RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANDREA FORT

Gruppi finiti debolmente modulari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 269-290

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__269_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Gruppi finiti debolmente modulari.

ANDREA FORT (*)

Seguendo la nomenclatura di Maeda [7] diciamo che un reticolo L, dotato di minimo 0, è debolmente modulare se per ogni $a \in L$, $a \neq 0$, il filtro $\{x | x \in L, x \geqslant a\}$ è modulare.

Questa nota è dedicata allo studio dei gruppi finiti il cui reticolo di sottogruppi è debolmente modulare, che saranno chiamati, semplicemente, gruppi debolmente modulari.

Ovviamente i fattoriali propri dei gruppi debolmente modulari sono gruppi modulari: buona parte dei risultati qui presentati è stata ottenuta facendo uso solo di questa proprietà più « debole ».

Tuttavia la classe dei gruppi a fattoriali propri modulari contiene propriamente quella dei gruppi debolmente modulari giacchè questi ultimi sono risolubili (teorema 5.3).

Nel paragrafo 2 mostreremo che un gruppo nilpotente debolmente modulare e non modulare è un p-gruppo (lemma 2.1) e successivamente caratterizzeremo i p-gruppi debolmente modulari (teorema 2.4).

Nel paragrafo 3 prenderemo in considerazione i gruppi supersolubili non nilpotenti, e proveremo che in questo ambito un gruppo debolmente modulare è, salve poche eccezioni, modulare. (teorema 3.3)

Infine, nel paragrafo 4, si ottiene una caratterizzazione dei gruppi debolmente modulari non supersolubili.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Elenco di alcune notazioni.

Siano G ed H gruppi, $S \subseteq G$, $K \leqslant G$, p un primo ed n un intero positivo:

G' denota il derivato di G

$\mathfrak{Z}(G)$ denota il centro di G

$S_p(G)$ denota un p-sottogruppo di Sylow di G

$S_{p'}(G)$ denota un sottogruppo di Hall di indice in G potenza di p

$\mathfrak{C}_K(S)$ denota il centralizzante di S in K cioè $\{g \in K | gs = sg$ per ogni $s \in S\}$

$\mathfrak{N}_K(S)$ denota il normalizzante di S in K cioè $\{g \in K | gSg^{-1} = S\}$

C_n denota un gruppo ciclico di ordine n

D_8 denota un gruppo diedrale di ordine 8

Q_8 denota un gruppo dei quaternioni di ordine 8

$G \leftthreetimes H$ denota un prodotto semidiretto di G con H: $G \lhd G \leftthreetimes H$, $G \wedge H = \{1\}$

$G \curlyvee H$ denota un prodotto centrale di G ed H (vedi [5] I.9.10) (i sottogruppi centrali amalgamati saranno chiariti qualora non risultino dal contesto).

Un gruppo finito G è modulare se e solo se $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_t$ ove $(|H_i|, |H_j|) = 1$ per $i \neq j$, ed H_i è un p-gruppo modulare oppure un P_0^*-gruppo per $i = 1, 2, \ldots, t$ (cfr. [10], p. 13). I fattori H_i son detti le « componenti » di Hall di G.

Un P_0^*-gruppo è un gruppo finito G contenente un sottogruppo normale P, con P abeliano elementare di ordine potenza di un primo p, tale che G/P sia un gruppo ciclico di ordine potenza di un primo $q \neq p$ e tale che gli automorfismi indotti dagli elementi di G in P siano della forma: $a \mapsto a^r$ per ogni $a \in P$ con r indipendente da a e soddisfacente alle condizioni $r \not\equiv 1$, $r^q \equiv 1 \bmod p$.

Sia L un reticolo; x, y siano elementi di L, $x \leqslant y$:

$[L/x]$ denota il filtro principale generato da x cioè $\{z \in L | z \geqslant x\}$;

$[y/x]$ denota l'intervallo $\{z \in L | x \leqslant z \leqslant y\}$.

Per reticolo di un gruppo G intenderemo sempre il reticolo di tutti i sottogruppi di G, che sarà denotato con $\mathfrak{L}(G)$.

In tutto il lavoro la parola « gruppo » significherà sempre « gruppo finito ».

