Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Franco Torquati

Sui teoremi di De Rham

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 54 (1975), p. 123-131

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__54__123_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 54 (1975)

Sui teoremi di De Rham.

Franco Torquati (*)

1. Introduzione.

Un risultato fondamentale stabilente una relazione tra la struttura coomologica di una varietà differenziabile X (di classe C^∞) e le forme differenziali definite su essa è dato dai classici tre teoremi di De Rham.

Se si indica con $A(X)$ l'algebra delle forme differenziali definite su X e con $R(X)$ l'algebra di coomologia derivata, i teoremi di De Rham stabiliscono un isomorfismo di algebre

$$J\colon R(X) \to H(X)$$

dove $H(X)$ è l'algebra di coomologia singolare (cup-prodotto) associata alla varietà.

Le dimostrazioni dirette di tali teoremi sono tutte piuttosto complicate e difficili (cfr. ad es. De Rham, Whitney [1]), così da potersi affermare che la ricerca di una dimostrazione più lineare abbia contriuito in modo non marginale alla costruzione della teoria dei fasci.

D'altra parte le dimostrazioni aventi i fasci per strumento (cfr. ad es. Hirzebruch, Godement [2]), benchè formalmente assai più sod-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica - via L. B. Alberti, 4 - 16132 Genova.

[1] G. De Rham, *Sur l'analysis situs des variétes à n dimensions*, Journal de mathématiques, vol. 10 (1931.

H. Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University, Princeton, N.J. (U.S.A.), 1957.

[2] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973.

disfacenti, lasciano nell'ombra due aspetti importanti dei teoremi in questione:

1) che l'isomorfismo delle strutture additive è indotto dall'integrazione delle forme differenziali sui simplessi singolari;

2) che tale isomorfismo rispetta inoltre le strutture moltiplicative.

Scopo di quanto segue è quello di chiarire questi due aspetti, pur rimanendo nell'ambito della teoria dei fasci.

Desidero infine ringraziare il prof. Vinicio Villani per l'aiuto datomi durante la stesura della presente nota.

2. Struttura additiva.

Sia X una varietà differenziabile, $\mathfrak{A}=\{U_i\}_{i\in I}$ un suo ricoprimento aperto. Ricordiamo che un $\mathfrak{A}$-simplesso singolare e differenziabile di X di dim. p è un simplesso singolare

$$\sigma_p\colon \Delta_p \to X \quad (\text{con } \Delta_p \text{ simplesso euclideo standard})$$

tale che:

1) $|\sigma_p| \subset U_i$ per almeno un U_i del ricoprimento aperto $\mathfrak{A}$;

2) σ_p è la restrizione a Δ_p di un'applicazione differenziabile di R^p in X.

Denotiamo con $C_p^{\mathfrak{A}}(X)$l'R-modulo generato da tali σ_p, con $C_{\mathfrak{A}}^p(X)$ l'R-modulo $\operatorname{Hom}\big(C_p^{\mathfrak{A}}(X), R\big)$ e sia $H_{\mathfrak{A}}^p(X)=Z_{\mathfrak{A}}^p(X)/dC_{\mathfrak{A}}^{p-1}(X)$ il modulo di coomologia corrispondente ($\mathfrak{A}$-coomologia singolare differenziabile).

Denotiamo inoltre con $A^p(X)$ l'R-modulo delle p-forme differenziali su X e con

$$R^p(X)=\Gamma^p(X)/dA^{p-1}(X)\,, \qquad \text{ove } \Gamma^p(X)=\{\alpha^p\in A^p(X)\colon d\alpha^p=0\}\,,$$

l'R-modulo di coomologia derivato, detto la coomologia di De Rham di grado p della varietà X.

