

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO BOVE

**Sul problema di Dirichlet in un cono per
l'equazione $\Delta^m u = f$**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 54 (1975), p. 231-244

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__231_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sul problema di Dirichlet in un cono per l'equazione $\Delta^m u = f$.

ANTONIO BOVE (*)

SUMMARY - In the present paper we consider the Dirichlet problem for the iterated Laplace operator in a conic region of R^n and extend a preceding result of P. Grisvard [1]. We suppose that the space dimension n be greater than the order of the differential operator under consideration. Although in a particular case, we obtain some results analogous to V. A. Kondrat'ev's ones [2].

1. Sia $m \in N$ e $\Omega \subset R^n$,

$$\Omega = \{x; x = \varrho\omega, \varrho \in R^+, \omega \in G \subset S^{n-1}\},$$

G aperto di S^{n-1} , essendo $S^{n-1} = \{x; x \in R^n, \|x\| = 1\}$.

Consideriamo il problema: determinare u tale che

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta^m u = f & \text{in } \Omega \\ \left. \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right|_{\partial\Omega} = 0, & j = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

Precisamente, utilizzando coordinate polari: determinare $u(r, \omega) \in \mathcal{D}'(R^+; H_0^m(G))$ tale che

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L \right)^m u(r, \omega) = f(r, \omega) \text{ in } \Omega$$

ove L denota l'operatore di Laplace-Beltrami su S^{n-1} .

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle » - Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Ricordiamo che per $H^t(G)$, $H_0^t(G)$ si intendono gli ordinari spazi di Sobolev di ordine t sulla varietà G , costruiti servendosi delle carte locali per G (si veda [3] p. 38).

Supponiamo che ∂G sia almeno di classe C^{2m} ; allora l'operatore L^m con dominio $\mathcal{D}(L^m) = H^{2m}(G) \cap H_0^m(G)$ è autoaggiunto su $L^2(G)$.

Denotiamo con λ_k , $k \in N$, lo spettro dell'operatore L e con v_k , $k \in N$, le corrispondenti autofunzioni:

$$Lv_k = \lambda_k \cdot v_k, \quad k \in N.$$

$\{v_k; k \in N\}$ costituisce una base ortonormale e completa in $L^2(G)$; si può allora scrivere

$$(2.1) \quad u(r, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) v_k(\omega) \quad \text{ove} \quad u_k(r) = \langle u(r, \cdot), v_k(\cdot) \rangle_{L^2(G)}.$$

Ricordiamo che vale il risultato [3; p. 42]

$$H^t(G) = \left\{ u; u \in \mathcal{D}'(G), \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2t} |\langle u, v_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

DEFINIZIONE 1.1. $\forall \gamma \in R$ poniamo

$$L_{\gamma}^2(R^+) = \{ \varphi; \varphi: R^+ \rightarrow C, \varphi \text{ misurabile}, \|x^{\gamma} \varphi(x)\|_{L^2(R^+)} < +\infty \}.$$

Assegnato $\sigma \in R$ e $u \in L_{\sigma - \frac{1}{2}}^2(R^+)$, indichiamo con

$$\tilde{u}(s) = \int_0^{+\infty} u(t) t^{s-1} dt, \quad s \in C, \sigma = \text{Re } s,$$

la trasformata di Mellin della u ; si ha:

$$u(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{u}(s) t^{-s} ds$$

ove entrambi gli integrali convergono nella norma di L^2 .

Poniamo

$$\tilde{A}(s) = s^2 - (n-2)s + L.$$

Applicando formalmente la trasformazione di Mellin nella variabile radiale r , il problema si scrive nel modo seguente:

$$\tilde{A}(s+2m-2)\tilde{A}(s+2m-4)\dots\tilde{A}(s+2)\tilde{A}(s)\tilde{u}(s,\omega) = \tilde{f}(s+2m,\omega)$$

ove

$$\tilde{u}(s,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(s)v_k(\omega)$$

e analogamente per la $\tilde{f}(s,\omega)$.

