

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NARDINI

Su certe formule d'inversione della trasformata di Laplace per distribuzioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 54 (1975), p. 245-255

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__245_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su certe formule d'inversione della trasformata di Laplace per distribuzioni.

FRANCO NARDINI (*)

SUMMARY - Zemanian [1] has extended to the distributions the Doetsch's theorem [2, p. 286] and the Post-Widder's theorem [3, p. 288] about the inversion of the Laplace transformation; this is defined as in Zemanian [4, 5]. In this paper we extend these theorems in the case that the Laplace transformation has been defined in the most general sense [6]. They are the following Theorem 1 and Theorem 2.

Notazioni.

Indicheremo con x, y, \dots punti di R^n ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ecc.); se $x, y \in R^n$, scriveremo $\langle x, y \rangle$ per $\sum_{j=1}^n x_j y_j$ e xy per $(x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$. Secondo le notazioni correnti, se α è un n -multiindice, $|\alpha|$ significa $\sum_{j=1}^n \alpha_j$, $\alpha!$ significa $\prod_{j=1}^n \alpha_j!$ ed x^α significa $\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$; se α e β sono due n -multiindici, $\alpha < \beta$ ($\alpha \leq \beta$) significa $\alpha_j < \beta_j$ ($\alpha_j \leq \beta_j$) per $j = 1, \dots, n$ e se $\beta < \alpha$, $\binom{\alpha}{\beta}$ significa $\prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle » - Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.

Nel periodo di preparazione l'A. ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

$\mathcal{D}(R^n)$, $Z(R^n)$ e $\mathcal{D}'(R^n)$, $Z'(R^n)$ hanno il significato usuale; se $T \in \mathcal{D}'(R^n)$ (oppure $Z'(R^n)$), $\langle T|\varphi \rangle$ oppure $\langle T_x|\varphi(x) \rangle$ denota il valore di T in φ ; $\mathcal{F}(T)$ denota la trasformata di Fourier di T (se $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ si intende $\mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{R^n} \exp(i\langle x, y \rangle) \varphi(y) dy$). Se $T \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\mathcal{L}(T)(\sigma + i\tau)$ significa $(\mathcal{F}(\exp(-\langle \sigma, x \rangle) T_x))_{-\tau}$.

LEMMA I. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$; allora:

$$(1) \quad \lim_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow +\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \mathcal{L}(\varphi)(\alpha\sigma) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} \varphi(\tau) d\tau$$

uniformemente sui compatti di R^n .

DIMOSTRAZIONE Sia $\text{supp } \varphi \subseteq K = \bigtimes_{j=1}^n [a_j, b_j]$ con $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$. Sia $t \in K$; allora:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \mathcal{L}(\varphi)(\alpha\sigma) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) = \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) \int_K \varphi(\tau) \exp(-\langle \alpha\sigma, \tau \rangle) d\tau = \\ &= \int_K \prod_{j=1}^n \left(- \sum_{\alpha_j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha_j}}{\alpha_j!} \exp(\sigma_j(t_j - \tau_j) \alpha_j) \right) \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

(per ogni punto σ , $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} ((-1)^{|\alpha|+n}/\alpha!) |\varphi(\tau)| \exp(\langle \alpha\sigma, t - \tau \rangle)$ converge uniformemente per $t, \tau \in K$). L'ultimo integrale scritto è uguale a:

$$I_1 + \sum_{j=2}^n I_j$$

dove

$$(2) \quad I_1 = \int_{a_1}^{t_1} \dots \int_{a_n}^{t_n} \prod_{j=1}^n [1 - \exp(-\exp(\sigma_j(t_j - \tau_j)))] \varphi(\tau) d\tau$$

e I_j è un integrale del tipo di (2) in cui almeno uno degli intervalli $[a_k, t_k]$ è sostituito con $[t_k, b_k]$. Sviluppando il prodotto di (2), tenendo

presente che $\exp(-\exp(\sigma(t-\tau))) \leq 1$ e che

$$\lim_{\sigma_j \rightarrow +\infty} \int_{a_j}^{t_j} \exp(-\exp(\sigma_j(t_j - \tau_j))) d\tau_j = 0$$

uniformemente sui compatti di R , si ha:

$$(3) \quad \lim_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow +\infty} I_1 = \int_{a_1}^{t_1} \dots \int_{a_n}^{t_n} \varphi(\tau) d\tau.$$

