

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

**Rotazioni uniformi in un campo newtoniano
con forze di potenza nulla**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 54 (1975), p. 83-90

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__83_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Rotazioni uniformi in un campo newtoniano con forze di potenza nulla.

ETTORE BENTSIK (*)

Sia C un corpo rigido qualunque il cui baricentro G si muova di moto circolare uniforme attorno ad un punto Q e sia C soggetto a forze di tipo newtoniano di centro Q e a forze di potenza nulla quali quelle di Lorentz.

Si tratta di considerare, ad esempio, per quest'ultima sollecitazione, le forze che agiscono su di un corpo in movimento per il fatto che questo si trova immerso in un campo magnetico e che in esso vi è una distribuzione di cariche elettriche solidali.

Il problema può anche riferirsi al moto di un satellite artificiale che descriva un'orbita equatoriale attorno alla Terra, in una schematizzazione semplice. In questo lavoro si studia il moto di C intorno al baricentro [cioè rispetto ad assi con origine in G e di orientamento invariabile] e si determinano tutti i possibili moti rotatori uniformi anche nel caso in cui il baricentro si supponga fisso.

1. Equazioni generali.

Sia C un corpo rigido qualunque e si supponga che il suo baricentro G si muova di moto circolare uniforme in un piano π , attorno ad un punto Q . Si supponga che C sia soggetto a forze di tipo newtoniano di centro Q .

(*) Indirizzo dell'A.: Università di Padova - Seminario Matematico - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Sia \mathbf{H}^* un vettore invariabile, indipendente dai punti di C , tale che $-2\mathbf{H}^*$ coincida con l'intensità di un campo magnetico e sia μ^* la densità di una distribuzione di cariche elettriche solidali a C .

Si supponga poi che in C vi sia una distribuzione di massa con densità proporzionale a μ^* e che i momenti d'inerzia relativi a G siano proporzionali a quelli relativi alla effettiva costituzione di C .

Se si pone $\mathbf{H} = (A^*/A)\mathbf{H}^*$ (A è il momento principale d'inerzia rispetto all'asse solidale di indice 1 e origine G quando si attribuisca a C densità eguale a μ^*) è noto ⁽¹⁾ che il momento risultante rispetto a G delle forze di Lorentz si può esprimere, assunta una terna solidale coincidente con la terna principale d'inerzia, nella forma:

$$(1) \quad \mathbf{M}_G^{(L)} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\mathbf{H}$$

essendo

$$(2) \quad \lambda \equiv \begin{vmatrix} A + B + C & 0 & 0 \\ 0 & A + B + C & 0 \\ 0 & 0 & A + B + C \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}.$$

dove ABC sono i momenti principali d'inerzia e $\boldsymbol{\omega} \equiv (p, q, r)$ indica la velocità angolare di C . Si assuma come terna di riferimento una terna trirettangola levogira con l'origine in Q , assi x, y appartenenti al piano π e asse z perpendicolare a detto piano, si consideri inoltre, come s'è detto, una terna solidale coincidente con la terna centrale principale d'inerzia di C . Si indichi con \mathbf{c} il versore di GQ , con R la distanza di G da Q , con \mathbf{u} il versore dell'asse z , con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori della terna solidale, con $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$ ($\nu = \text{cost.}$) la velocità angolare del moto rotatorio di G intorno a Q e con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo C nel suo moto relativo al baricentro.

Si denotino ancora con c_i, u_i i coseni direttori di \mathbf{c} e \mathbf{u} rispetto agli assi solidali, con μ la densità e con m la massa di C e M la massa di Q .

⁽¹⁾ G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Rendiconti Seminario Matematico dell'Università di Padova, **27** (1957).

Il potenziale della forze newtoniane agenti sul corpo si può rappresentare mediante una serie di potenze di $1/R$ e se R è sufficientemente grande, arrestando lo sviluppo al primo termine della serie, si ha, a meno di una costante inessenziale, che il potenziale può essere espresso da ⁽²⁾:

$$(4) \quad U = -\frac{3g}{2R}(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2)$$

dove si è posto

$$(5) \quad g = \frac{hM}{R^2}.$$

Risulta chiaramente che il momento risultante rispetto a G di tali forze è dato da

$$(6) \quad \mathbf{M}_G^{(v)} = \frac{3g}{R} \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c}.$$

Nel moto relativo al baricentro, tenuto conto che le forze di trascina mento hanno momento nullo rispetto a G , il teorema del momento delle quantità di moto assume la forma

$$(7) \quad \sigma \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma \boldsymbol{\omega} = \frac{3g}{R} \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c} + \lambda \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \sigma \mathbf{H}.$$

Si può notare che nel caso $\mathbf{v} = 0$, sussiste il seguente integrale primo ⁽³⁾:

$$(8) \quad \boldsymbol{\omega} \times \sigma \boldsymbol{\omega} + \frac{3g}{R} \mathbf{c} \times \sigma \mathbf{c} = \text{cost}.$$

che rappresenta l'integrale dell'energia per $\mathbf{v} = 0$ (G fisso). Alla (8)

⁽²⁾ E. LEIMANIS, *The general Problem of the motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*, Springer Verlag (1965).