Per le singole componenti nella base delle v_k , $k \in N$, si ha

$$(3.1) \quad \left\{ \prod_{j=1}^m [(s+2m-2j)^2 - (n-2)(s+2m-2j) + \lambda_k] \right\} \tilde{u}_k(s) = \tilde{f}_k(s+2m), \quad k \in N.$$

Indichiamo con

$$\left. \begin{matrix} \mu_{kj} \\ \nu_{kj} \end{matrix} \right\} = 2j - 2m + n/2 - 1 + \begin{cases} - \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 - \lambda_k \right]^{\frac{1}{2}} \\ + \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 - \lambda_k \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\lambda_k \leq 0) \quad k \in N, \quad j = 1, \dots, m,$$

le radici dell'equazione $(x+2m-2j)^2 - (n-2)(x+2m-2j) + \lambda_k = 0$.
Si ha:

PROPOSIZIONE 1.1. Supponiamo $f_k \in L_{\sigma+2m-\frac{1}{2}}^2(R^+)$, $\forall k \in N$, essendo $\sigma \in R$, $\sigma \neq \mu_{kj}$, $\sigma \neq \nu_{kj}$, $\forall k \in N$, $j = 1, \dots, m$. Allora esiste $u_k \in L_{\sigma-\frac{1}{2}}^2(R^+)$, tale che \tilde{u}_k soddisfa la (3.1) e che

$$r^j u_k^{(j)}(r) \in L_{\sigma-\frac{1}{2}}^2(R^+), \quad j = 0, 1, \dots, 2m.$$

DIMOSTRAZIONE. $f_k \in L_{\sigma+2m-\frac{1}{2}}^2(R^+)$ implica che esiste in $\mathfrak{L}^2(R)$ $\tilde{f}_k(\sigma+2m+i\tau)$, $\tau \in R$.

Per la relazione di Parseval relativa alla trasformazione di Mellin

in $L^2(\mathbb{R}^+)$ si ha:

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2_{\sigma-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)}^2 &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}_k(\sigma + i\tau)|^2 d\tau = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_k(\sigma + 2m + i\tau)|^2 \left| \prod_{j=1}^m (\sigma - \mu_{kj} + i\tau)(\sigma - \nu_{kj} + i\tau) \right|^{-2} d\tau \leq \\ &\leq \left(\prod_{j=1}^m |\sigma - \mu_{kj}| |\sigma - \nu_{kj}| \right)^{-2} \|f_k\|_{L^2_{\sigma+2m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Analogamente si ragiona per $r^j u_k^{(j)}(r)$, $j = 1, \dots, 2m$.

PROPOSIZIONE 2.1. Sia $\theta \in \mathbb{R}$, tale che $r^\theta f(r, \omega) \in L^2(\Omega)$, $\theta \neq \mu_{kj} - n/2 + 2m$, $\theta \neq \nu_{kj} - n/2 + 2m$, $\forall k \in N$, $j = 1, \dots, m$. Allora

$$r^{\theta-2m+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega),$$

ove α è un multiindice tale che $0 \leq |\alpha| \leq 2m$ ($r = \|x\|$).

DIMOSTRAZIONE Si prova facilmente che $r^\theta f(r) \in L^2(\Omega)$ equivale a $f_k \in L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)$, $\forall k \in N$, essendo $\sigma_\theta = \theta + n/2 - 2m$. La prova procede quindi in modo analogo a quella del teorema 1 di [1]. Infatti

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2m} \int_0^{+\infty} r^{2(\theta-2m+i)} \|D_r^i u(r, \cdot)\|_{H^{2m-i}(G)}^2 r^{n-1} dr \leq \\ &\leq C' \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pari}}}^{2m} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2m-i}) \left(\prod_{l=1}^{m-i/2} |\sigma - \mu_{kl}| |\sigma - \nu_{kl}| \right)^{-2} \|f_k\|_{L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)}^2 \right] + \\ &+ C'' \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ dispari}}}^{2m} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2m-i}) \left(\prod_{l=1}^{m-(i+1)/2} |\sigma - \mu_{kl}| |\sigma - \nu_{kl}| \right)^{-2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot |\sigma - \mu_{k,m-(i-1)/2}|^{-2} \|f_k\|_{L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)}^2 \right] \end{aligned}$$

che converge poichè $\forall k \in N$, $\forall l = 1, \dots, m$, $\mu_{kl}, \nu_{kl} = 0((-\lambda_k)^{\frac{1}{2}})$ per