1. Risultati preliminari.

1.1. *Un reticolo L debolmente modulare e non modulare è irriducibile: cioè non è isomorfo al prodotto cardinale di due reticoli, entrambi con più di un elemento.*

DIM. Sia $L \simeq L_1 \times L_2$ con $|L_1| > 1$, $|L_2| > 1$. Siccome $L_1 \times L_2$ non è modulare, uno dei suoi fattori non è modulare. Sia, per fissare le idee, L_1 non modulare e sia $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 | a_1 < a_2 < a_3 < a_4,\ a_1 < a_5 < a_4,\ a_1 = a_3 \wedge a_5,\ a_4 = a_2 \vee a_5\}$ un sottoreticolo « pentagonale » di L_1.

Se $b \in L_2$ e b è distinto dal minimo di L_2 (L_2 è dotato di minimo giacchè $L_1 \times L_2$ è dotato di minimo essendo debolmente modulare) allora $\{(a_1, b), (a_2, b), (a_3, b), a_4, b), (a_5, b)\}$ genera un sottoreticolo non modulare contenuto nel filtro proprio che (a_1, b) genera in $L_1 \times L_2$. Ciò è in contrasto con le ipotesi fatte su L e pertanto L è irriducibile.

1.2. *Sia L un reticolo debolmente modulare con minimo 0 dotato di massimo I. Se un elemento $0 \neq x \in L$ è connesso con I da una catena massimale di lunghezza finita n*

$$x = x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_n = I$$

allora tutte le catene massimali che connettono x con I sono di lunghezza $n = p(x)$. Se $0 \neq y \in L$ e $p(x) = p(y)$, allora $x \leqslant y$ implica $x = y$.

DIM. $[I/x]$ è un reticolo modulare, quindi in esso vale la condizione di Jordan-Dedekind. La seconda asserzione consegue dalla prima.

1.3. *Sia G un gruppo debolmente modulare e sia H un suo sottogruppo non modulare. Se $\{1\} \neq K \leqslant G$ e $K \wedge H = \{1\}$, allora $\mathfrak{N}_H(K) \neq H$.*

DIM. Negando la tesi si ha $H \vee K = HK$ e $HK \rhd K$. Ne consegue $H \simeq H/(H \wedge K) \simeq HK/K$ e quindi il filtro proprio generato da K in $\mathfrak{L}(G)$ contiene un sottoreticolo non modulare contro le ipotesi.

1.4. *Sia G un gruppo debolmente modulare e sia $H \lhd\lhd G$. Se H contiene un sottogruppo $D \neq \{1\}$ che è elemento di Dedekind in $\mathfrak{L}(G)$ allora H è quasinormale in G.*

DIM. H è elemento di Dedekind in $[\mathfrak{L}(G)/D]$ e pertanto è elemento di Dedekind in $\mathfrak{L}(G)$ (cfr. [11] p. 75). Giacchè H è subnormale in G si conclude che è quasinormale in G (cfr. [4], Satz 7).

1.5. *Un gruppo G il cui reticolo $\mathfrak{L}(G)$ ha lunghezza 3, è debolmente modulare.*

DIM. Ogni filtro proprio di $\mathfrak{L}(G)$ ha lunghezza al più 2: quindi è modulare.

2. Gruppi nilpotenti.

In questo paragrafo prendiamo in esame i gruppi nilpotenti a reticolo debolmente modulare.

LEMMA 2.1. *Sia G un gruppo nilpotente a reticolo debolmente modulare e non modulare. Allora:*

(i) $|G| = p^n$, *p primo*, $n \geqslant 3$,

(ii) *G contiene un sottogruppo H non modulare di ordine p^3*,

(iii) $\mathfrak{Z}(G) \wedge H = \mathfrak{Z}(H)$,

(iv) $\mathfrak{Z}(G)$ *è ciclico.*

DIM. (i) Un gruppo nilpotente, se non è un p-gruppo, ha il reticolo dei sottogruppi riducibile (cfr. [10], teor. 4, p. 5). La conclusione segue da 1.1.

(ii) Sia m il massimo intero positivo tale che tutti i sottogruppi di G di ordine p^m siano modulari: allora $2 \leqslant m < n$. G contiene un sottogruppo non modulare H di ordine p^{m+1} tale che ogni suo sottogruppo proprio sia modulare, e pertanto (cfr. [10], prop. 1.8) H contiene un sottogruppo normale N tale che H/N sia non modulare di ordine p^3. Per la debole modularità di $\mathfrak{L}(G)$ si ha $\{1\} = N$ ed $|H| = p^3$.