Se $\alpha^p\in A^p(X)$, $\sigma_p\in C_p^{\mathfrak{A}}(X)$ allora l'integrale $\int\limits_{\sigma_p}\alpha^p$ definisce per ogni $p\geqslant 0$ un'applicazione bilineare

$$A^p(X)\times C_p^{\mathfrak{A}}(X)\to R$$

ossia induce l'omomorfismo di R-moduli

$$J_p\colon A^p(X) \to C^p_{\mathfrak{A}}(X)$$

definito nel seguente modo:

$$\langle J_p \alpha^p, \sigma_p \rangle = \int_{\sigma_p} \alpha^p\,, \qquad p \geqslant 1$$

$$\langle J_0 \alpha^0, \sigma_0 \rangle = \alpha^0(\sigma_0)\,.$$

In virtù del teorema di Stokes si ha

$$dJ_p = J_{p+1}\, d$$

e pertanto J_p induce un omomorfismo

$$J_p\colon R^p(X) \to H^p_{\mathfrak{A}}(X)$$

TEOREMA. (I° e II° teorema di De Rham); J_p è un isomorfismo di R-moduli $\forall p \geqslant 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A^p = \{A^p(U), r^u_w\}$ il prefascio delle p-forme su X che ad ogni aperto U di X associa l'R-modulo $A^p(U)$ con $r^u_w\colon A^p(U) \to A^p(W)$, $W \subset U$, l'omomorfismo di restrizione. Analogamente si definiscono i prefasci $\Gamma^p = \{\Gamma^p(U), r^u_w\}$, $C^p = \{C^p(U), r^u_w\}$, $Z^p = \{Z^p(U), r^u_w\}$, ove $C^p(U)$ è l'usuale R-modulo delle p-cocatene singolari differenziabili definite sull'aperto U, e $Z^p(U)$ il sotto-R-modulo dei p-cocicli.

Sia $\mathfrak{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X localmente finito, contrattile e ad intersezioni contrattili (per l'esistenza di tale ricoprimento cfr. [2]).

Per ogni aperto $V = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_h} \neq \emptyset$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma^{q-1}(V) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "J_{q-1}"'] & A^{q-1}(V) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "J_{q-1}"'] & \Gamma^q(V) \arrow[r] \arrow[d, "J_q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{q-1}(V) \arrow[r, "i"] & C^{q-1}(V) \arrow[r, "d"] & Z^q(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

è commutativo e le righe sono esatte.

Se $S = \{S(U), r^u_w\}$ è un prefascio denoteremo con $C(\mathfrak{A}, S) = \{C^k(\mathfrak{A}, S), \delta^k\}_{k\geqslant 0}$ il complesso delle cocatene del nervo del ricoprimento $\mathfrak{A}$ a coefficienti nel prefascio S, e con $H^k(\mathfrak{A}, S)$ i rispettivi moduli di coomologia. Essendo

$$H^k(\mathfrak{A}, A^q) = H^k(\mathfrak{A}, C^q) = 0\ , \qquad k\geqslant 1\ ,\ q\geqslant 0\ ,$$

le successioni esatte di coomologia indotte dalle righe del diagramma precedente danno luogo ai diagrammi commutativi a righe esatte (cfr. [1]):

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathfrak{A}, A^{p-1}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "J_{p-1}"'] & H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^p) \arrow[r, "\delta^0_*"] \arrow[d, "J_p"'] & H^1(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "J_{*p-1}"'] & 0 \\
H^0(\mathfrak{A}, C^{p-1}) \arrow[r, "d"] & H^0(\mathfrak{A}, Z^p) \arrow[r, "\delta^0_*"] & H^1(\mathfrak{A}, Z^{p-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \arrow[r, "\delta^k_*"] \arrow[d, "J_{*p-k}"'] & H^{k+1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "J_{*p-k-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^k(\mathfrak{A}, Z^{p-k}) \arrow[r, "\delta^k_*"] & H^{k+1}(\mathfrak{A}, Z^{p-k-1}) \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd} \qquad k\geqslant 1$$