$k \rightarrow \infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^2_{\sigma_\theta+2m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)}^2 < +\infty$, poichè $r^\theta f(r, \omega) \in L^2(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 3.1. È possibile dare una rappresentazione della u_k , $k \in N$. Infatti sia

$$\begin{aligned} \sigma > \mu_{kj} & \quad \text{per } j \in \{l_1, \dots, l_p\} \subseteq \{1, \dots, m\}, \quad p \in N, \\ \sigma < \mu_{kj} & \quad \text{in caso contrario} \\ \sigma > \nu_{kr} & \quad \text{per } r \in \{l'_1, \dots, l'_q\} \subseteq \{1, \dots, m\}, \quad q \in N, \\ \sigma < \nu_{kr} & \quad \text{in caso contrario.} \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k(s) = & \left[\prod_{j \in \{l_1, \dots, l_p\}} (s - \mu_{kj})^{-1} \right] \cdot \left[\prod_{j \in \{l'_1, \dots, l'_q\}} (s - \nu_{kj})^{-1} \right] \cdot \\ & \cdot \left[\prod_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l_1, \dots, l_p\}} (s - \mu_{kt})^{-1} \right] \cdot \left[\prod_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l'_1, \dots, l'_q\}} (s - \nu_{kt})^{-1} \right] \cdot \tilde{f}(s + 2m). \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} a_{\mu_{kl}}(x) &= x^{-\mu_{kl}}(H(x) - H(x-1)) \quad \text{se } l \in \{l_1, \dots, l_p\} \\ b_{\nu_{kl}}(x) &= -x^{-\nu_{kl}}H(x-1) \quad \text{se } l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l_1, \dots, l_p\} \end{aligned}$$

e analogamente per ν_{kl} , $l = 1, \dots, m$, si ottiene

$$u_k = \left(\bigvee_{j \in \{l_1, \dots, l_p\}} a_{\mu_{kj}} \right) \vee \left(\bigvee_{j \in \{l'_1, \dots, l'_q\}} a_{\nu_{kj}} \right) \vee \left(\bigvee_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l_1, \dots, l_p\}} b_{\mu_{kt}} \right) \vee \left(\bigvee_{t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{l'_1, \dots, l'_q\}} b_{\nu_{kt}} \right) \vee (x^{2m} f(x))$$

ove

$$(f \vee g)(x) = \int_0^{+\infty} f(y) g(x/y) dy/y = \int_0^{+\infty} f(x/y) g(y) dy/y$$

e

$$\bigvee_{j=1}^k f_j = f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_k.$$

2. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ poniamo

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|_I^2$$

D'ora in poi si supporrà $n > 2m$. Indichiamo con V il completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla topologia data dalla norma $\|\cdot\|$.

Si ha:

PROPOSIZIONE 1.2. Sia $n > 2m$. Allora

$$\|r^{|\alpha|-m} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|^2$$

($r = \|x\|$), essendo C una opportuna costante > 0 , $\forall u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$
 $0 < |\alpha| < m$.

DIMOSTRAZIONE. La prova è analoga a quella del lemma 2(a) di [1].

Supponiamo $|\alpha| = 0$. Se $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ allora $\exists \rho_0 > 0$ tale che $\text{supp}(u) \subset S(0, \rho_0) = \{x; x \in R^n, \|x\| < \rho_0\}$. La disuguaglianza di Hardy iterata dà

$$\int_0^{+\infty} r^{-2m} |u(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr \leq C \int_0^{+\infty} |D_r^m u(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr < +\infty$$

q.d. rispetto a $\omega \in G$.