(iii) $\mathfrak{Z}(G) \wedge H \leqslant \mathfrak{Z}(H)$ ed essendo $|\mathfrak{Z}(H)| = p$ si ha $\mathfrak{Z}(G) \wedge H = \{1\}$ oppure $\mathfrak{Z}(G) \wedge H = \mathfrak{Z}(H)$. La prima eventualità non si può presentare per 1.3.

(iv) Se $\mathfrak{Z}(G)$ non è ciclico, esso contiene, giacchè è abeliano, almeno due sottogruppi di ordine p ed uno di questi non è contenuto in H: ciò è assurdo per 1.3.

Un'analisi delle classi di isomorfismo dei gruppi di ordine p^4 (cfr. [9], pp. 197-198) porta alle seguenti conclusioni:

I gruppi caratterizzati con i numeri 1, 2, 4, 6, 7 nella tabella I hanno centro non ciclico e quindi, in base al lemma 2.1, se non sono modulari non sono neppure debolmente modulari. Al numero 5 della stessa tabella è descritto un gruppo modulare se $p \neq 2$ mentre se $p = 2$ sono descritti il gruppo modulare non abeliano di ordine 16 ed esponente 8, il gruppo diedrale ed il gruppo semidiedrale di ordine 16; questi due ultimi ed il gruppo dei quaternioni generalizzati di ordine 16 non sono debolmente modulari giacchè il loro fattoriale sul centro è diedrale di ordine 8. Al numero 3 della tabella I è descritto il gruppo

$$G = \langle a, b, c | a^p = b^p = c^{p^2} = [a, c] = [b, c] = 1 \, , \, [a, b] = c^p \rangle = M_3(p) \curlyvee C_{p^2}$$

Questo gruppo, ed in generale ogni gruppo $H \simeq M_3(p) \curlyvee C_{p^n}$ con n intero positivo e con il centro di $M_3(p)$ amalgamato, è non modulare e debolmente modulare giacchè ogni suo sottogruppo di ordine p distinto da H' è contenuto in un solo stogruppo di ordine p^2 contenente H' e perciò ogni filtro massimale di $\mathfrak{L}(H)$ è modulare.

I gruppi descritti nella tabella II per $p \neq 2$ hanno tutti per fattoriale sul loro centro un gruppo isomorfo a $M_3(p)$ e quindi non sono debolmente modulari. Riassumendo le osservazioni appena fatte possiamo enunciare la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia*

$$G = \langle a, b, c | a^p = b^p = c^{p^n} = [a, c] = [b, c] = 1, \; [a, b] = c^{p^{n-1}} \rangle$$

con p primo ed n intero positivo. Allora G è debolmente modulare e per $n = 2$ è l'unico (*) *gruppo debolmente modulare e non modulare.*

Alla dimostrazione del risultato più significativo di questo paragrafo premettiamo ancora una proposizione per trattare le complicazioni presentate dai 2-gruppi.

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia G un gruppo non modulare di ordine 2^5. G è debolmente modulare se e solo se è isomorfo ad uno dei seguenti*

(*) A meno di isomorfismi.

gruppi:

$$G_1 = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^8 = [a, c] = [b, c] = 1,\ [a, b] = c^4 \rangle,$$

$$G_2 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 | a_i^2 = z^2 = 1,\ [a_i, a_j] = z \text{ per } i \neq j,$$
$$i, j = 1, 2, 3, 4 \rangle \simeq D_8 \curlyvee Q_8 .$$

Inoltre G_2 non è contenuto propriamente in alcun 2-gruppo debolmente modulare.

DIM. Sia G debolmente modulare e sia T un sottogruppo non modulare di ordine 2^4 contnuto in G (cfr. lemma 2.1). Poniamo

$$T = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = z^2 = 1,\ [a, b] = [b, c] = [a, c] = z \rangle =$$
$$= \langle ab, bc, ac | z^2 = (ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1,$$
$$[ab, bc] = [ab, ac] = [bc, ac] = z \rangle = \text{(ponendo } v = abc) =$$
$$= \langle a, b, v | a^2 = b^2 = v^4 = [a, v] = [b, v] = 1,\ [a, b] = v^2 \rangle .$$