⁽³⁾ E. BENTSIK, *Su possibili moti semplici di un satellite artificiale soggetto a forze newtoniane*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, **39** (1967).

vanno associate le equazioni cinematiche

$$(9) \quad \dot{\mathbf{c}} + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\nu}) \wedge \mathbf{c} = 0$$

$$(10) \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\nu} = 0$$

$$(11) \quad \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} = H\boldsymbol{\gamma}; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

e inoltre:

$$(12) \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

$$(13) \quad H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = H^2 = \text{cost.}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

$$(14) \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

$$(15) \quad \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{c} = 0.$$

2. Moti rotatori uniformi.

Si consideri il caso di G mobile attorno a Q .

Ricordando la (7), si ha, moltiplicando scalarmente la (7) stessa per $\boldsymbol{\omega}$:

$$(16) \quad \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c} \times \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Qualora si ricerchino moti rotatori uniformi sarà, per la costanza del vettore $\boldsymbol{\omega}$:

$$(17) \quad p = \text{cost.}, \quad q = \text{cost.}, \quad r = \text{cost.}.$$

Proiettando quindi le (7) sugli assi, si ha:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (C - B) \left[qr - \frac{3g}{R} c_2 c_3 \right] = (A + B - C)qH_3 + (B - A - C)rH_2 \\ (A - C) \left[pr - \frac{3g}{R} c_1 c_3 \right] = (B + C - A)rH_1 + (C - A - B)pH_3 \\ (B - A) \left[pq - \frac{3g}{R} c_1 c_2 \right] = (A + C - B)pH_2 + (A - B - C)qH_1. \end{array} \right.$$

Da queste, interpretate come sistema di equazioni lineari nelle H_i , si possono trovare le H_i stesse in funzione delle c_i . Sostituendo tali

espressioni $H_i = H_i(c_i)$ nella (13) e tenendo conto delle (16), (12) si hanno tre equazioni algebriche in c_1, c_2, c_3 che comportano [com'è facile riconoscere] che sia $c_1 = \text{cost.}$, $c_2 = \text{cost.}$, $c_3 = \text{cost.}$ e cioè che sia \mathbf{c} costante nel corpo

Ne segue, da (9) e tenendo conto che \mathbf{c} è costante in C

$$(19) \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nu} + \varrho \mathbf{c}$$

dove ϱ è un opportuno parametro che si può dimostrare essere costante.

Infatti dalla costanza di $\boldsymbol{\omega}$ segue, tenendo conto di (15)

$$(20) \quad \omega^2 = \nu^2 + \varrho^2$$

e quindi

$$(21) \quad \varrho = \text{cost.}$$

Dovrà quindi essere, da (19), $\boldsymbol{\omega}$ parallelo a $\boldsymbol{\nu}$ (essendo $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\nu}$ vettori costanti in modulo e direzione) e, di conseguenza, da (10),

$$(22) \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = 0.$$

Ciò implica ancora che sia:

$$(23) \quad \varrho = 0$$

perchè $\boldsymbol{\omega}$ è solidale e $\mathbf{c} \times \boldsymbol{\nu} = 0$.

In base alle considerazioni svolte segue immediatamente

$$(24) \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nu}.$$

Da (7) poi, in base alle condizioni trovate, segue immediatamente che \mathbf{H} deve essere solidale a C , in modo che si avrà

$$(25) \quad \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad \mathbf{H} = \tau \boldsymbol{\nu} \quad (\tau = \text{cost.}).$$

La (7) assume allora la forma

$$(26) \quad \frac{3g}{R} \mathbf{c} \wedge \sigma \mathbf{c} - \boldsymbol{\nu} \wedge \sigma \boldsymbol{\nu} (1 + 2\tau) = 0$$

Proiettando la (26) sugli assi solidali si ottiene

$$(27) \quad (A_r - A_s) \left[\frac{3g}{R} c_r c_s - (1 + 2\tau) \nu_r \nu_s \right] = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

dove con A_r ($r = 1, 2, 3$) si indicano i momenti principali d'inerzia di C .

