

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

**Un complemento del lavoro : « Questioni di esistenza
e di unicità per il problema elastostatico con un
vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido
nel caso di piccole deformazioni »**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 53 (1975), p. 83-86

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__83_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**Un complemento del lavoro:
« Questioni di esistenza e di unicità per il problema
elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale
a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni ».**

TULLIO VALENT (*)

SUMMARY - We state a necessary and sufficient condition for the convex set Γ of $S_3(L_R^2(A))$, considered in [1], to be not empty.

In [1] ho studiato, tra l'altro, le proprietà dell'eventuale stress minimizzante l'energia potenziale elastica in un insieme convesso Γ , ammettendo (implicitamente) che le forze attive assegnate $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$ fossero tali da rendere Γ non vuoto.

Lo scopo della presente Nota è quello di trovare una condizione necessaria e sufficiente su $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$ perchè Γ non sia vuoto.

Il teorema che qui viene dimostrato ha — al di là della sua applicabilità alle questioni affrontate in [1] — un interesse autonomo per il suo evidente significato meccanico.

Con riferimento alle notazioni usate in [1] mostriamo che, sussistendo le maggiorazioni (2), (3) ammesse in [1], vale il seguente

TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché, assegnati $\mathbf{F} = (F_i) \in L_R^2(A)$, $\mathbf{f} = (f_i) \in L_R^2(\sigma_2)$, Γ sia non vuoto è che esista qualche*

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

$\phi \in L_R^2(\sigma_1)$, $\phi \geq 0$, tale che

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_A F_i d\mathbf{x} + \int_{\sigma_2} f_i d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i d\sigma = 0 \\ \int_A (F_i x_j - F_j x_i) d\mathbf{x} + \int_{\sigma_2} (f_i x_j - f_j x_i) d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi (N_i x_j - N_j x_i) d\sigma = 0, \\ \qquad \qquad \qquad (i, j = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

In altre parole mostriamo che I' non è vuoto se e solo se esiste una reazione del vincolo su σ_1 , espressa da un vettore di quadrato sommabile su σ_1 , « equilibrante » l'insieme $(\mathbf{F}, \mathbf{f})$ delle forze attive assegnate.

Iniziamo con l'osservare che le (1) equivalgono, come si verifica facilmente, a

$$(2) \quad \int_A F_i r_i d\mathbf{x} + \int_{\sigma_2} f_i r_i d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i r_i d\sigma = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R},$$

essendo $\mathcal{R}$ l'insieme dei vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, cioè del tipo $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} + B\mathbf{x}$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ e B matrice emisimmetrica del terz'ordine su R .

Da tale osservazione segue immediatamente la necessità della condizione suddetta affinché I' non sia vuoto: basta pensare che $r_{i,j} + r_{j,i} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}$.

Veniamo ora alla sufficienza della condizione.

Supposto esistente $\phi \in L_R^2(\sigma_1)$, $\phi \geq 0$, verificante (1), oppure (2), facciamo vedere che I' non è vuoto, cioè che esiste qualche $\bar{X} = (X_{ij}) \in S_3(L_R^2(A))$ tale che

$$(3) \quad \int_A X_{ij} v_{i,j} d\mathbf{x} + \int_A F_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\sigma_2} f_i v_i d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i d\sigma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in C_{R^*}^1(\bar{A}).$$

Atteggiato $S_3(L_R^2(A))$ a spazio di Hilbert mediante la seguente definizione di prodotto scalare

$$X, Y \rightarrow (X, Y) = \int_A X_{ij} Y_{ij} d\mathbf{x}$$

e posto, per ogni $\mathbf{v} \in C_{R^*}^1(\bar{A})$,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{v}) &= \int_A F_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\sigma_2} f_i v_i d\sigma + \int_{\sigma_1} \phi N_i v_i d\sigma, \\ \varepsilon(\mathbf{v}) &= \left(\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} \right)_{i,j=1,2,3},\end{aligned}$$

(3) assume la forma

$$(4) \quad (X, \varepsilon(\mathbf{v})) = -\varphi(\mathbf{v}).$$

Ricordando che $F_i \in L_R^2(A)$, $f_i \in L_R^2(\sigma_2)$, $\phi \in L_R^2(\sigma_1)$ e avendo presente la definizione della norma ⁽¹⁾ $|||\cdot|||$, nonchè la maggiorazione (3) ammessa in [1], si verifica facilmente che la forma lineare φ su $C_{R^*}^1(\bar{A})$ è continua quando $C_{R^*}^1(\bar{A})$ si pensi dotato della norma $|||\cdot|||$.

Di conseguenza — utilizzando un noto teorema di esistenza per le equazioni funzionali negli spazi di Banach ⁽²⁾ — si riconosce che, sussistendo (2), l'equazione variazionale (4) ha soluzione in $S_3(L_R^2(A))$ se esiste un numero positivo c tale da aversi ⁽³⁾

$$\inf_{\mathbf{r} \in \mathcal{R}} |||\mathbf{v} + \mathbf{r}||| \leq c \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{S_3(L_R^2(A))} \quad \forall \mathbf{v} \in C_{R^*}^1(\bar{A}).$$

Poichè la maggiorazione (2) ammessa in [1] implica, ovviamente, l'esistenza di un tale c , possiamo concludere che (4) ha soluzione in $S_3(L_R^2(A))$, cioè che Γ non è vuoto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. VALENT, *Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale a supporto rigido nel caso di piccole deformazioni*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **50** (1973).

⁽¹⁾ Vedi [1], p. 145.

⁽²⁾ Cfr. [2], Teorema II, p. 2, o [3], p. 14.

⁽³⁾ Si tenga presente che $\mathcal{R}$ è il nucleo dell'operatore lineare

$$\varepsilon: C_{R^*}^1(\bar{A}) \rightarrow S_3(L_R^2(A)).$$

- [2] S. FAEDO, *Su un principio di esistenza nell'Analisi lineare*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie III, **11** (1957).
- [3] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems* Lecture notes in mathematics, **8**, Berlin - Heidelberg - New York: Springer (1965).

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 giugno 1974.