Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Piero Plazzi

Su certe equazioni convolutorie per distribuzioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 257-269

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__257_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 54 (1975)

Su certe equazioni convolutorie per distribuzioni.

PIERO PLAZZI (*)

SUMMARY - In paragraphs 1 and 2 of this paper we define the « convolution product on a linear manifold » of two distributions (in [2], [3] it was defined for functions); the usual convolution turns out to be a special case of the former, but the main properties of the latter operation still hold: thus, we can prove exchange formulas for Fourier and Laplace transformations (theorems 3 and 5). In paragraph 3, the fore-going results are applied to the study of certain convolution-type equations of non-finite order for distributions: the classical results about these equations ([1], [4]) still hold, but now the solution may fail to be unique.

Notazioni.

Se $x, y \in R^p$, $x = (x_1 \dots x_p)$, $y = (y_1 \dots y_p)$ scriveremo $x \geqslant y$ se $x_j \geqslant y_j$, $\forall_j = 1 \dots p$ (analogamente sostituendo $\geqslant$ con $>$); se $M \in R^p$ porremo $I(M) = \{x;\, x \in R^p, x \geqslant M\}$; se $\Lambda\colon R^k \xrightarrow{1-1} R^n$ è un operatore lineare iniettivo $(k, n \in N, 1 \leqslant k \leqslant n)$, e $\mathcal{A}$ è la sua matrice rispetto alle basi canoniche, diremo che Λ è positivo se i termini $a_{ij} (i=1, \dots, n,\ j=1 \dots k)$ di $\mathcal{A}$ sono tutti non negativi (scriveremo anche $\mathcal{A} \geqslant 0$); porremo $V = \Lambda(R^k)$.

Se α è un p-indice $|\alpha|$ e x^α hanno il significato consueto; D^α vale $\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, ove le derivazioni s'intendono sempre nel senso delle distribuzioni.

Adotteremo le usuali notazioni per gli spazi di funzioni test e gli spazi di distribuzioni; se T è una distribuzione sullo spazio di funzioni

---

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle » - Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.
Lavoro eseguito mentre l'autore godeva di una borsa di Studio del CNR.

test Φ, indicheremo il suo valore in $\varphi \in \Phi$ con la scrittura $\langle T|\varphi\rangle$ oppure $\langle T_x|\varphi(x)\rangle$; indicheremo con $\mathcal{F}(T)$ la trasformata di Fourier di T (se $\varphi \in \mathcal{L}(R^p)$ intendiamo

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{R^p} \exp\,[i\langle x, y\rangle]\,\varphi(y)\,dy \quad \text{con} \quad \langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{p} x_j y_j\Big).$$

§ 1. Definizione 1. Sia Λ un operatore lineare positivo come quello sopra descritto; se $S \in \mathcal{D}'(R^k)$, $T \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\operatorname{supp} S \subseteq I(M)$, $\operatorname{supp} T \subseteq I(N)$ per costanti $M \in R^k$, $N \in R^n$ opportune (S, T hanno supporto inferiormente limitato) chiameremo convoluzione di S con T secondo la varietà lineare V, e la indicheremo con $S \underset{V}{*} T$, la distribuzione su R^n definita, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, da

$$\langle S \underset{V}{*} T|\varphi\rangle = \langle S_x \otimes T_y|\omega_\varphi(x, y)\varphi(y + \mathcal{A}x)\rangle$$

ove $\omega_\varphi \in \mathcal{D}(R^{k+n})$, $\omega_\varphi(x, y) \in [0, 1]$, $\forall (x, y) \in R^{k+n}$, $\omega_\varphi = 1$ su un intorno di $K_\varphi = \underset{(x,y)}{\operatorname{supp}}\, \varphi(y + \mathcal{A}x) \cap \big(I(M) \times I(N)\big)$. La definizione è corretta perchè:

i) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, K_φ è compatto in R^{k+n} e pertanto esiste una funzione ω_φ come quella descritta nella definizione;

ii) la definizione non dipende dalla scelta di ω_φ;

iii) $S \underset{V}{*} T$ è una distribuzione di $\mathcal{D}'(R^n)$.

Notiamo che se $\operatorname{supp} \varphi \cap I(N + \mathcal{A}M) = \emptyset$, allora $K_\varphi = \emptyset$; perciò $\operatorname{supp}\,(S \underset{V}{*} T) \subseteq I(N + \mathcal{A}M)$.

Teorema 1. Sia Λ l'operatore già descritto, $S \in \mathcal{D}'(R^k)$; posto, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$,

$$\langle \Lambda(S)|\varphi\rangle = \langle S|\varphi \circ \Lambda\rangle = \langle S_x|\varphi(\mathcal{A}x)\rangle\ ,$$

risulta:

i) $\Lambda(S) \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\operatorname{supp} \Lambda(S) = \Lambda(\operatorname{supp} S) \subseteq V$,

$$\Lambda(D_x^\alpha S_x) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{j1} D_j\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} D_j\Big)^{\alpha_k} \Lambda(S_x) \qquad \forall \alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_k)$$

k-indice;

ii) $S \in \mathcal{S}'(R^k) \Rightarrow \Lambda(S) \in \mathcal{S}'(R^n)$;

iii) se Λ è positivo, $S \in \mathcal{D}'(R^k)$, $\operatorname{supp} S \subseteq I(M)$ per un $M \in R^k$

e $T \in \mathfrak{D}'(R^n)$, $\operatorname{supp} T \subseteq I(N)$ per un $N \in R^n$, risulta

$$S \underset{V}{*} T = \Lambda(S) * T .$$

DIMOSTRAZIONE. i) È immediato che $\Lambda(S) \in \mathfrak{D}'(R^n)$.