Integrando ambo i membri di tale disuguaglianza rispetto a ω si ha

$$\|r^{-m} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|D_r^m u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

La tesi segue osservando che

$$D_r^m u = \sum_{k_1, \dots, k_m=1}^m r^{-m} x_{k_1} \dots x_{k_m} D_{k_1} \dots D_{k_m} u \quad (D_{k_j} = \partial/\partial x_{k_j}).$$

Se $0 < |\alpha| < m$ la dimostrazione procede in modo del tutto analogo utilizzando la seguente

PROPOSIZIONE ([2] lemma 4.5). Sia $f: R^+ \rightarrow C$, $f \equiv 0$ al di fuori di un intervallo finito. Supponiamo

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha |f^{(k)}(x)|^2 dx < +\infty \quad \text{per } \alpha \in R, \alpha > 2k - 1.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2k} |f(x)|^2 dx \leq 4^k \left(\prod_{j=1}^k (2j-1-\alpha) \right)^{-2} \int_0^{+\infty} x^{\alpha} |f^{(k)}(x)|^2 dx .$$

$\forall u, v \in V$ poniamo

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx .$$

La forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ risulta continua e coercitiva su V . Se f è tale che $r^m f \in L^2(\Omega)$, per quanto si è detto sopra e per il teorema di Lax-Milgram, si ha che esiste ed è unica $u \in V$ tale che

$$(-1)^m a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx , \quad \forall v \in V ,$$

ossia il problema considerato ammette soluzione variazionale in V .

Osserviamo che, poichè le condizioni della Prop. 2.1.

$$\theta \neq \mu_{\lambda_j} - n/2 + 2m , \quad \theta \neq \nu_{k_j} - n/2 + 2m , \quad \forall k \in N , j = 1, \dots, m ,$$

tenendo presenti le espressioni di $\mu_{\lambda_j}, \nu_{k_j}$, sono equivalenti a

$$\lambda_k \neq (\theta + n/2 - 2j)(2j + n/2 - \theta - 2) ,$$

si ha che, poichè $n > 2m$, la Prop. 2.1 è applicabile per $\theta = m$ e per $\theta = 0$. Indichiamo con $u^{(m)}, u^{(0)}$ le soluzioni corrispondenti a questi due valori del parametro θ . Si ha $u^{(m)} \in V$ e quindi $u^{(m)}$ coincide con la soluzione variazionale.

PROPOSIZIONE 2.2. Sia, $\forall k \in N$

$$\lambda_k \neq (\theta + n/2 - 2j)(2j + n/2 - \theta - 2) , \quad j = 1, \dots, m , \theta = 0, m .$$

Allora $u^{(0)} = u^{(m)}$ se e solo se

$$\langle \chi_{kr}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 , \quad \forall k, r \in N$$

tali che

$$\lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2, \quad j = j_k, \dots, m, \quad j_k \leq r \leq m,$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} \chi_{kj}(r, \omega) &= r^{\mu_{kj} + 2m - n} v_k(\omega) \quad (r = \|x\|) \\ \mu_{kj} &= 2j - 2m + n/2 - 1 - ((n/2 - 1)^2 - \lambda_k)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Per la prova ci si serve della formula di rappresentazione della u_k , $k \in N$, data nell'osservazione 3.1.

Si ha

$$v_{kj} - \sigma_\theta > 0, \quad \forall k \in N, \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad \theta = 0, m,$$

$$\mu_{kj} - \sigma_m < 0, \quad \forall k \in N, \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

$\mu_{kj} - \sigma_0 < 0$ se e solo se $\lambda_k < (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2$, $j = 1, \dots, m$, $k \in N$.

Poniamo

$$j_k = \min \{j \in N; j = 1, \dots, m, \lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2\};$$

risulta, per le ipotesi fatte,

$$\lambda_k < (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2 \quad \text{per } j = 1, \dots, j_k - 1$$

$$\lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2 \quad \text{per } j = j_k, j_k + 1, \dots, m, \quad \forall k \in N.$$

Sia $k \in N$ arbitrario. Per la formula di rappresentazione relativa a u_k si ha

$$u_k^{(0)} = u_k^{(m)} \Leftrightarrow \left(\bigvee_{r=j_k}^m b_{\mu_{kr}} - \bigvee_{r=j_k}^m a_{\mu_{kr}} \right) \vee (x^{2m} f_k) \equiv 0.$$

Proviamo che

$$\left(\bigvee_{r=j_k}^m b_{\mu_{kr}} \right) (x) = - \sum_{r=j_k}^m \left(\prod_{\substack{i=j_k \\ i \neq r}}^m (\mu_{kr} - \mu_{ki}) \right)^{-1} x^{-\mu_{kr}} H(x - 1).$$