Si hanno quindi i seguenti casi

A) Siano diverse da zero le tre c_i e cioè sia

$$c_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ciò implica che sia anche

$$(28) \quad \begin{cases} \nu_i \neq 0 & (i \neq 1, 2, 3) \\ 1 + 2\tau \neq 0 \\ \frac{c_i}{\nu_i} = 1 \end{cases}$$

il che è assurdo per la (15) ($\mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0$).

B) Analogamente si dimostra che non può annullarsi una sola delle c_i e ciò non può essere

$$(29) \quad c_i = 0, \quad c_j \neq 0, \quad c_k \neq 0, \quad i \neq j \neq k.$$

C) Si supponga infine che sia

$$(30) \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \pm 1$$

Ne segue che dovrà essere

$$(31) \quad \nu_3 = 0, \quad 1 + 2\tau = 0.$$

Sono quindi possibili moti rotatori uniformi con asse di rotazione parallelo a \mathbf{v} (dovendo essere anche \mathbf{H} parallelo a \mathbf{v}) e appartenente al piano per G ortogonale a \mathbf{c} ; il corpo deve poi disporsi ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}$) con il terzo asse principale d'inerzia parallelo a \mathbf{c} . Si hanno quindi (se \mathbf{H} è parallelo a \mathbf{v}) moti rotatori uniformi in cui il corpo presenta sempre la stessa faccia nei confronti del centro di attrazione Q , C si dispone

con un'asse principale d'inerzia disposto secondo \mathbf{c} e l'asse di rotazione (parallelo a \mathbf{v} e quindi ad \mathbf{H}) deve appartenere al piano individuato dagli altri due assi principali, inoltre dovrà essere

$$(32) \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Una particolare attenzione va rivolta anche al caso in cui sia $c_3 \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq 2\mathbf{H}$.

Dovrà aversi in tal caso

$$(33) \quad \begin{aligned} u_3 &= 0 & r &= H_3 = 0, \\ c_1 = c_2 &= 0, & c_3 &= \pm 1, \\ u_1 u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Supposto $u_1 \neq 0$ sarà quindi $u_2 = 0$.

Sono quindi possibili moti rotatori, con $\boldsymbol{\omega}$ parallelo a \mathbf{v} e quindi ad \mathbf{H} , aventi per asse di rotazione un asse principale d'inerzia e \mathbf{c} disposto secondo un altro asse principale d'inerzia.

* * *

Come caso a sè si consideri l'ipotesi

$$(34) \quad \mathbf{v} = 0,$$

e cioè il caso in cui G sia fisso.

Ovviamente le formule generali rimangono inalterate tranne le (8), (9) che diventano rispettivamente

$$(35) \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} + \frac{3g}{R} \mathbf{c} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{c} = \text{cost.}$$

$$(36) \quad \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{c} = 0$$

e le (10), (15) che perdono significato.

Per rotazioni uniformi sarà

$$(37) \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} = \text{cost.}$$

e quindi risulterà solidale a C il vettore \mathbf{c} .

Essendo

$$(38) \quad \dot{\mathbf{c}} = 0$$

segue immediatamente

$$(39) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega \mathbf{c} \\ H_i &= \text{cost.} \quad (i = 1, 2, 3). \\ \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{H} &= 0, \\ \mathbf{H} &= H \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Le equazioni del moto proiettate sugli assi risultano le seguenti

$$(40) \quad (A_r - A_s) \left(\frac{3g}{R} - \omega^2 - 2\omega H \right) c_r c_s = 0 \quad r \neq s \quad r, s = 1, 2, 3.$$

Qualora risulti

$$(41) \quad \omega^2 + 2H\omega - \frac{3g}{R} = 0$$

l'asse di rotazione può essere qualunque.

Qualora invece sia

$$(42) \quad \omega^2 + 2H\omega - \frac{3g}{R} \neq 0$$

l'asse di rotazione deve essere un asse principale d'inerzia.

Sono quindi possibili moti rotatori uniformi per un corpo rigido fissato per il baricentro soggetto a forze newtoniane di centro Q e a forze di potenza nulla del tipo di quelle di Lorentz, se $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo alla congiungente G con Q e contemporaneamente anche il vettore \mathbf{H} è parallelo a \mathbf{c} .

La velocità angolare potrà essere qualunque solo quando l'asse di rotazione sia asse principale centrale d'inerzia.