Se ora $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ e $\operatorname{supp}\varphi \cap \Lambda(\operatorname{supp} S) = \emptyset$ si ha $\langle \Lambda(S)|\varphi\rangle = \langle S_x|\varphi(\mathcal{A}x)\rangle = 0$ perchè $\operatorname{supp}(\varphi\circ\Lambda) \cap \operatorname{supp} S = \emptyset$ (se $x_0 \in \operatorname{supp}(\varphi\circ\Lambda) \cap \operatorname{supp} S$, $\mathcal{A}x_0 \in \operatorname{supp}\varphi \cap \Lambda(\operatorname{supp} S)$, assurdo); perciò $\operatorname{supp}\Lambda(S) \subseteq \Lambda(\operatorname{supp} S)$.

Sia $\psi \in \mathfrak{D}(R^k)$; allora $\forall \varepsilon \in R^+$, $\exists \varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ tale che $\psi(x) = \varphi(\mathcal{A}x)$ $\forall x \in R^k$ e $\operatorname{supp}\varphi \subset V_\varepsilon(\Lambda(\operatorname{supp}\psi))$ (*); ciò premesso, se $y \in \Lambda(\operatorname{supp} S)$, $\exists x \in \operatorname{supp} S \subseteq R^k$ tale che $y = \mathcal{A}x$; $\forall W \subseteq R^k$ aperto $x \in W$, $\exists \psi_0 \in \mathfrak{D}(R^k)$, $\operatorname{supp}\psi_0 \subset W$ tale che $\langle S|\psi_0\rangle \neq 0$: se ora $y \in \Omega \subseteq R^n$ aperto, sia W un aperto di R^k tale che $y \in \Lambda(W) \subset V_\varepsilon(\Lambda(W)) \subset \Omega$; se φ_0 è la funzione già descritta, relativa a ψ_0, si ha $\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \Omega$, $\langle \Lambda(S)|\varphi_0\rangle = \langle S_x|\varphi_0(\mathcal{A}x)\rangle = \langle S|\psi_0\rangle \neq 0$, cioè $y \in \operatorname{supp}\Lambda(S)$: dunque $\operatorname{supp}\Lambda(S) = \Lambda(\operatorname{supp} S)$.

Infine, sia $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, $\alpha = e_r = (\underset{1}{0}, \ldots, \underset{r-1}{0}, \underset{r}{1}, \underset{r+1}{0}, \ldots, \underset{k}{0})$, $(r = 1 \ldots k)$:

$$\begin{aligned}\langle (\Lambda(D_x^\alpha S_x))_y|\varphi(y)\rangle &= \langle D_x^\alpha S_x|\varphi(\mathcal{A}x)\rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle S_x|D_x^\alpha(\varphi(\mathcal{A}x))\rangle = -\langle S_x|D_{x_r}(\varphi(\mathcal{A}x))\rangle = \\ &= -\Big\langle S_x\Big|\sum_{j=1}^n a_{jr}(D_j\varphi)(\mathcal{A}x)\Big\rangle = -\Big\langle \Lambda(S)\Big|\Big(\sum_{j=1}^n a_{jr}D_j\Big)\varphi\Big\rangle = \\ &= \Big\langle \Big(\sum_{j=1}^n a_{jr}D_j\Big)\Lambda(S)\Big|\varphi\Big\rangle .\end{aligned}$$

Iterando si ha la tesi.

ii) Se $g \in \mathcal{S}(R^n)$ poniamo $\langle \Lambda(S)|g\rangle = \langle S|g\circ\Lambda\rangle$; è facile allora verificare che questa posizione estende $\Lambda(S)$ su $\mathcal{S}(R^n)$ in una distribuzione temperata.

iii) Osserviamo che se f è continua su R^m, F è continua da R^p a R^m, $K_1 \subset R^m$, $K_2 \subset R^p$ sono compatti, allora

$$f(y) = 1\,, \quad \forall y \in V_\varepsilon(K_1)\,, \qquad F(K_2) \subseteq K_1 \Rightarrow (f\circ F)(x) = 1\,, \quad \forall x \in V_\eta(K_2)$$

per un opportuno $\eta > 0$.

(*) Se $\varepsilon > 0$, $A \subseteq R^n$, denotiamo con $V_\varepsilon(A)$ l'intorno di raggio ε di A: $V_\varepsilon(A) = \{x;\ x \in R^n,\ \exists y \in A$ tale che $\|y - x\| < \varepsilon\}$.

Ciò premesso, siano $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, $\Omega_\varphi \in \mathfrak{D}(R^{2n})$ tale che $\Omega_\varphi = 1$ su $V_\varepsilon\big(\operatorname{supp}_{(t,y)} \varphi(t+y) \cap (I(\mathcal{A}M) \times I(N))\big) = V_\varepsilon(K_1)$:

$$\langle \Lambda(S) * T|\varphi\rangle = \langle (\Lambda(S_x))_t \otimes T_y|\Omega_\varphi(t, y)\varphi(t+y)\rangle =$$
$$= \langle S_x \otimes T_y|\Omega_\varphi(\mathcal{A}x, y)\varphi(y+\mathcal{A}x)\rangle .$$

Si ponga $\Omega_\varphi(\mathcal{A}x, y) = \omega_\varphi(x, y)$; è $\omega_\varphi \in \mathfrak{D}(R^{k+n})$ e, posto $\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix}$ ($\mathfrak{I}$ è la matrice identica $n \times n$) è $\omega_\varphi = \Omega_\varphi \circ \tilde{\mathcal{A}}$ avendo indicato ancora con $\tilde{\mathcal{A}}$ l'operatore (lineare iniettivo) da R^{k+n} a R^{n+n} associato alla matrice $\tilde{\mathcal{A}}$ nelle basi canoniche.

Posto $K_2 = \operatorname{supp}_{(x,y)} \varphi(y+\mathcal{A}x) \cap (I(M) \times I(N)) \subset R^{k+n}$ si ha $\tilde{\mathcal{A}}K_2 \subseteq K_1$: per l'osservazione premessa segue $\omega_\varphi = 1$ su $V_\eta(K_2)$ per $\eta > 0$ opportuno: allora dalla definizione 1 segue $\langle S_x \otimes T_y|\Omega_\varphi(\mathcal{A}x, y)\varphi(y+\mathcal{A}x)\rangle = \langle S \underset{V}{*} T|\varphi\rangle$ e perciò $\Lambda(S) * T = S \underset{V}{*} T$.