Risulta:

$$(4) \quad \lim_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow +\infty} I_j = 0 \quad \text{per } j > 1;$$

per esempio se I_2 è l'integrale dedotto da I_1 sostituendo $[a_1, t_1]$ con $[t_1, b_1]$, si ha, se $0 < \delta < b_1 - t_1$,

$$|I_2| \leq \int_{t_1}^{t_1+\delta} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} |\varphi(\tau)| d\tau + \int_{t_1+\delta}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \exp(\sigma_1(t_1 - \tau_1)) |\varphi(\tau)| d\tau$$

(tenendo presente che $1 - \exp(-x) \leq x$ per $x \geq 0$) e quindi, per $\sigma_1 > 0$,

$$|I_2| \leq \max_{R^n} |\varphi| \prod_{j=2}^n (b_j - a_j) [\delta + (b_1 - a_1) \exp(-\delta\sigma_1)];$$

di qui segue manifestamente la (4) se $j = 2$.

La (1) segue quindi da (3) e (4).

OSSERVAZIONE. Per ogni multiindice β si ha anche:

$$\lim_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow +\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n = 1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \mathfrak{L}(\varphi)(\alpha\sigma) D_t^\beta \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) = D_t^\beta \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} \varphi(\tau) d\tau$$

uniformemente sui compatti di R^n .

Ciò segue dall'osservare che $\mathfrak{L}(\varphi)(\alpha\sigma) D_t^\beta \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) = \mathfrak{L}(D_t^\beta \varphi)(\alpha\sigma) \cdot \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle)$ e $D_t^\beta \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} \varphi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} D_\tau^\beta \varphi(\tau) d\tau$.

TEOREMA 1. Sia K_1, K_2, \dots una successione di compatti di R^n tali che $K_j \subset K_{j+1}$, $\forall j$ e $R^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Sia $\omega_j \in \mathcal{D}(R^n)$ $\omega_j(x) = 1 \quad \forall x \in K_j$, $j = 1, 2, \dots$. Sia $T \in \mathcal{D}'(R^n)$. Allora:

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow +\infty} \left\langle \left\langle \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \cdot \mathcal{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) |\mathcal{F}(\omega_m)(\tau)| \varphi(t) \right\rangle \right\rangle = \langle T | \varphi \rangle$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che, fissato ad arbitrio $t \in R^n$ e $\sigma_j > 1$ per $j = 1, 2, \dots, n$, la serie:

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \mathcal{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle)$$

converge in $Z'(R^n)$. Sia infatti $\psi \in Z(R^n)$; sia Ω un aperto limitato di R^n tale che $\text{supp } \mathcal{F}(\pi_{-1}\psi) \subset \Omega$ ($(\pi_{-1}\psi)(x) = \psi(-x)$) e a, b due punti di R^n tali che $\Omega \subset \bigcap_{j=1}^n [a_j, b_j]$. Allora esistono $C_\Omega > 0$ e p_Ω intero maggiore di 0 tali che:

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \mathcal{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) |\psi(\tau)| \right\rangle \right| = \\ & = \prod_{j=1}^n \left(\alpha_j \sigma_j \frac{1}{\alpha_j!} \exp(\alpha_j t_j \sigma_j) \right) |\langle T_x | \mathcal{F}(\pi_{-1}\psi)(x) \exp(-\langle \alpha\sigma, x \rangle) \rangle| \leq \\ & \leq \prod_{j=1}^n \left(\sigma_j \alpha_j \frac{1}{\alpha_j!} \exp(\alpha_j t_j \sigma_j) \right) C_\Omega \sup_{|\beta| \leq p_\Omega} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta(\mathcal{F}(\pi_{-1}\psi)(x) \exp(-\langle \alpha\sigma, x \rangle))|; \end{aligned}$$

sviluppando la derivata all'ultimo membro, questo si maggiora con:

$$\prod_{j=1}^n \left((\alpha_j \sigma_j)^{p_\Omega+1} \frac{1}{\alpha_j!} \exp(\alpha_j \sigma_j (t_j - a_j)) \right) C_\Omega \sup_{|\beta| \leq p_\Omega} \sup_{x \in \Omega} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \cdot |D_x^{\beta-\gamma} \mathcal{F}(\pi_{-1}\psi)(x)|.$$

La serie a termini positivi:

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n (\alpha_j \sigma_j)^{p_\Omega+1} \frac{1}{\alpha_j!} \exp(\alpha_j \sigma_j (t_j - a_j))$$