Eventualmente traslando sugli indici di somma, si può supporre $r = 1, \dots, m$, per semplificare le notazioni; la prova procede per induzione su m . La formula è banalmente vera per $m = 2$. Supponiamola

vera per $m-1 \in N$. Consideriamo

$$\begin{aligned} & (b_{\mu_{km}} \vee b_{\mu_{k,m-1}} \vee \dots \vee b_{\mu_{k1}})(x) = \\ & = \left(b_{\mu_{km}}(y) \vee \left[- \sum_{j=1}^{m-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m-1} (\mu_{kj} - \mu_{ki}) \right)^{-1} y^{-\mu_{kj}} H(y-1) \right] \right) (x) = \\ & = - \sum_{j=1}^m \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (\mu_{kj} - \mu_{ki}) \right)^{-1} x^{-\mu_{kj}} H(x-1) + \\ & \quad + x^{-\mu_{km}} \sum_{j=1}^m \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (\mu_{kj} - \mu_{ki}) \right)^{-1} H(x-1). \end{aligned}$$

Basta dunque provare che

$$\sum_{j=1}^m \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (\mu_{kj} - \mu_{ki}) \right)^{-1} = 0.$$

Ciò è vero per $m=2$. Supponiamolo vero per $m-1 \in N$. Poichè, se t, t_1, \dots, t_m sono numeri diversi tra loro, si ha

$$\prod_{k=1}^m (t - t_k)^{-1} = \sum_{k=1}^m (t - t_k)^{-1} \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (t_k - t_l) \right)^{-1};$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (\mu_{kj} - \mu_{ki}) \right)^{-1} &= \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (\mu_{kj} - \mu_{ki})^{-1} \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^m (\mu_{ki} - \mu_{kl}) \right)^{-1} = \\ &= - \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^m (\mu_{ki} - \mu_{kl}) \right)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

per l'ipotesi induttiva.

In modo analogo si prova che

$$\left(\bigvee_{r=j_k}^m a_{\mu_{kr}} \right) (x) = \sum_{r=j_k}^m \left(\prod_{\substack{i=j_k \\ i \neq r}}^m (\mu_{kr} - \mu_{ki}) \right)^{-1} x^{-\mu_{kr}} (H(x) - H(x-1)).$$

Se ne conclude che

$$\begin{aligned} \left(\bigvee_{r=j_k}^m b_{\mu_{kr}} - \bigvee_{r=j_k}^m a_{\mu_{kr}} \right) (x) &= - \sum_{r=j_k}^m \left(\prod_{\substack{i=j_k \\ i \neq r}}^m (\mu_{kr} - \mu_{ki}) \right)^{-1} x^{-\mu_{kr}} H(x) = \\ &= H(x) \sum_{r=j_k}^m C_{kr} x^{-\mu_{kr}}. \end{aligned}$$

Affinchè $u^{(0)} = u^{(m)}$ dovrà dunque essere

$$\sum_{r=j_k}^m C_{kr} x^{-\mu_{kr}} \int_0^{+\infty} y^{\mu_k + 2m-1} f_k(y) dy = 0,$$

ossia, tenendo presente che f_k è il coefficiente di Fourier della f nella base delle v_k ,

$$\int_G \left(\int_0^{+\infty} y^{\mu_{kr} + 2m-n} v_k(\omega) f(y, \omega) y^{n-1} dy \right) d\omega = 0$$

e quindi

$$\langle \chi_{kr}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall k \in N, \quad r = j_k, \dots, m,$$

che prova l'affermazione.

Come corollario immediato si ricava la seguente

PROPOSIZIONE 3.2. Sia $(1+r^m)f \in L^2(\Omega)$. Se $\lambda_k < (n/2 - 1)^2 - (2j-1)^2$ per $j=1, \dots, m, \forall k \in N$, allora il problema in esame ammette una soluzione variazionale u tale che $D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| = 2m$.

Vale la seguente

PROPOSIZIONE 4.2. $u \in H^m(\Omega) \Rightarrow r^{|\alpha|-m} D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha$ con $0 \leq |\alpha| \leq m, m \in N$ ($n > 2m$).