Osservazioni. 1) iii) offre una definizione alternativa di convoluzione secondo un varietà lineare; di più, ne segue la possibilità di definire $S \underset{V}{*} T$ anche nella ipotesi che Λ sia un operatore lineare iniettivo generico ed S (oppure T) sia a supporto compatto.

2) Se $k = n$ e $S_{\mathcal{A}x}$ è definita da $\langle S_{\mathcal{A}x}|\varphi(x)\rangle = |\det \mathcal{A}|^{-1}\langle S|\varphi \circ \Lambda^{-1}\rangle$ $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, si ha $(\Lambda(S_x))_y = |\det \mathcal{A}|^{-1} S_{\mathcal{A}^{-1}y}$; se Λ è l'identità di R^n, $S \underset{V}{*} T = S * T$.

Teorema 2. Siano $k, n \in N$, $1 \leq k \leq n$, $S \in \mathfrak{D}'(R^k)$, $\operatorname{supp} S \subseteq I(M)$ per $M \in R^k$ opportuno, $T \in \mathfrak{D}'(R^n)$, $\operatorname{supp} T \subseteq I(N)$ per un $N \in R^n$, $\Lambda, \mathcal{A}, V$ abbiano il significato esposto nella definizione 1; allora risulta:

i) $(D_x^\alpha S_x) \underset{V}{*} T = \left(\sum_{j=1}^n a_{j1} D_j\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} D_j\right)^{\alpha_k} (S \underset{V}{*} T)$, $\forall k$-indice $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_k)$;

ii) $S \underset{V}{*} (D_y^\beta T_y) = D^\beta(S \underset{V}{*} T)$, $\forall n$-indice $\beta = (\beta_1 \ldots \beta_n)$;

iii) $S \in \mathcal{S}'(R^k)$, $T \in \mathcal{S}'(R^n) \Rightarrow S \underset{V}{*} T \in \mathcal{S}'(R^n)$.

La dimostrazione è immediata: i)-iii) seguono dalle proprietà della convoluzione ordinaria e dal teorema 1.

Osservazione. Analoghi risultati valgono se S (oppure T) è a supporto compatto e Λ è un operatore lineare iniettivo generico.

Teorema 3. Λ, $\mathcal{A}$, V abbiano il significato convenuto all'inizio del paragrafo, $\mathcal{F}$ sia l'operatore di Fourier;

i) $S \in \mathcal{E}'(R^k)$, $T \in \mathcal{S}'(R^n) \Rightarrow \mathcal{F}(S \underset{V}{*} T) = \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y) \cdot \mathcal{F}(T)$;

ii) $S \in \mathcal{S}'(R^k)$, $T \in \mathcal{E}'(R^n) \Rightarrow \mathcal{F}(S \underset{V}{*} T) = \mathcal{F}(T)(y) \cdot \mathcal{F}(\Lambda(S))$.

Dimostrazione. I simboli scritti hanno senso perchè nelle ipotesi i) e ii) $S \underset{V}{*} T$ è temperata e $\mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y)$, $\mathcal{F}(T)(y)$ sono funzioni di $\mathcal{C}^\infty(R^n, \boldsymbol{C})$, moltiplicatori per $\mathcal{S}'(R^n)$. Dalla definizione segue

$$\mathcal{F}(S \underset{V}{*} T) = \mathcal{F}(\Lambda(S) * T) = \begin{cases} \mathcal{F}(\Lambda(S))(y) \cdot \mathcal{F}(T) & \text{se } S \in \mathcal{E}'(R^k) \\ \mathcal{F}(T)(y) \cdot \mathcal{F}(\Lambda(S)) & \text{se } T \in \mathcal{E}'(R^n) \end{cases}$$

Basterà ormai provare che se $S \in \mathcal{E}'(R^k)$, $\mathcal{F}(\Lambda(S))(y) = \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y)$, $\forall y \in R^n$. È $S = \sum_{|\alpha| \leq p} D^\alpha f_\alpha$ per un $p \in N$ (α k-indice) e certe $f_\alpha \in \mathcal{C}(R^k, \boldsymbol{C})$, supp $f_\alpha \subseteq K \subset R^k$, K compatto; la derivazione è nel senso delle distribuzioni. Allora, $\forall g \in \mathcal{S}(R^n)$

$$\langle \mathcal{F}(\Lambda(S)) | g \rangle = \langle (\Lambda(S_x))_y | \mathcal{F}(g)(y) \rangle =$$

$$= \langle S_x | \mathcal{F}(g)(\mathcal{A}x) \rangle = \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) D_x^\alpha \mathcal{F}(g)(\mathcal{A}x)\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{j1} D_j \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} D_j \right)^{\alpha_k} \mathcal{F}(g) \right] (\mathcal{A}x)\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \mathcal{F} \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{j1} i y_j \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} i y_j \right)^{\alpha_k} g(y) \right) (\mathcal{A}x)\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \mathcal{F}\big((i \mathcal{A}^T y)^\alpha g(y) \big)(\mathcal{A}x)\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \left(\int_{R^n} \exp[i \langle \mathcal{A}x, y \rangle] (i \mathcal{A}^T y)^\alpha g(y)\, dy \right) dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq p} (-1)^{|\alpha|} \int_K f_\alpha(x) \left(\int_{R^n} \exp[i \langle x, \mathcal{A}^T y \rangle] (i \mathcal{A}^T y)^\alpha g(y)\, dy \right) dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{R^n} g(y) (-i \mathcal{A}^T y)^\alpha \left(\int_K f_\alpha(x) \exp[i \langle x, \mathcal{A}^T y \rangle]\, dx \right) dy =$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int_{R^n} g(y)(-i\mathcal{A}^T y)^\alpha \mathcal{F}(f_\alpha)(\mathcal{A}^T y)\,dy =$$

$$=\int_{R^n} g(y)\,\mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y)\,dy = \langle \mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y)|g(y)\rangle\,.$$

Poichè $y\to\mathcal{F}(\Lambda(S))(y)$, $y\to\mathcal{F}(S)(\mathcal{A}^T y)$ sono continue, dall'uguaglianza come distribuzioni temperate segue la uguaglianza puntuale.