Sia $t \in G$ tale che $\langle T, t \rangle = G$; si ha $t^2 \in T$. Distinguiamo tre casi:

a) $|\langle t \rangle| = 2$. Allora $\langle a, b, t \rangle$, $\langle a, c, t \rangle$, $\langle b, c, t \rangle$ sono gruppi di ordine 2^4 debolmente modulari non modulari e quindi isomorfi a T per 2.2. (si tenga presente che $\langle a, b \rangle$, $\langle a, c \rangle$, $\langle b, c \rangle$ sono quasimormali in G per 2.1 (iii) e per 1.4); ne consegue $[a, t] = [b, t] = [c, t] = z$ cosicchè $G = \langle a, b, c, t \rangle$ è isomorfo a G_2. Effettivamente G_2 è debolmente modulare: infatti ogni sua involuzione non centrale è contenuta in un solo sottogruppo di ordine 4 che è normale in G_2 ed a fattoriale abeliano giacchè contiene $G_2' = \langle z \rangle$; inoltre z è l'unica involuzione centrale: possiamo cosí concludere che tutti i filtri massimali di $\mathfrak{L}(G_2)$ sono modulari e che G_2 è debolmente modulare.

b) $|\langle t \rangle| = 4$. t^2 è involuzione centrale di T: infatti se non fosse tale, essa sarebbe contenuta in un sottogruppo diedrale $D < T$; pertanto se f è un elemento di ordine 4 in D si ha che $\langle f, t \rangle$ è un gruppo non modulare di ordine 16 non isomorfo a T, e quindi non debolmente modulare: assurdo.

È dunque $t^2 = z$. Allora $\langle t, a, b \rangle$, $\langle t, a, c \rangle$, $\langle t, b, c \rangle$ sono isomorfi a T. Se fosse $[t, ab] = [t, bc] = [t, ac] = z$, si avrebbe

$$z = [t, bc] = [t, abacz] = [t, acz][t, ab]^{acz} = [t, z][t, ac]^z z = 1 : \text{assurdo.}$$

Dunque $[t, ab] = 1$ oppure $[t, ac] = 1$ oppure $[t, bc] = 1$; in corrispondenza si ha che tab, oppure tac, oppure tbc è un'involuzione non contenuta in T e si è ricondotti al caso a).

c) $|\langle t\rangle| = 8$. t^2 è un elemento centrale in T: infatti, se non fosse tale, detta x una involuzione non centrale del sottogruppo diedrale di T contenente t^2, si avrebbe che $\langle t, x\rangle$ è un gruppo non modulare di ordine 16 (per 1.4) non isomorfo a T e pertanto non debolmente modulare: assurdo.

Concludiamo cosí che $\langle t^2\rangle = \langle v\rangle = \langle abc\rangle$; non è restrittivo supporre $t^2 = v$. Se si verifica una delle seguenti coppie di uguaglianze

$$[t, a] = [t, b] = 1 \qquad [t, b] = [t, c] = 1 \qquad [t, a] = [t, c] = 1$$

allora G è isomorfo a G_1.

D'altra parte G_1 è debolmente modulare per 2.2.

Rimane da considerare il caso in cui due involuzioni fra a, b, c non commutano con t. Per fissare le idee supponiamo che queste siano a, b.

Allora $\langle a, t\rangle$ e $\langle b, t\rangle$ sono gruppi non abeliani di ordine 16 ed esponente 8 ($\langle t\rangle$ è quasinormale in G per 1.4). Giacchè i gruppi diedrale, semidiedrale e dei quaternioni generalizzati non sono debolmente modulari, si ha $t^a = t^b = t^5$ e quindi

$$(tc)^a = t^a c^a = t^5 t^4 c = tc$$

$$(tc)^b = t^b c^b = t^5 t^4 c = tc$$

$$(tc)^2 = tt^c = tt^{bav} = tt^{t^4 ba} = t^2 .$$

Ne consegue ancora $G = \langle a, b, tc\rangle \simeq G_1$.

Dimostriamo ora l'ultimo asserto dell'enunciato. Supponiamo pertanto che esista un gruppo H di ordine 2^6 debolmente modulare e contenente un sottogruppo isomorfo a G_2 e verifichiamo che ciò è assurdo.

Sia $H > M = \langle a, b, c, t | a^2 = b^2 = c^2 = t^2 = z^2 = 1,\ [a, b] = [a, c] = [a, t] = [b, c] = [c, t] = [b, t] = z\rangle$, $M > T = \langle a, b, c\rangle$. Poniamo $H = \langle M, g\rangle$. Ovviamente $g^2 \in M$. Distinguiamo alcuni casi.