DIMOSTRAZIONE. Proviamo preliminarmente il seguente lemma: L'insieme delle funzioni di $H^m(\Omega)$ che sono nulle per x abbastanza grande è denso in $H^m(\Omega)$.

Sia $\omega: R \rightarrow R$ così definita:

$$\omega(x) = \begin{cases} \left(\int_0^1 \exp(-t^{-1}(1-t)^{-1}) dt \right)^{-1} \int_{|x|}^1 \exp(-t^{-1}(1-t)^{-1}) dt & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Per $x \in R^n, \forall j \in N$ poniamo

$$\chi_j(x) = \sum_{k=-j}^j \omega(\|x\| - k).$$

Risulta

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leq j \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq j+1 \end{cases}$$

$$\chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \chi_j \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sia $u \in H^m(\Omega)$ e $u_j = u \cdot \chi_j$. Si ha

$$\|u - u_j\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u - D^\alpha(u\chi_j)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e

$$\|D^\alpha u - D^\alpha(u\chi_j)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(1 - \chi_j) D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta \chi_j D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ora, poichè

$$\begin{aligned} \|D^\beta \chi_j \cdot D^{\alpha-\beta} u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_G \left(\int_j^{j+1} |D^\beta \chi_j(r, \omega)|^2 |D^{\alpha-\beta} u(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr \right) d\omega \leq \\ &\leq M_\beta \int_G \left(\int_j^{j+1} |D^{\alpha-\beta} u(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr \right) d\omega \end{aligned}$$

per $M^\beta > 0$ opportuno, rimane provata l'affermazione del lemma. Sia ora $u \in H^m(\Omega)$, $u = 0$ per $\|x\|$ abbastanza grande. Supponiamo per semplicità $|\alpha| = 0$. Poichè $n > 2m$ si ha

$$\int_G \left(\int_0^{+\infty} r^{-2m} |u(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr \right) d\omega \leq C_0 \int_G \left(\int_0^{+\infty} |D_r^m u(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr \right) d\omega$$

e quindi si ricava l'asserto per densità.

PROPOSIZIONE 5.2. Sia $n > 2m$. Allora $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ implica che

$$\|r^{-2m+|\alpha|} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty, \quad \forall \alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2m.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $m \leq |\alpha| \leq 2m$ si ha $D^\alpha u \in H^{2m-|\alpha|}(\Omega)$; per la Prop. 4.2 l'asserto risulta provato per $m \leq |\alpha| \leq 2m$.

Sia β un multiindice con $|\beta| = m-1$; sia $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ e $f = D^\beta u$. Risulta $f \in H_0^1(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega)$ e quindi, eseguendo il cambiamento di coordinate, si ricava che q.d. rispetto a $r \in \mathbb{R}^+$, $f(r, \omega) \in$

$\in H_0^1(G) \cap H^{m+1}(G)$. Per la disuguaglianza di Poincaré si ha:

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq m+1} \|D_\omega^\alpha f\|_{L^2(G)}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq m+1} C_\alpha r^{2|\alpha|} \|D^\alpha f\|_{L^2(G)}^2,$$

ove D_ω^α indica la derivazione rispetto alle variabili angolari ω ; risulta quindi

$$r^{2m-2} \|D^\beta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{m \leq |\gamma| \leq 2m} C_\gamma r^{-4m+2|\gamma|} \|D^\gamma u\|_{L^2(G)}^2.$$

Moltiplicando ambo i membri per r^{n-1} e integrando rispetto a $r \in R^+$ si conclude che $r^{-2m+|\beta|} D^\beta u \in L^2(\Omega)$. Analogo ragionamento si fa se $0 \leq |\beta| \leq m-2$.