Teorema 4. Siano $S\in\mathcal{D}'(R^k)$, $T\in\mathcal{E}'(R^n)$; Λ, $\mathcal{A}$, V abbiano il solito significato. Se $\Gamma\colon R^n\xrightarrow{1-1}R^n$ è un operatore lineare invertibile di matrice $\mathcal{B}$ e $\tilde{\Lambda}-\Gamma^{-1}\circ\Lambda$ ha matrice $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$, posto $\tilde{\Lambda}(R^k)=\tilde{V}$ si ha

$$(S_x \underset{V}{*} T_t)_{\mathcal{B}v} = \big(S_x \underset{\tilde{V}}{*} (T_{\mathcal{B}t})\big)_v$$

Dimostrazione. I simboli scritti hanno senso: infatti $\tilde{\Lambda}$ è 1-1 e $\mathrm{supp}(T_{\mathcal{B}})=\mathcal{B}^{-1}\,\mathrm{supp}\,T$ è compatto.

Sia ora $\varphi\in\mathcal{D}(R^n)$:

$$\begin{aligned}\langle (S \underset{V}{*} T)_{\mathcal{B}u}|\varphi(u)\rangle &= |\det\mathcal{B}|^{-1}\langle S \underset{V}{*} T|\varphi\circ\Gamma^{-1}\rangle = \\ &= |\det\mathcal{B}|^{-1}\langle \Lambda(S) * T|\varphi\circ\Gamma^{-1}\rangle = \\ &= |\det\mathcal{B}|^{-1}\langle (\Lambda(S_x))_t\otimes T_z|(\varphi\circ\Gamma^{-1})(t+z)\,\omega(t,z)\rangle,\end{aligned}$$

ove

$$\omega\in\mathcal{D}(R^n\times R^n)\,,\qquad \omega(t,z)=1\,,\qquad \forall (t,z)\in V_\varepsilon(K_1)=$$
$$=V_\varepsilon\big(\underset{(t,z)}{\mathrm{supp}}\,(\varphi\circ\Gamma^{-1})(t+z)\cap[\Lambda(\mathrm{supp}\,S)\times\mathrm{supp}\,T]\big)\colon K_1\subset R^n\times R^n$$

è evidentemente compatto. Perciò

$$\begin{aligned}\langle (S \underset{V}{*} T)_{\mathcal{B}u}|\varphi(u)\rangle &= |\det\mathcal{B}|^{-1}\langle S_x\otimes T_z|(\varphi\circ\Gamma^{-1})(\mathcal{A}x+z)\cdot\omega(\mathcal{A}x,z)\rangle = \\ &= \big\langle S_x\big||\det\mathcal{B}|^{-1}\langle T_z|\varphi(\tilde{\mathcal{A}}x+\mathcal{B}^{-1}z)\,\omega(\mathcal{A}x,\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}z)\rangle\big\rangle = \\ &= \big\langle S_x|\langle T_{\mathcal{B}v}|\varphi(\tilde{\mathcal{A}}x+y)\,\omega(\mathcal{A}x,\mathcal{B}y)\rangle\big\rangle = \\ &= \big\langle T_{\mathcal{B}v}|\langle S_x|\varphi(\tilde{\mathcal{A}}x+y)\,\omega(\mathcal{B}\tilde{\mathcal{A}}x,\mathcal{B}y)\rangle\big\rangle = \\ &= \big\langle T_{\mathcal{B}v}|\langle (\tilde{\Lambda}(S_x))_t|\varphi(t+y)\,\omega(\mathcal{B}t,\mathcal{B}y)\rangle\big\rangle\,.\end{aligned}$$

Posto $\tilde{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\mathcal{B} & 0\\ 0 & \mathcal{B}\end{bmatrix}$, l'operatore associato a $\tilde{\mathcal{B}}$ risulta lineare e invertibile su $R^n \times R^n$; poichè

$$K_2 = \operatorname*{supp}_{(t,y)} \varphi(t+y) \cap [\tilde{A}(\operatorname{supp} S) \times \mathfrak{B}^{-1} \operatorname{supp} T]$$

è un compatto tale che $\tilde{\mathfrak{B}} K_2 \subseteq K_1$, per l'osservazione premessa alla dimostrazione di i)-iii) segue $\omega(\tilde{\mathfrak{B}}(t, y)) = \omega(\mathfrak{B}t, \mathfrak{B}y) = 1$, $\forall (t, y) \in V_\eta(K_2)$ ($\eta > 0$ opportuno). Perciò l'ultima espressione scritta vale $\langle S \underset{V}{*} T_{\mathfrak{B}} | \varphi \rangle$, e il teorema è provato.

§ 2. A, $\mathcal{A}$, V abbiano il significato già convenuto; d'ora in poi si supporrà $\mathcal{A} \geqslant 0$. Se $T \in \mathcal{D}'(R^p)$ è trasformabile secondo Laplace (L-trasformabile) sulla striscia (o tubo) di $\mathbf{C}^p : a < \operatorname{Re} s < b$, ($a, b \in R^p$), si denota con $L(T)(s)$ il valore in s della sua trasformata di Laplace (nel senso di Schwartz).