è evidentemente convergente; dunque, per la sequenziale completezza di $Z'(R^n)$, risulta:

$$(6) \quad S(\sigma, t) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \mathfrak{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \cdot \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) \in Z'(R^n).$$

Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ e siano c, d due punti di R^n tali che $\text{supp } \varphi \subseteq \bigtimes_{j=1}^n [c_j, d_j]$. Allora, attribuendo a $\Omega, p_\Omega, C_\Omega, a$ e b il significato già dichiarato, si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left\langle \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \mathfrak{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) \middle| \psi(\tau) \right\rangle \middle| \varphi(t) \right\rangle \right| = \\ & = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_j \sigma_j}{\alpha_j!} \right) \left| \langle T_x | \mathcal{F}(\pi_{-1}\psi)(x) \exp(-\langle \alpha\sigma, x \rangle) \rangle \right| \cdot \\ & \cdot \left| \int_{c_1}^{d_1} \dots \int_{c_n}^{d_n} \varphi(t) \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) dt \right| \leq \prod_{j=1}^n \left((\alpha_j \sigma_j)^{p_\Omega+1} \frac{1}{\alpha_j!} \exp(\alpha_j \sigma_j (d_j - a_j)) \right) \cdot \\ & \cdot C_\Omega \sup_{|\beta| \leq p_\Omega} \sup_{x \in \Omega} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |D_x^\gamma \mathcal{F}(\pi_{-1}\psi)(x)| \int_{R^n} |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Per la stessa osservazione già fatta e per la sequenziale completezza di $\mathcal{D}'(R^n)$, si ha quindi:

$$(7) \quad T(\sigma, \psi) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \left\langle \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \mathfrak{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \cdot \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) \middle| \psi(\tau) \right\rangle \in \mathcal{D}'(R^n)$$

per ogni $\psi \in Z(R^n)$ e $\sigma_j > 1$ per $j = 1, 2, \dots, n$.

Per la (6) si ha:

$$(8) \quad (T(\sigma, \psi))_s = \langle (S(\sigma, t))_t | \psi(\tau) \rangle$$

$\forall \psi \in Z(R^n)$ e $\sigma_j > 1$ per $j = 1, 2, \dots, n$.

Ciò premesso, dimostriamo la (5). Per (6), (8) e (7) si ha:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \mathfrak{L}(T)(\alpha\sigma + i\tau) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \exp(\langle \alpha\sigma, t \rangle) \middle| \mathcal{F}(\omega_m)(\tau) \right\rangle \middle| \varphi(t) \right\rangle = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\langle \left\langle \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\exp(-\langle \alpha \sigma, x \rangle) T_x)_{-\tau} | \mathcal{F}(\omega_m)(\tau) \right\rangle \exp(\langle \alpha \sigma, t \rangle) | \varphi(t) \right\rangle = \\
& = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{(\alpha - (1, \dots, 1))!} \left(\prod_{j=1}^n \sigma_j \right) \langle T_x | \exp(-\langle \alpha \sigma, x \rangle) \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\pi_{-1} \mathcal{F}(\omega_m))(x) \rangle \int_{R^n} \varphi(t) \exp(\langle \alpha \sigma, t \rangle) dt = \\
& = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \langle T_x | \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j \right) \mathfrak{L}(\pi_{-1} \varphi)(\alpha \sigma) \exp(-\langle \alpha \sigma, x \rangle) \omega_m(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Poichè

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\prod_{j=1}^n (\alpha_j \sigma_j) \right) | \mathfrak{L}(\pi_{-1} \varphi)(\alpha \sigma) | \exp(-\langle \alpha \sigma, x \rangle)$$

converge uniformemente insieme ad ogni sua derivata sui compatti di $R^n(x)$, l'ultimo membro si può scrivere

$$\begin{aligned}
& \left\langle T_x \left| \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \left(\prod_{j=1}^n (\alpha_j \sigma_j) \right) \mathfrak{L}(\pi_{-1} \varphi)(\alpha \sigma) \exp(-\langle \alpha \sigma, x \rangle) \omega_m(x) \right\rangle = \\
& = \left\langle T_x \left| \left(\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|+n}}{\alpha!} \mathfrak{L}(D^{(1, \dots, 1)}(\pi_{-1} \varphi))(\alpha \sigma) \exp(\langle \alpha \sigma, -x \rangle) \right) \omega_m(x) \right\rangle
\end{aligned}$$

Per il Lemma I, il limite per $\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow +\infty$ dell'ultimo membro è:

$$\begin{aligned}
& \langle T_x | \left(\int_{-\infty}^{-x_1} \dots \int_{-\infty}^{-x_n} D^{(1, \dots, 1)}(\pi_{-1} \varphi)(t) dt \right) \omega_m(x) \rangle = \\
& = \langle T_x | (\pi_{-1} \varphi)(-x) \omega_m(x) \rangle = \langle T_x | \varphi(x) \omega_m(x) \rangle
\end{aligned}$$

e questo, per $m \rightarrow +\infty$, converge a $\langle T | \varphi \rangle$. Con ciò la prova del Teorema 1 è conclusa.