PROPOSIZIONE 6.2. Sia $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ a supporto limitato, tale che

$$\Delta^m u = f \quad \text{in } \Omega$$

Allora

$$\langle \chi_{kr}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

per quei $k \in N$ per cui $\lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2r - 1)^2$, $r = r_k, \dots, m$, essendo χ_{kr} la funzione definita nella Prop. 2.2.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $k \in N$, $r \in \{1, \dots, m\}$ e $\varepsilon \in R^+$, poniamo $\alpha = \mu_{kr} + 2m - 1$,

$$I(\alpha, m) = \int_\varepsilon^{+\infty} \int_G r^\alpha v_k(\omega) \Delta^m u(r, \omega) dr d\omega$$

$$\Phi(r, m) = \int_G v_k(\omega) \Delta^m u(r, \omega) d\omega.$$

Si ha

$$\langle \chi_{kr}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I(\alpha, m).$$

Integrando per parti r volte rispetto alla variabile radiale, tenendo presente l'espressione di μ_{kr} , si ha che

$$(\alpha - 2r + 2)^2 - n(\alpha - 2r + 1) + \lambda_k - 1 = 0$$

e quindi

$$I(\alpha, m) = - \sum_{h=0}^{r-1} \left(\prod_{j=0}^{h-1} [(\alpha - 2j)^2 - n(\alpha - 2j - 1) + \lambda_k - 1] \right) e^{\alpha - 2h} \cdot D_r \Phi(\varepsilon, m - h - 1) + \\ + \sum_{h=0}^{r-1} (\alpha - 2h + 1 - n) \left(\prod_{j=0}^{h-1} [(\alpha - 2j)^2 - n(\alpha - 2j - 1) + \lambda_k - 1] \right) \cdot e^{\alpha - 2h - 1} \Phi(\varepsilon, m - h - 1)$$

over per convenzione $\prod_{j=0}^{-1} a_j = 1$.

Basta allora provare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{\alpha - 2h - 1 + j} D_r^j \Phi(\varepsilon, m - h - 1) = 0 \quad \text{per } h = 0, 1, \dots, r - 1 \text{ e } j = 0, 1.$$

Sia ora $0 \leq l < m - 1$. Per ipotesi u è tale che

$$r^{-2m+2l} \Delta^l u(r, \omega) \in L^2(\Omega);$$

inoltre si ha che

$$r^{\eta - 2m + 2l} \Delta^l u \in L^2(\Omega), \quad \forall \eta > 0 \text{ arbitrariamente piccolo.}$$

Posto

$$\beta = \eta + n/2 - 2m + 2l - \frac{1}{2},$$

si ha

$$D_r^k \Phi(\cdot, l) \in L_{\beta+k}^2(R^+), \quad k = 0, 1, 2,$$

e quindi

$$D_r^j (r^{\alpha - 2h - 1} \Phi(r, m - h - 1)) \in L_{\eta - \frac{3}{2} + n/2 - \alpha + j}^2(R^+), \quad j = 0, 1, \\ D_r^j (r^{\alpha - 2h} D_r \Phi(r, m - h - 1)) \in L_{\eta - \frac{3}{2} + n/2 - \alpha + j}^2(R^+), \quad j = 0, 1.$$

Ora si ha la

PROPOSIZIONE ([1], lemma 7). Se $\psi: R^+ \rightarrow C$ è tale che $\psi(t)$, $t^{-1}\psi(t)$, $\psi'(t) \in L_\gamma^2(R^+)$, con $\gamma < \frac{1}{2}$, allora ψ è continua e $\psi(0) = 0$.

Da ciò si ricava,

$$\lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2r - 1)^2, \quad r = r_k, \dots, m,$$

che prova l'asserto.

Se ne conclude:

PROPOSIZIONE 7.2. Sia $u \in H_0^m(\Omega)$, con supporto limitato, soluzione di $\Delta^m u = f$; allora $u \in H^{2m}(\Omega)$ se e solo se

$$a) f \in L^2(\Omega)$$

$$b) \langle \chi_{k\sigma}, f \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ per}$$

$$\lambda_k > (n/2 - 1)^2 - (2j - 1)^2, \quad j = j_k, \dots, m, \quad k \in N$$

se

$$\lambda_k \neq (m + n/2 + 2j)(2j + n/2 - m - 2), \quad j = 1, \dots, m.$$

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella del teorema 3 di [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. GRISVARD, *Problème de Dirichlet dans un cône*, Ric. di Mat., **20** (1971), p. 175.
- [2] V. A. KONDRAT'EV, *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc., **16** (1967), p. 227.
- [3] J. L. JIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Paris (1968).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1976.