Definizione 2. Si pone

$$\mathcal{L}'_+(R^n) = \{T;\ T \in \mathcal{D}'(R^n),\ \exists M, c \in R^n \text{ tali che } \operatorname{supp} T \subseteq I(M),\ \exp[-\langle c, x \rangle] T_x \in \mathcal{S}'(R^n)\}\,.$$

$\mathcal{L}'_+(R^n)$ è uno spazio vettoriale complesso, sottospazio di $\mathcal{D}'(R^n)$; $\forall c_1 \in R^n$ tale che $c_1 \geqslant c$ si ha $\exp[-\langle c_1, x \rangle] T_x \in \mathcal{S}'(R^n)$; ancora, se $T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, T è L-trasformabile per $\operatorname{Re} s > c$ e

$$(*) \qquad L(T)(s) = \langle \exp[-\langle c, x \rangle] T_x | \omega(x) \exp[-\langle s - c, x \rangle] \rangle$$

ove, se $\mu = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} M_j$, è $\omega(x) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\omega}(x_j)$, $\forall x \in R^n$ con $\hat{\omega} \in \mathcal{C}^\infty(R, [0, 1])$, $\hat{\omega}(y) = 1$ se $y \geqslant \mu - 1$, $\hat{\omega}(y) = 0$ se $y \leqslant \mu - 2$; si può verificare che il secondo membro di $(*)$ ha senso perchè $x \to \omega(x) \exp[-\langle s - c, x \rangle] = \prod_{j=1}^{n} \omega(x_j) \exp[-(s_j - c_j) x_j]$ è a decrescenza rapida per $\operatorname{Re} s > c$.

Osservazione. $\mathcal{L}'_+(R^n)$ è chiuso per convoluzione su varietà, cioè $S \in \mathcal{L}'_+(R^k)$, $T \in \mathcal{L}'_+(R^n) \Rightarrow S \underset{V}{*} T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$. È immediato che $S, T \in \mathcal{L}'_+(R^n) \Rightarrow S * T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$: basterà allora provare $S \in \mathcal{L}'_+(R^k) \Rightarrow A(S) \in \mathcal{L}'_+(R^n)$. Intanto, per la positività di A, $\operatorname{supp} A(S)$ è inferiormente limitato; sia poi $c \in R^k$ tale che $\exp[-\langle c, x \rangle] S_x \in \mathcal{S}'(R^k)$; se $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$

e $h \in R^n$ risulta

$$\langle \exp[-\langle h, t\rangle](\Lambda(S_x))_t|\varphi(t)\rangle = \langle S_x|\varphi(\mathcal{A}x)\exp[-\langle h, \mathcal{A}x\rangle]\rangle =$$
$$= \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle]S_x|\varphi(\mathcal{A}x)\rangle = \langle\big(\Lambda(\exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle]S_x)\big)_t|\varphi(t)\rangle :$$

perciò se h è tale che $\mathcal{A}^T h > c$, $\exp[-\langle h, t\rangle](\Lambda(S))_t$ è temperata; ciò prova che $\Lambda(S) \in \mathcal{L}'_+(R^n)$: essa è inoltre L-trasformabile per $\operatorname{Re} s > h$ (purchè $\mathcal{A}^T h > c$).

Teorema 5. Λ, $\mathcal{A}$, V abbiano il significato solito, $S \in \mathcal{L}'_+(R^k)$ $T \in \mathcal{L}'_+(R^n)$; siano $c \in R^k$, $c_1 \in R^n$ tali che $\exp[-\langle c, x\rangle]S_x \in \mathcal{S}'(R^k)$ $\exp[-\langle c_1, y\rangle]T_y \in \mathcal{S}'(R^n)$. Se $h \in R^n$ è tale che $h > c_1$, $\mathcal{A}^T h > c$ risulta

$$L(S \underset{V}{*} T)(s) = L(S)(\mathcal{A}^T s)L(T)(s) , \qquad \forall s \in C^n , \ \operatorname{Re} s > h .$$

Dimostrazione. Basterà provare che per $\operatorname{Re} s > h$ è $L(\Lambda(S))(s) = L(S)(\mathcal{A}^T s)$. Infatti per $\operatorname{Re} s > h$

$$L(\Lambda(S))(s) = \langle \exp[-\langle h, t\rangle](\Lambda(S_x))_t|\omega(t)\exp[-\langle s-h, t\rangle]\rangle ,$$

ove

$$\omega(t) = \prod_{j=1}^{n}\hat\omega(t_j) , \qquad \omega \in \mathcal{C}^\infty(R, [0, 1]) , \qquad \hat\omega(y) = 1 , \quad \forall y ,$$

$$y \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big(\sum_{l=1}^{k} a_{jl} M_l\Big) - 1 , \qquad \hat\omega(y) = 0 , \quad \forall y , \qquad y \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}\Big(\sum_{l=1}^{k} a_{jl} M_l\Big) - 2 :$$

$$L(\Lambda(S))(s) = \langle\big(\Lambda(\exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle]S_x)\big)_t|\omega(t)\exp[-\langle s-h, t\rangle]\rangle =$$
$$= \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle]S_x|\omega(\mathcal{A}x)\exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x\rangle]\rangle ,$$

ove $\operatorname{Re}(\mathcal{A}^T s) = \mathcal{A}^T \operatorname{Re} s > \mathcal{A}^T h$.

Sia

$$\Omega(x) = \prod_{j=1}^{k}\hat\Omega(x_j) , \qquad \hat\Omega \in \mathcal{C}^\infty(R, [0, 1]) , \qquad \hat\Omega(y) = 1 , \quad \forall y ,$$

$$y \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant k} M_j - 1 , \qquad \hat\Omega(y) = 0 , \quad \forall y , \qquad y \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant k} M_j - 2 ;$$

su un aperto W di R^k contenente supp S le due funzioni a decrescenza rapida (cfr. la dimostrazione del teorema 1, ii))

$$x \to \omega(\mathcal{A}x)\exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x\rangle], \qquad x \to \Omega(x)\exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x\rangle]$$

coincidono; perciò

$$\langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle] S_x | \omega(\mathcal{A}x)\exp[-\langle \mathcal{A}^T(s-h), x\rangle[\rangle =$$
$$= \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle] S_x | \Omega(x)\exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x\rangle]\rangle$$

e infine

$$L(\Lambda(S))(s) = \langle \exp[-\langle \mathcal{A}^T h, x\rangle] S_x | \Omega(x)\exp[-\langle \mathcal{A}^T s - \mathcal{A}^T h, x\rangle]\rangle =$$
$$= L(S)(\mathcal{A}^T s)\,.$$

§ 3. Se F è una distribuzione porremo $F^{*r} = \underset{1}{F} * \ldots * \underset{r}{F}$ se $r \in N$, $r \geqslant 2$; $F^{*1} = F$, $F^{*0} = \delta$ (purchè i simboli abbiano senso); se $F = (F_1 \ldots F_m) \in (\mathfrak{D}'(R^p))^m$ denoteremo con $F^{*\alpha}$ l'espressione $F^{*\alpha_1} * \ldots * F^{*\alpha_m}$.