α) $g^2 = 1$. Allora $\langle a, b, g\rangle$, $\langle a, c, g\rangle$, $\langle a, t, g\rangle$, $\langle b, c, g\rangle$, $\langle b, t, g\rangle$ e $\langle c, t, g\rangle$ sono gruppi di ordine 16 isomorfi a T (per 1.4, 2.1 e 2.2). Per-

tanto $[a, g] = [b, g] = [c, g] = [t, g] = z$ e $[g, z] = 1$. Ne consegue che $\langle a, bctg, z\rangle$ è un gruppo abeliano elementare di ordine 8 e che $\langle a, bctg, b\rangle$ è un gruppo di ordine 16 non modulare e non isomorfo a T: e ciò è assurdo per 2.2.

β) $g^2 = z$. Allora $\langle a, b, g\rangle$, $\langle g, a, c\rangle$, $\langle g, a, t\rangle$, $\langle g, b, c\rangle$, $\langle g, b, t\rangle$ e $\langle g, c, t\rangle$ sono isomorfi a T e si ha

$$g^x = g^{\varepsilon(x)} \quad \text{ove } x \in \{a, b, c, t\},\ \varepsilon(x) \in \{1, -1\}\ .$$

Esistono certamente $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ in $\{a, b, c, t\}$ tali che $\bar{x} \neq \bar{y}$ ed $\varepsilon(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{y})$ ed allora $(g\bar{x}\bar{y})^2 = g^2(\bar{x}\bar{y})^2 = 1$ cosicchè $g\bar{x}\bar{y}$ è un'involuzione di G non contenuta in M e si è ricondotti al caso α).

γ) g^2 è un'involuzione non centrale di M. Allora detto q un elemento di ordine 4 di un sottogruppo diedrale di M contenente g^2, si ha che $\langle g, q\rangle$ è un gruppo non modulare di ordine 16 e non isomorfo a T: assurdo.

δ) g^2 è un elemento di ordine 4. Allora esiste un sottogruppo diedrale D contenuto in M tale che $g^2 \in D$: ne consegue che $\langle D, g\rangle$ è un gruppo di ordine 16 (giacchè D è quasinormale) non modulare e non isomorfo a T: e ciò è assurdo.

Abbiamo cosí completato l'esame delle possibili estensioni di M con un gruppo ciclico di ordine 2 ed abbiamo verificato che nessuna di esse è debolmente modulare. La proposizione è con ciò dimostrata.

TEOREMA 2.4. *Sia G un gruppo di ordine p^n, con p primo ed n intero positivo, $n \geqslant 3$. G è debolmente modulare se e solo se si presenta una delle seguenti eventualitá:*

(i) *G è modulare,*

(ii) $G \simeq \langle a, b, c | a^p = b^p = c^{p^{n-2}} = [a, c] = [b, c] = 1,$
$[a, b] = c^{p^{n-3}}\rangle \simeq C_{p_{n-2}} \curlyvee M_3(p)$,

(iii) $G \simeq \langle a_1, a_2, a_3, a_4 | a_i^2 = z^2 = [z, a_i] = 1,\ [a_i, a_j] = z,\ i \neq j,$
$i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\rangle \simeq Q_8 \curlyvee D_8$.

DIM. Il teorema è contenuto nelle proposizioni 2.3., 2.2. se $n < 5$, $p \neq 2$ e se $n < 6$, $p = 2$. Procediamo quindi per induzione su n. Sup-

poniamo $n \geqslant 5$ per $p \neq 2$, $n \geqslant 6$ per $p = 2$ e G non modulare. Allora G contiene, per la proposizione 2.1., per l'ipotesi induttiva, e per la proposizione 2.3. nel caso $p = 2$, un sottogruppo N di ordine p^{n-1} isomorfo a quello descritto in (ii).

(1) Ogni sottogruppo di ordine p di G è contenuto in N.

Infatti, se $A \leqslant G$, $A \nleqslant N$, $|A| = p$, detto Q un sottogruppo quasinormale in G contenuto in N ed isomorfo ad $M_3(p)$, se $p \neq 2$, ed a $C_4 \curlyvee D_8$, se $p = 2$ (vedi proposizione 2.1 ed 1.4), allora AQ è un sottogruppo debolmente modulare di ordine p^4 e non isomorfo a quello descritto in 2.2 se $p \neq 2$, oppure, per $p = 2$, è isomorfo a $Q_8 \curlyvee D_8$ ed è contenuto propriamente in G; entrambe le eventualità sono in contrasto con 2.2 o con 2.3 e pertanto la (1) è vera.

