1977), pp. 209-217.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 dicembre 1975.