Ciò premesso, siano dati degli operatori lineari iniettivi $\Lambda_j : R^{k_j} \xrightarrow{1-1} R^n$ $(1 \leqslant k_j \leqslant n,\ j = 1 \ldots m)$ di matrici $\mathcal{A}^{(j)} \geqslant 0$ (il generico termine di $\mathcal{A}^{(j)}$ si denoterà con $a^{(j)}_{sr}$); poniamo $V_j = \Lambda_j(R^{k_j})$ e $V = (V_1 \ldots V_m)$; se il simbolo ha senso, scriveremo $X^{*\alpha} \underset{V}{*} Y^{*\beta}$ per $X_1^{*\alpha_1} \underset{V_1}{*} (X_2^{*\alpha_2} \underset{V_2}{*} \ldots (X_m^{*\alpha_m} \underset{V_m}{*} Y^{*\beta}) \ldots,)$ ove $X = (X_1 \ldots X_m)$ e $Y = (Y_1 \ldots Y_p)$ sono una m-upla ed una p-upla di distribuzioni, α un m-indice, β un p-indice. Infine sia $\varphi(z, w) = \varphi(z_1 \ldots z_m; w_1 \ldots w_p) = \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} z^\alpha w^\beta$ una funzione intera su C^{m+p}: questi simboli manterranno lo stesso significato per tutto il paragrafo.

Teorema 6. Siano $T_j \in \mathfrak{L}'_+(R^{k_j})$, $X_l \in \mathfrak{L}'_+(R^n)$, $(j = 1 \ldots m,\ l = 1 \ldots p)$ con $\operatorname{supp} T_j$, $\operatorname{supp} X_l \subseteq I(0)$, $\forall j$, $\forall l$, $\exp[-\langle c^{(j)}, x\rangle] T_j \in \mathcal{S}'(R^{k_j})$ $\exp[-\langle c, x\rangle] X_l \in \mathcal{S}'(R^n)$ per opportuni $c^{(j)} \in R^{k_j}$, $c \in R^n$; sia $h \in R^n$ tale che $h > c$, $(\mathcal{A}^{(j)})^T h > c^{(j)}$, $\forall j = 1 \ldots m$.

Se $\exists K_j, K'_l$ costanti positive tali che

$a)$ $|L(T_j)(w^{(j)})| < K_j$, $\forall w^{(j)} \in C^{k_j}$, $\operatorname{Re} w^{(j)} > c^{(j)}$;

$b)$ $|L(X_l)(w)| < K'_l$, $\forall w \in C^n$, $\operatorname{Re} w > c$,

e ciò $\forall j = 1 \ldots m$, $\forall l = 1 \ldots p$, risulta:

i) la serie $\sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta}$ converge in $\mathfrak{D}'(R^n)$ ad una distribuzione $S \in \mathfrak{L}'_+(R^n)$, $\operatorname{supp} S \subseteq I(0)$;

ii) se $s \in C^n$, $\operatorname{Re} s > h$ si ha

$$L(S)(s) = \varphi\big(L(T_1)((\mathcal{A}^{(1)})^T s), \ldots, L(T_m)((\mathcal{A}^{(m)})^T s); L(X_1)(s) \ldots L(X_p)(s)\big)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, $T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta} \in \mathcal{L}'_+(R^n)$, $\operatorname{supp}(T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta}) \subseteq \subseteq \boldsymbol{I}(0)$, $\forall\alpha$ m-indice, $\forall\beta$ p-indice; poi, se $s \in \boldsymbol{C}^n$ e $\operatorname{Re} s > h$, $L(T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta})(s)$ è definito e si ha (dal teorema 5)

$$L(T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta})(s) = \prod_{j=1}^{m} \Big(L(T_j)\big((\mathcal{A}^{(j)})^T s\big)\Big)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^{p} \big(L(X_l)(s)\big)^{\beta_l} .$$

Si consideri la serie in $\mathcal{S}'(R^n)$

$$\exp[-\langle\sigma, x\rangle] \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta} , \qquad \sigma \geqslant h: \tag{1}$$

ogni sua ridotta è una distribuzione temperata; si ha

$$\forall g \in \mathcal{S}(R^n): \quad \langle \exp[-\langle\sigma, x\rangle] T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta} | g\rangle =$$

$$= \langle \mathcal{F}_x\big(\exp[-\langle\sigma, x\rangle] T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta}\big)_\tau | (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(g)(-\tau)\rangle =$$

$$= \langle L(T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta})(\sigma + i\tau) | (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(g)(\tau)\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \prod_{j=1}^{m} \Big(L(T_j)\big((\mathcal{A}^{(j)})^T(\sigma + i\tau)\big)\Big)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^{P} \big(L(X_l)(\sigma + i\tau)\big)^{\beta_l} \mathcal{H}(\tau)\, d\tau =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \prod_{j=1}^{m} \Big(L(T_j)\big((\mathcal{A}^{(j)})^T\sigma + i(\mathcal{A}^{(j)})^T\tau\big)\Big)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^{P} \big(L(X_l)(\sigma + i\tau)\big)^{\beta_l} \mathcal{H}(\tau)\, d\tau ,$$

avendo posto $\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{F}(g)(\tau)$, perchè, come è noto

$$L(T)(\sigma - i\tau) = \mathcal{F}_x\big(\exp[-\langle\sigma, x\rangle] T_x\big)_\tau \qquad \text{e} \qquad S = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(S)\big)_{-\tau}$$

se T è L-trasformabile, S è temperata.