(2) Posto $G = \langle N, g \rangle$,

$$N = \langle a, b, c | a^p = b^p = c^{p^{n-3}} = [a, c] = [b, c] = 1,\ [a, b] = c^{p^{n-4}} \rangle$$

risulta $|\langle g \rangle| = p^{n-2}$ e $\langle g^p \rangle = c$.

Infatti se g^p fosse un elemento non centrale di ordine p in N, allora $\langle a, b, g \rangle$ sarebbe un sottogruppo di ordine p^4 non debolmente modulare per 2.2.

Se $\langle g^p \rangle = \langle c^{p^{n-4}} \rangle$ allora $\langle g, c^{p^{n-5}} \rangle$ contiene un sottogruppo F di ordine p non contenuto in N, qualora sia $p \neq 2$, e ciò è in contrasto con (1); se $p = 2$ allora $\langle a, b, c^{2^{n-5}}, g \rangle$ contiene un'involuzione (cfr. dimostrazione di 2.3) non contenuta in N: e ciò contraddice ancora (1).

In generale se g^p è un elemento non centrale in N di ordine p^{n-i} con $3 \leqslant i \leqslant n-2$, esiste in N un elemento x di ordine p che non commuta con g^p. Allora il sottogruppo $\langle x, g \rangle$ non è abeliano, ha ordine p^{n-i+2} ($\langle g \rangle$ è quasinormale), è debolmente modulare ed ha un sottogruppo ciclico di indice p. Pertanto (cfr. [5], I.14.9) si ha

$$g^x = g^{1+p^{n-i}}$$

ne consegue $[g^p, x] = 1$: contraddizione.

Dunque g^p è un elemento centrale in N; se l'ordine di g^p è p^{n-i} con $4 \leqslant i \leqslant n-2$, allora il sottogruppo $\langle g, c^{p^{i-4}} \rangle$ ha ordine p^{n-i+2} ed ha un sottogruppo ciclico di indice p: pertanto $\langle g, c^{p^{i-4}} \rangle$ contiene sottogruppi di ordine p non contenuti in N: e ciò è assurdo per quanto si è visto in (1). Pertanto $\langle g^p \rangle = \langle c \rangle$ come si voleva dimostrare.

Ciò visto, non è restrittivo supporre $g^p = c$ (giacchè possiamo so-

stituire eventualmente g con una sua potenza conveniente). Distinguiamo ora i casi possibili:

α) $g^a = g^b = g$. Allora $\langle a, b, g\rangle$ è del tipo descritto in (ii).

β) $g^a \neq g \neq g^b$. Giacchè $\langle a, g\rangle$ e $\langle b, g\rangle$ sono debolmente modulari con un sottogruppo ciclico di indice p, in questo caso si ha $g^a = g^b = g^{1+p^{n-3}}$.

Per $p \neq 2$ risulta $[g, a^{-1}b] = g^{-1}g^{a^{-1}b} = g^{-1}g^{(1+p^{n-3})^p} = 1$ e quindi

$$(ga^{-1}b)^p = g^p(a^{-1}b)^p = g^p$$

$$(ga^{-1}b)^a = g^{1+p^{n-3}}a^{-1}g^{-p^{n-3}}b = ga^{-1}b \qquad ([a, b] = g^{p^{n-3}}!)$$

$$(ga^{-1}b)^b = g^{1+p^{n-3}}g^{-p^{n-3}}a^{-1}b = ga^{-1}b\,.$$

Ne consegue che $G = \langle a, b, ga^{-1}b\rangle$ è del tipo descritto in (ii). Per $p = 2$ si verifica con calcoli simili che $g^{1+2^{n-4}}$ è un elemento di ordine 2^{n-2} che centralizza a e b ed il cui quadrato è c. Anche in questo caso G è del tipo descritto in (ii).

γ) $g^a \neq g = g^b$. Si ha $(gb)^p = g^p$; $[gb, b] = [gb, a] = 1$ e si conclude come in α).

δ) $g^a = g \neq g^b$. Si ha $(ga^{-1})^p = g^p$; $[ga^{-1}, a] = [ga^{-1}, b] = 1$ e si conclude come in α).