Tenuto conto che $H^0(\mathfrak{A}, A^{p-1})$, $H^0(\mathfrak{A}, C^{p-1})$, $H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^p)$, $H^0(\mathfrak{A}, Z^p)$ si identificano in modo naturale rispettivamente con $A^{p-1}(X)$, $C^{p-1}_{\mathfrak{A}}(X)$, $\Gamma^p(X)$, $Z^p_{\mathfrak{A}}(X)$, si ottiene il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
A^{p-1}(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "J_{p-1}"'] & \Gamma^p(X) \arrow[r, "\delta^0_*"] \arrow[d, "J_p"'] & H^1(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-1}) \arrow[r, "\delta^1_*"] \arrow[d, "J_{*p-1}"'] & H^2(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-2}) \arrow[r, "\delta^2_*"] \arrow[d, "J_{*p-2}"'] & \ldots \arrow[r, "\delta^{p-1}_*"] & H^p(\mathfrak{A}, \Gamma^0) \arrow[d, "J_{*0}"'] \\
C^{p-1}_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[r, "d"] & Z^p_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[r, "\delta^0_*"] & H^1(\mathfrak{A}, Z^{p-1}) \arrow[r, "\delta^1_*"] & H^2(\mathfrak{A}, Z^{p-2}) \arrow[r, "\delta^2_*"] & \ldots \arrow[r, "\delta^{p-1}_*"] & H^p(\mathfrak{A}, Z^0)
\end{tikzcd}$$

dove:

1) δ^0_* è surgettivo e le successioni orizzontali sono esatte nel secondo termine;

2) δ^k_*, $k\geqslant 1$ sono isomorfismi;

3) $\Gamma^0 = Z^0 = R$ e $J_{*0} = id$.

Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
R^p(X) \arrow[d, "J_p"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
H^p_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[r, "\sim"'] & H^p(\mathfrak{A}, R) .
\end{tikzcd}
$$

In altre parole: l'omomorfismo J_p: $R^p(X) \to H^p_{\mathfrak{A}}(X)$ indotto per passaggio al quoziente dall'applicazione che associa ad ogni p-forma una $\mathfrak{A}$-p-cocatena differenziabile per mezzo dell'integrazione è un isomorfismo. C.V.D.

3. Struttura moltiplicativa.

$R(X) = \sum_{p \geq 0} R^p(X)$ è dotato di una struttura di R-algebra mediante il prodotto esterno $\wedge$. È possibile munire anche $H_{\mathfrak{A}}(X) = \sum_{p \geq 0} H^p_{\mathfrak{A}}(X)$ di una struttura di R-algebra nel seguente modo. Le applicazioni lineari

$$\Delta^p \to \Delta^{p+q}, \qquad \Delta^q \to \Delta^{p+q}$$

che applicano ordinatamente i vertici del simplesso standard Δ^p nei primi $(p+1)$-vertici, rispettivamente negli ultimi $(q+1)$-vertici di Δ^{p+q}, inducono in modo ovvio gli omomorfismi

$$\vartheta_p \colon C^{\mathfrak{A}}_{p+q}(X) \to C^{\mathfrak{U}}_p(X)$$
$$\eta_q \colon C^{\mathfrak{A}}_{p+q}(X) \to C^{\mathfrak{U}}_q(X) .$$

Dicesi cup-prodotto l'omomorfismo

$$\cup \colon C^q_{\mathfrak{A}}(X) \otimes C^p_{\mathfrak{A}}(X) \to C^{p+q}_{\mathfrak{A}}(X)$$

così definito:

$$\langle c^p \cup c^q, \sigma_{p+q} \rangle = \langle c^p, \vartheta_p \sigma_{p+q} \rangle \langle c^q, \eta_q \sigma_{p+q} \rangle .$$

Su $H_{\mathfrak{A}}(X)$ si definisce una struttura di R-algebra ponendo:

$$\bar{c}^p \cup \bar{c}^q = \overline{c^p \cup c^q}; \qquad \bar{c}^p \in H^p_{\mathfrak{A}}(X) , \ \bar{c}^q \in H^q_{\mathfrak{A}}(X) \qquad \text{(cfr. [3])} .$$