LEMMA II. Sia $I = (R^+)^n$. Se $\varphi \in \mathcal{D}_I(R^n)$, allora per ogni multi-indice β è:

$$(9) \quad \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow +\infty} D_x^\beta \frac{\alpha^{\alpha+(1, \dots, 1)}}{\alpha!} \int_I \exp(-\langle \alpha, y \rangle) y^{\alpha-(1, \dots, 1)} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy = D_x^\beta \varphi(x)$$

uniformemente sui compatti di R^n .

DIMOSTRAZIONE. Riportiamo per comodità le seguenti formule di Widder [3, p. 287]. Sia $0 < \eta < 1$; allora, posto

$$f_k(x) = \frac{k^{k+1}}{k!} x^k \exp(-kx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

risulta:

$$(10) \quad \int_0^{+\infty} f_k(x) dx = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$(11) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\eta} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{1+\eta}^{+\infty} f_k(x) dx = 0$$

$$(12) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{1-\eta}^{1+\eta} f_k(x) dx = 1 - 0.$$

Osserviamo che da (11) segue che, se p è un intero maggiore o uguale 0,

$$(13) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\eta} x^{-p-1} f_k(x) dx = 0 \quad (k > p + 1)$$

infatti:

$$\int_0^{1-\eta} x^{-p-1} f_k(x) dx \leq \frac{k^k (k-p-1)!}{(k-1)! (k-p-1)^{k-p}} \int_0^{1-\eta} f_{k-p-1}(x) dx$$

e

$$\frac{k^k (k-p-1)!}{(k-1)! (k-p-1)^{k-p}} = \left(\prod_{j=1}^p \frac{k}{k-j} \right) \left(1 + \frac{p+1}{k-p-1} \right)^{k-p}$$

converge a $\exp(p+1)$ per $k \rightarrow +\infty$.

Proviamo ora la (9). Sia $\varphi \in \mathcal{D}_I(\mathbb{R}^n)$. Per $\alpha - \beta > (1, \dots, 1)$ si ha, tenendo presente la (10),

$$(14) \quad \left| D_x^\beta \frac{\alpha^{\alpha+(1,\dots,1)}}{\alpha!} \int_I \exp(-\langle \alpha, y \rangle) y^{\alpha-(1,\dots,1)} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy - D^\beta \varphi(x) \right| \leq \\ \leq \frac{\alpha^{\alpha+(1,\dots,1)}}{\alpha!} \int_I \exp(-\langle \alpha, y \rangle) y^\alpha \left| y^{-\beta-(1,\dots,1)} (D^\beta \varphi)\left(\frac{x}{y}\right) - D^\beta \varphi(x) \right| dy.$$

Fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, esiste η , $0 < \eta < 1$, tale che

$$(15) \quad \left| y^{-\beta-(1,\dots,1)}(D^\beta\varphi)\left(\frac{x}{y}\right) - D^\beta\varphi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3^n}$$

$\forall x \in R^n$ e $\forall y \in [1-\eta, 1+\eta]^n$. Il secondo membro di (14) si scrive:

$$J_1 + \sum_{j=2}^{3^n} J_j$$

dove:

$$(16) \quad J_1 = \frac{\alpha^{\alpha+(1,\dots,1)}}{\alpha!} \int_{[1-\eta, 1+\eta]^n} \exp(-\langle \alpha, y \rangle) y^\alpha \left| y^{-\beta-(1,\dots,1)}(D^\beta\varphi)\left(\frac{x}{y}\right) - D^\beta\varphi(x) \right| dy$$

e gli J_j con $j = 2, \dots, 3^n$ sono gli integrali del tipo (16) dove $[1-\eta, 1+\eta]^n$ viene sostituito col prodotto cartesiano di p intervalli $[0, 1-\eta]$, q intervalli $[1-\eta, 1+\eta]$ ed r intervalli $[1+\eta, +\infty[$, con $p+q+r = n$ e $p+r \geq 1$, in tutti i modi possibili. A causa della (15) e della (12) si ha:

$$(17) \quad J_1 \leq \frac{\varepsilon}{3^n} \prod_{j=1}^n \int_{1-\eta}^{1+\eta} f_{\alpha_j}(t) dt < \frac{\varepsilon}{3^n}$$