Perciò sussiste la seguente maggiorazione:

$$|\langle \exp[-\langle\sigma, x\rangle] T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta} | g\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{-n} K_1^{\alpha_1} \dots K_m^{\alpha_m} (K'_1)^{\beta_1} \dots (K'_p)^{\beta_p} \int_{R^n} |\mathcal{H}(\tau)|\, d\tau$$

e dunque $\sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} \langle \exp[-\langle\sigma, x\rangle] T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta} | g\rangle$ converge (assolutamente) in $\boldsymbol{C}$, $\forall g \in \mathcal{S}(R^n)$; segue che (1) converge in $\mathcal{S}'(R^n)$ ad una distribuzione temperata S_0; perciò $\sum\limits_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta}$ converge in $\mathfrak{D}'(R^n)$ a $\exp[\langle\sigma, x\rangle]S_0 = S$; è immediato che $S \in \mathfrak{L}'_+(R^n)$, $\operatorname{supp} S \subseteq I(0)$.

Infine, se $\operatorname{Re} s > h$ si ha, posto $s = \sigma + i\tau$ $(\sigma, \tau \in R^n)$

$$\begin{aligned}
L(S)(s) &= \mathcal{F}_x(\exp[-\langle\sigma, x\rangle]S_x)_{-\tau} = \\
&= \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_x(\exp[-\langle\sigma, x\rangle](T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta}))_{-\tau} = \\
&= \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} L(T^{*\alpha} \underset{V}{*} X^{*\beta})(\sigma + i\tau) = \\
&= \sum_{(\alpha,\beta)} a_{(\alpha,\beta)} \prod_{j=1}^{m} \Big(L(T_j)\big((\mathcal{A}^{(j)})^T s\big)\Big)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^{p} \big(L(X_l)(s)\big)^{\beta_l} = \\
&= \varphi\Big(L(T_1)\big((\mathcal{A}^{(1)})^T s\big), \ldots, L(T_m)\big((\mathcal{A}^{(m)})^T s\big); L(X_1)(s) \ldots L(X_p)(s)\Big) .
\end{aligned}$$

Osservazioni 1. Ipotesi del tipo di a) e b), non necessarie nel caso classico di funzioni ([4]), non si possono troppo attenuare: si considerino $\delta' \in \mathfrak{L}'_+(R)$ e $\varphi(z) = e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/n!$; è $L(\delta')(\sigma + i\tau) = \sigma + i\tau$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\delta')^{*n}/n! = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}/n!$ non converge in $\mathfrak{D}'(R)$; infatti se $g(x) = \sum\limits_{=0}^{\infty} x^j \omega(x)$ con $\omega \in \mathfrak{D}(R)$, $\omega(x) = 1$, $\forall x$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $\omega(x) = 0$, $\forall x$, $|x| \geqslant \frac{3}{4}$, si ha $g \in \mathfrak{D}(R)$, $g^{(k)}(0) = k!$, $k = 0,1 \ldots$ e le ridotte $\sum\limits_{r=0}^{m} 1/r!\ \langle\delta^{(r)}|\, g\rangle = \sum\limits_{r=0}^{m} (-1)^r/r! \cdot$ $\cdot g^{(r)}(0) = \sum\limits_{r=0}^{m} (-1)^r$ oscillano.

2) Un teorema analogo vale nell'ipotesi che φ sia olomorfa sul polidisco di $C^{m+p}\ \prod\limits_{j=1}^{m} S(0, R_j) \times \prod\limits_{l=1}^{p} S(0, R'_l)$ (*) purchè sia $R_j > K_j$, $R'_l > K'_l$, $\forall j = 1 \ldots m$, $\forall l = 1 \ldots p$.

Teorema 7. $V, \Lambda_j, \mathcal{A}^{(j)}$ abbiano il significato già esposto; inoltre sia data $\varphi(z, w, u) = \varphi(z_1 \ldots z_m; w_1 \ldots w_p; u) = \sum\limits_{(\alpha,\beta,r)} a_{(\alpha,\beta,r)} z^\alpha w^\beta u^r$ intera su C^{m+p+1} (α m-indice, β p-indice, $r \in N \cup \{0\}$); siano $S_j \in \mathfrak{L}'_+(R^{k_j})$, $T_l \in \mathfrak{L}'_+(R^n)$, $\operatorname{supp} S_j$, $\operatorname{supp} T_l \subseteq I(0)$ $(j = 1 \ldots m, l = 1 \ldots p)$.

Si abbia l'equazione

$$\sum_{(\alpha,\beta,r)} a_{(\alpha,\beta,r)} (S^{*\alpha} \underset{V}{*} T^{*\beta}) * X^{*r} = 0 : \tag{2}$$

(*) Si pone per $z \in C$, $\varrho > 0$, $S(z, \varrho) = \{w; w \in C, |z - w| < \varrho\}$.

si dice soluzione di (2) una $X \in \mathfrak{L}'_+(R^n)$ (sicchè abbiano senso le convoluzioni scritte) che soddisfi (2) e tale che L commuti con Σ. Allora, se

i) l'equazione $\varphi(z, w, u) = 0$ ha le soluzioni locali $u = \psi(z, w) = \sum_{(\alpha,\beta)} b_{(\alpha,\beta)} z^\alpha w^\beta$ olomorfe per $|z_j| < R_j$, $|w_l| < R'_l$, $(j = 1 \dots m,\ l = 1 \dots p)$;

ii)
$$|L(S_j)(w^{(j)})| < K_j \quad \text{per } \operatorname{Re} w^{(j)} > c^{(j)}$$
$$|L(T_l)(s)| < K'_l \quad \text{per } \operatorname{Re} s > c$$

con $K_j < R_j$, $K'_l < R'_l$, $\forall j = 1 \dots m$, $\forall l = 1 \dots p$, le distribuzioni del tipo

$$X = \sum_{(\alpha,\beta)} b_{(\alpha,\beta)} S^{*\alpha} \underset{V}{*} T^{*\beta} \tag{3}$$

sono tutte e sole le soluzioni di (2).