Teorema. (III° teorema di De Rham) $J\colon R(X) \to H_{\mathfrak{A}}(X)$ è un omomorfismo (e quindi un isomorfismo) di algebre. In altre parole:

$$J_{p+q}(\bar{\alpha}^p \wedge \bar{\beta}^q) = J_p \bar{\alpha}^p \cup J_q \bar{\beta}^q ; \qquad \bar{\alpha}^p \in R^p(X), \ \bar{\beta}^q \in R^q(X) .$$

La dimostrazione risulterà dalle considerazioni seguenti. Si consideri l'omomorfismo:

$$\wedge\colon \ C^m(\mathfrak{A}, A^s) \otimes C^n(\mathfrak{A}, A^t) \to C^{m+n}(\mathfrak{A}, A^{s+t})$$

definito ponendo su $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{m+n}}$, $f \in C^m(\mathfrak{A}, A^s)$, $g \in C^n(\mathfrak{A}, A^t)$

$$(f \wedge g)(i_0 \ldots i_{m+n}) = f(i_0 \ldots i_m) \wedge g(i_m \ldots i_{m+n}) .$$

Poichè $\delta(f \wedge g) = \delta f \wedge g + (-1)^m f \wedge \delta g$, $\wedge$ induce l'omomorfismo:

$$\wedge\colon \ H^m(\mathfrak{A}, \Gamma^s) \otimes H^n(\mathfrak{A}, \Gamma^t) \to H^{m+n}(\mathfrak{A}, \Gamma^{s+t}) .$$

Lemma 1-*a*. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \otimes H^{h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h+1}) & \xrightarrow{\ \wedge\ } & H^{k+h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q+1-h-k}) \\
{\scriptstyle id \otimes \delta_*^{h-1}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \delta_*^{k+h-1}} \\
H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \otimes H^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) & \xrightarrow{\ \wedge\ } & H^{k+h}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q-h-k})
\end{array}$$

è commutativo di caratteristica $(-1)^p$.

Lemma 1-*b*). Il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
H^{k-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k+1}) \otimes H^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) & \xrightarrow{\ \wedge\ } & H^{k+h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q+1-h-k}) \\
{\scriptstyle \delta_*^{k-1} \otimes id} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \delta_*^{k+h-1}} \\
H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) \otimes H^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) & \xrightarrow{\ \wedge\ } & H^{k+h}(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q-h-k})
\end{array}$$

è commutativo.

Dimostrazione. Dimostreremo il lemma 1-*a*); 1-*b*) è analogo. Si tratta di dimostrare che per ogni

$$\bar{f}^k_{\Gamma^{p-k}} \in H^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k}) , \qquad \bar{g}^{h-1}_{\Gamma^{q-h+1}} \in H^{h-1}(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h+1})$$

si ha:

$$\delta_*(\bar{f}^k_{\Gamma^{p-k}} \wedge \bar{g}^{h-1}_{\Gamma^{q-h+1}}) = (-1)^p(\bar{f}^k_{\Gamma^{p-k}} \wedge \delta_* \bar{g}^{h-1}_{\Gamma^{q-h+1}}) .$$

A tal fine si consideri la sequenza esatta di complessi di cocatene:

$$0 \to C(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h}) \xrightarrow{i_*} C(\mathfrak{A}, A^{q-h}) \xrightarrow{d_*} C(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h+1}) \to 0$$

ove gli omomorfismi i_*, d_* sono indotti rispettivamente dall'inclusione i: $\Gamma^{q-h}(U) \to A^{q-h}(U)$ e dal differenziale d: $A^{q-h}(U) \to \Gamma^{q-h+1}(U)$, U aperto di X.