$\forall x \in R^n$ e $\forall \alpha$. Proviamo ora che esiste $m_\varepsilon \in N$ tale che

$$(18) \quad J_j < \frac{\varepsilon}{3^n}$$

per $j = 2, \dots, 3^n$, $\forall x \in R^n$, $\forall \alpha$ tale che $\alpha_j > m_\varepsilon$ $j = 1, 2, \dots, n$. Esaminiamo per esempio

$$J = \frac{\alpha^{\alpha+(1,\dots,1)}}{\alpha!} \int_{[0, 1-\eta]^p} \int_{[1-\eta, 1+\eta]^q} \int_{[1+\eta, +\infty]^r} \exp(-\langle \alpha, y \rangle) y^\alpha \left| y^{-\beta-(1,\dots,1)}(D^\beta\varphi)\left(\frac{x}{y}\right) - D^\beta\varphi(x) \right| dy.$$

Poichè $\varphi \in \mathcal{D}_l(R^n)$, esistono $a, b \in R^+$, $a < b$, tali che $\text{supp } \varphi \subseteq [a, b]^n$;

si ha:

$$\begin{aligned}
 J < \sup_{R^n} |D^\beta \varphi| \prod_{j=1}^p \int_0^{1-\eta} f_{\alpha_j}(t) dt \prod_{j=p+1}^{p+q} \int_{1-\eta}^{1+\eta} f_{\alpha_j}(t) dt \prod_{j=p+q+1}^n \int_{1+\eta}^{+\infty} f_{\alpha_j}(t) dt + \\
 + \sup_{\tau \in [0, +\infty[^p} \sup_{\nu' \in [1-\eta, 1+\eta]^q} \sup_{x' \in [(1-\eta)a, (1+\eta)b]^q} \sup_{\nu'' \in [1+\eta, +\infty[^r} \sup_{x'' \in [(1+\eta)a, +\infty[^r} \\
 \cdot \left| (y')^{-\beta' - (1, \dots, 1)} (y'')^{-\beta'' - (1, \dots, 1)} (D^\beta \varphi) \left(\tau, \frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''} \right) \right| \cdot \\
 \cdot \prod_{j=1}^p \int_0^{1-\eta} f_{\alpha_j}(t) t^{-\beta_j - 1} dt \prod_{j=p+1}^{p+q} \int_{1-\eta}^{1+\eta} f_{\alpha_j}(t) dt \prod_{j=p+q+1}^n \int_{1+\eta}^{+\infty} f_{\alpha_j}(t) dt
 \end{aligned}$$

dove se $y \in R^n$ sono stati indicati con y' ed y'' rispettivamente i punti $(y_{p+1}, \dots, y_{p+q}) \in R^q$ e $(y_{p+q+1}, \dots, y_n) \in R^r$. Per le (11), (12), (13), ricordando che $p + r \geq 1$, si può affermare che esiste un numero naturale m_ε (indipendente da x) tale che

$$(19) \quad J < \frac{\varepsilon}{3^n}$$

$\forall x \in R^n$ e $\forall \alpha$ con $\alpha_j > m_\varepsilon$ per $j = 1, \dots, n$. Di qui segue la (18). Dalle (17) e (18) segue

$$J_1 + \sum_{j=2}^{3^n} J_j < \varepsilon$$

$\forall x \in R^n$, $\forall \alpha$ con $\alpha_j > m_\varepsilon$ per $j = 1, \dots, n$. Ciò prova il Lemma II.