Dimostrazione. Anzitutto, per l'osservazione 2 al teorema precedente, la serie (3) converge a un $X \in \mathfrak{L}'_+(R^n)$, $\operatorname{supp} X \subseteq I(0)$ e inoltre per $\operatorname{Re} s > h$ opportuno

$$L(X)(s) = \sum_{(\alpha,\beta)} b_{(\alpha,\beta)} \prod_{j=1}^{m} \Big(L(S_j)\big((\mathcal{A}^{(j)})^T s\big)\Big)^{\alpha_j} \cdot \prod_{l=1}^{p} \big(L(T_l)(s)\big)^{\beta_l} =$$
$$= \psi\Big(L(S_1)\big((\mathcal{A}^{(1)})^T s\big), \dots ;\ L(T_1)(s), \dots, L(T_p)(s)\Big).$$

Dunque $|L(X)(s)| < K''$ per $\operatorname{Re} s > h$ e perciò (2) converge se X è del tipo (3); di più per $\operatorname{Re} s > h'$ opportuno

$$L\Big(\sum_{(\alpha,\beta,r)} a_{(\alpha,\beta,r)} (S^{*\alpha} \underset{V}{*} T^{*\beta}) * X^{*r}\Big)(s) =$$
$$= \sum_{(\alpha,\beta,r)} a_{(\alpha,\beta,r)} \big(L(S)(\mathcal{A}^T s)\big)^\alpha \big(L(T)(s)\big)^\beta \big(L(X)(s)\big)^r =$$
$$= \varphi\big(L(S)(\mathcal{A}^T s),\ L(T)(s);\ L(X)(s)\big) =$$
$$= \varphi\Big(L(S)(\mathcal{A}^T s),\ L(T)(s);\ \psi\big(L(S)(\mathcal{A}^T s),\ L(T)(s)\big)\Big) \equiv 0$$

avendo posto $L(S)(\mathcal{A}^T s) = \Big(L(S_1)\big((\mathcal{A}^{(1)})^T s\big) \dots L(S_m)\big((\mathcal{A}^{(m)})^T s\big)\Big)$, $L(T)(s) = \big(L(T_1)(s) \dots L(T_p)(s)\big)$: dunque (3) risolve (2). Viceversa, se X risolve (2), applicando L si ha ($\operatorname{Re} s > h''$ opportuno) $\varphi\big(L(S)(\mathcal{A}^T s), L(T)(s);\ L(X)(s)\big) \equiv 0$ allora, per le ipotesi su φ

$$L(X)(s) = \sum_{(\alpha,\beta)} b_{(\alpha,\beta)} \big(L(S)(\mathcal{A}^T s)\big)^\alpha \big(L(T)(s)\big)^\beta$$

ove i $b_{(\alpha,\beta)}$ sono i coefficienti di una generica soluzione locale; perciò per unicità $X = \sum_{(\alpha,\beta)} b_{(\alpha,\beta)} S^{*\alpha} \underset{V}{*} T^{*\beta}$, cioè X è del tipo (3).

Un risultato analogo al teorema 7 sussiste per sistemi; per semplicità, si omette la dimostrazione, analoga alla precedente.

TEOREMA 7 *bis*. Λ_j, $\mathcal{A}^{(j)}$, V, S_j, T_l siano definiti come nel teorema precedente ($j = 1 \dots m$, $l = 1 \dots p$); siano assegnate le funzioni $\varphi_s(z, w; u) = \varphi_s(z_1 \dots z_m; w_1 \dots w_p; u_1 \dots u_r) = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)} a^{(s)}_{(\alpha,\beta,\gamma)} z^\alpha w^\beta u^\gamma$ ($s = 1 \dots r$) intere su $\boldsymbol{C}^{m+p+r}$ (α sarà allora un m-indice, β un p-indice, γ un r-indice). Sia dato il sistema

$$\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)} a^{(s)}_{(\alpha,\beta,\gamma)} (S^{*\alpha} \underset{V}{*} T^{*\beta}) * X^{*\gamma} = 0\,, \qquad s = 1 \dots r\,; \tag{4}$$

si dirà soluzione del sistema una r-upla di distribuzioni di $\mathcal{L}'_+(R^n)$, $X = (X_1 \dots X_r)$ che soddisfi (4) e tale che L commuti con Σ. Allora se

i) le soluzioni locali del sistema $\varphi_s(z, w, u) = 0$, $s = 1 \dots r$ del tipo $u = \psi = (\psi_1 \dots \psi_r)$ sono olomorfe (cioè a componenti olomorfe) sul polidisco $|z_j| < R_j$, $|w_l| < R'_l$, ($j = 1 \dots m$, $l = 1 \dots p$);

ii) $$|L(S_j)(w^{(j)})| < K_j \quad \text{per } \operatorname{Re} w^{(j)} > c^{(j)}$$
$$|L(T_l)(s)| < K'_l \quad \text{per } \operatorname{Re} s > c$$

con $K_j < R_j$, $K'_l < R'_l$ $\forall j, l$ le distribuzioni del tipo

$$X = (X_1 \dots X_r)\,, \qquad X_s = \sum_{(\alpha,\beta)} b^{(s)}_{(\alpha,\beta)} S^{*\alpha} \underset{V}{*} T^{*\beta}\,, \quad s = 1 \dots r \tag{5}$$

ove i $b^{(s)}_{(\alpha,\beta)}$ sono i coefficienti della s-esima componente di una generica soluzione locale, sono tutte e sole le soluzioni di (4).

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO, *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, classe di Scienze, **76** (1942-43).

[2] L. AMERIO, *Sulla trasformata doppia di Laplace*, Memorie della R. Accademia d'Italia, **12** (1941).

[3] A. PISTOIA, *Sulle operazioni di composizione secondo una varietà lineare per la trasformata multipla di Laplace*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, classe di Scienze, **84** [1951).

[4] P. RIZZONELLI, *Sulla risoluzione delle equazioni integrali concernenti composizioni secondo varietà lineari*, Bollettino U.M.I., **14** (1959).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1976.