Se $\bar{f}^k_{\Gamma^{p-k}}$ è rappresentato da $f^k_{\Gamma^{p-k}} \in C^k(\mathfrak{A}, \Gamma^{p-k})$ e $\delta_*\bar{g}^{h-1}_{\Gamma^{q-h+1}}$ è rappresentato da $\delta g^{h-1}_{A^{q-h}} \in C^h(\mathfrak{A}, \Gamma^{q-h})$, ove $g^{h-1}_{A^{q-h}}$ è un elemento di $C^{h-1}(\mathfrak{A}, A^{q-h})$ per cui $d_* g^{h-1}_{A^{q-h}} = g^{h-1}_{\Gamma^{q-h+1}}$, allora $\delta_*(\bar{f}^k_{\Gamma^{p-k}} \wedge \bar{g}^{h-1}_{\Gamma^{q-h+1}})$ è rappresentato da

$$(-1)^{p-k}\,\delta(f^k_{\Gamma^{p-k}} \wedge g^{h-1}_{A^{q-h}}) = (-1)^p\,(f^k_{\Gamma^{p-k}} \wedge \delta g^{h-1}_{A^{q-h}}) .$$

Lemma 2. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^p(X) \otimes \Gamma^q(X) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\wr"] & \Gamma^{p+q}(X) \arrow[d, "\wr"] \\
H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^p) \otimes H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^q) \arrow[r, "\wedge"] & H^0(\mathfrak{A}, \Gamma^{p+q})
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

La dimostrazione è immediata.

Corollario 1. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^p(X) \otimes \Gamma^q(X) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d] & \Gamma^{p+q}(X) \arrow[d] \\
H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) \arrow[r, "\wedge"] & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R)
\end{tikzcd}$$

è commutativo di caratteristica $(-1)^{pq}$.

Corollario 2. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
R^p(X) \otimes R^q(X) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\wr"] & R^{p+q}(X) \arrow[d, "\wr"] \\
H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) \arrow[r, "\wedge"] & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R)
\end{tikzcd}$$

è commutativo di caratteristica $(-1)^{pq}$.

Le considerazioni precedenti possono essere ripetute parola per parola considerando l'omomorfismo

$$\cup : C^m(\mathfrak{A}, Z^s) \otimes C^n(\mathfrak{A}, Z^t) \to C^{m+n}(\mathfrak{A}, Z^{s+t})$$

ottenendo come risultato finale che

$$\begin{tikzcd}
H^p_{\mathfrak{A}}(X) \otimes H^q_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\wr"] & H^{p+q}_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[d, "\wr"] \\
H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R)
\end{tikzcd}$$

è commutativo di caratteristica $(-1)^{pq}$.

Consideriamo allora il diagramma

$$\begin{tikzcd}
R^p(X) \otimes R^q(X) \arrow[rrr, "\wedge"] \arrow[dd, "\wr"', "J_p \otimes J_q"] \arrow[dr, "\wr"] & & & R^{p+q}(X) \arrow[dl, "\wr"'] \arrow[dd, "\wr", "J_{p+q}"'] \\
& H^p(\mathfrak{A}, R) \otimes H^q(\mathfrak{A}, R) \arrow[r, "\cup = \wedge"] & H^{p+q}(\mathfrak{A}, R) & \\
H^p_{\mathfrak{A}}(X) \otimes H^q_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[rrr, "\cup"] \arrow[ur, "\wr"'] & & & H^{p+q}_{\mathfrak{A}}(X) \arrow[ul, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

La tesi del teorema si riduce alla verifica della commutatività del diagramma lungo i lati del rettangolo.

Osservazione. Ricordando che l'R-modulo di $\mathfrak{A}$-coomologia singolare differenziabile di una varietà si identifica con la coomologia singolare (cfr. [3], [4]) si ottiene la formulazione usuale dei teoremi di De Rham.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1966).

[2] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Interscience publishers, New York, vol I (1963).
[3] A. H. WALLACE, *Algebraic topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1970).
[4] S. EILENBERG, *Singular homology in differentiable manifolds*, Ann. Math., **48** (1947), pp. 670-681.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 dicembre 1974.