TEOREMA 2. Sia $T \in \mathcal{D}'(R^n)$. Siano $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ aperti limitati di R^n tali che $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1} \subset I \quad \forall j$ e $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$; sia $\omega_j \in \mathcal{D}(R^n)$ tale che $\text{supp } \omega_j \subset \Omega_{j+1}$ e $\omega_j(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}_j$. Allora

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow +\infty} \int_I \left\langle \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\frac{\alpha}{t} \right)^{\alpha + (1, \dots, 1)} \right. \\
 \cdot \left. (D_\sigma^\alpha \mathcal{L}(T)) \left(\frac{\alpha}{t} + i\tau \right) | \mathcal{F}(\omega_m)(\tau) \right\rangle \varphi(t) dt = \langle T | \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_I(R^n).
 \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che ([6]) la funzione

$$t \rightarrow \left\langle \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} (D_\sigma^\alpha \mathcal{L}(T)) \left(\frac{\alpha}{t} + i\tau\right) |\psi(\tau)\right\rangle$$

è di classe $C^\infty(I)$ per ogni $\psi \in Z(R^n)$ ed è pertanto un moltiplicatore per $\mathfrak{D}_I(R^n)$; poichè $\mathcal{F}(\omega_m) \in Z(R^n) \forall m \in N$, l'integrale al primo membro di (20) esiste. È

$$\begin{aligned} & \int_I \left\langle \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} (D_\sigma^\alpha \mathcal{L}(T)) \left(\frac{\alpha}{t} + i\tau\right) |\mathcal{F}(\omega_m)(\tau)\right\rangle \varphi(t) dt = \\ & = \left\langle 1_t \left| \left\langle \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} \mathcal{F} \left(\exp \left(- \left\langle x, \frac{\alpha}{t} \right\rangle \right) (-x)^\alpha T_x \right) \right|_{-\tau} \right| \right. \\ & \left. |\mathcal{F}(\omega_m)(\tau)\right\rangle \varphi(t) \right\rangle = \left\langle 1_t \left| \left\langle T_x \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\pi_{-1} \mathcal{F}(\omega_m))(x) x^\alpha \exp \left(- \left\langle x, \frac{\alpha}{t} \right\rangle \right) \right| \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} \varphi(t) \right| \right\rangle; \end{aligned}$$

poichè

$$(x, t) \rightarrow \omega_m(x) x^\alpha \exp \left(- \left\langle \frac{\alpha}{t}, x \right\rangle \right) \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} \varphi(t)$$

appartiene a $\mathfrak{D}(R^n \times R^n)$, l'ultima espressione scritta si può porre nella seguente forma:

$$\begin{aligned} & \left\langle 1_t \otimes T_x \left| \omega_m(x) x^\alpha \exp \left(- \left\langle \frac{\alpha}{t}, x \right\rangle \right) \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} \varphi(t) \right\rangle = \\ & = \left\langle T_x \left| \frac{1}{\alpha!} x^\alpha \left\langle 1_t \left| \exp \left(- \left\langle \frac{\alpha}{t}, x \right\rangle \right) \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} \varphi(t) \right\rangle \omega_m(x) \right\rangle = \\ & = \left\langle T_x \left| \left(\frac{\alpha^{\alpha+(1,\dots,1)}}{\alpha!} x^\alpha \int_I \exp \left(- \left\langle \frac{\alpha}{t}, x \right\rangle \right) \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+(1,\dots,1)} \varphi(t) dt \right) \omega_m(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Posto $x/t = y$, l'ultimo membro dell'ultima uguaglianza scritta diventa:

$$(21) \quad \left\langle T_x \left| \left(\frac{\alpha^{\alpha+(1,\dots,1)}}{\alpha!} \int_I \exp \left(- \langle \alpha, y \rangle \right) y^{\alpha-(1,\dots,1)} \varphi \left(\frac{x}{y} \right) dy \right) \omega_m(x) \right\rangle$$

(a causa della presenza del fattore $\omega_m(x)$, che è zero se per almeno uno j è $x_j \leq 0$, il cambiamento di variabile si intende effettuato per quegli x per cui $x_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$). In virtù del Lemma II, la (21), per $\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow +\infty$, converge a

$$(22) \quad \langle T_x | \varphi(x) \omega_m(x) \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

e la (22), per $m \rightarrow +\infty$, converge a

$$\langle T_x | \varphi(x) \rangle$$

Così è provata la (20).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. H. ZEMANIAN, *Inversion formulas for the distributional Laplace transformation*, J. SIAM Appl. Math., **14** (1966).
- [2] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, vol. I, Verlag Birkhauser, Basel (1950).
- [3] D. V. WIDDER, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton (1946).
- [4] A. H. ZEMANIAN, *The distributional Laplace and Mellin transformations*, J. SIAM Appl. Math., **14** (1966).
- [5] A. H. ZEMANIAN, *Generalized integral transformations*, Interscience, New York (1968).
- [6] T. ISHIHARA, *On generalized Laplace transforms*, Proc. Japan Acad., **37**, n. 9 (1961).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1976.