Per 2.2 e 2.3 i gruppi descritti in (ii) ed in (iii) sono debolmente modulari e con ciò la dimostrazione del teorema è completa.

OSSERVAZIONE 2.5. Nel caso $p \neq 2$ la dimostrazione del teorema 2.4 si poteva ottenere più rapidamente facendo uso di un risultato di Blackburn (cfr. [1], Th. 4.1): infatti dal punto (1) della dimostrazione che abbiamo dato, si deduce subito che ogni sottogruppo di ordine p^3 normale in G è generabile con 2 elementi; in base al teorema citato di Blackburn, un gruppo soddisfacente a tale condizione può essere:

α) metaciclico, e quindi modulare,

β) 3-gruppo di classe massimale e quindi non debolmente modulare,

γ) isomorfo al gruppo descritto in 2.4 (ii),

δ) isomorfo ad uno di due gruppi con tre generatori che risultano non debolmente modulari.

3. Gruppi supersolubili.

I gruppi finiti minimali non modulari di ordine composto, che avranno un ruolo notevole nella trattazione seguente, sono stati studiati e caratterizzati da Napolitani che in [8] ne fornisce un elenco completo.

Utilizzando tale elenco si verifica facilmente che un gruppo di ordine composto supersolubile, minimale non modulare e debolmente modulare è isomorfo ad uno dei seguenti gruppi:

1) $C_p \leftthreetimes (C_q \times C_q)$ 2) $C_{p^2} \leftthreetimes C_q$ 3) $C_p \leftthreetimes C_{q^2}$

4) $(C_p \times C_p) \leftthreetimes C_q$ 5) $(C_p \times C_q) \leftthreetimes C_t$ 6) $C_p \leftthreetimes (C_q \times C_t)$

ove p, q, t sono primi distinti e l'estensione spezzante è fatta, ovviamente in modo da ottenere un gruppo supersolubile non modulare.

LEMMA 3.1. *Sia G un gruppo supersolubile non nilpotente a reticolo debolmente modulare e non modulare. Se $\Phi(G) \neq \{1\}$, allora si ha:*

(i) $|G| = p^\alpha q$ p, q primi distinti, $p > q$,

(ii) $|\Phi(G)| = p$,

(iii) *$S_p(G)$ ha ordine al più p^3 ed è generabile con due elementi qualora sia abeliano; ha ordine al più p^4 ed è generabile con 3 elementi qualora sia non abeliano.*

DIM. È noto che G è reticolarmente riducibile se e solo se tale è $G/\Phi(G)$ (cfr. [10], Prop. 1.1); dalle ipotesi su $\mathfrak{L}(G)$ e da 1.1 consegue che $G/\Phi(G)$ è modulare con reticolo irriducibile. Allora $G/\Phi(G)$ è un P-gruppo (cfr. [10], p. 11) e non è abeliano, altrimenti G stesso sarebbe nilpotente.

Pertanto $|G/\Phi(G)| = p^\varepsilon q$ e $|G| = p^\alpha q^\beta$, p e q primi, $p > q$ (cfr. [5], V. 3.8). Supponiamo che esista un sottogruppo $N \lhd G$ tale che $\{1\} \neq N \leqslant \Phi(G)$ e $|\Phi(G)/N| = p$. Allora $|G/N| = p^{\varepsilon+1} q$, G/N è modulare non nilpotente ed è quindi un P-gruppo non abeliano (cfr. [10], p. 13). Ne consegue $\{1\} = \Phi(G/N) = \Phi(G)/N$ in contrasto con la scelta di N.

Si presenta perciò una delle seguenti eventualità:

α) $|\Phi(G)| = p$,

β) $\Phi(G)$ è privo di sottogruppi normali in G di indice p in $(\Phi)G$: nel qual caso, la nilpotenza di $\Phi(G)$ e la supersolubilità di G comportano che $\Phi(G)$ è un q-gruppo.

Consideriamo i due casi separatamente.

α) $$|\Phi(G)| = p\,, \qquad |G| = p^{e+1}q\,.$$

Sia $S_p(G)$ il p-sottogruppo di Sylow di G. Allora $S_p(G)/\Phi(G)$ è abeliano elementare giacchè $\Phi(G) \geqslant \Phi(S_p(G))$ essendo $S_p(G) \lhd G$. Inoltre un sottogruppo minimale non modulare contenuto in G è del tipo $(C_p \times C_p) \leftthreetimes C_p$ o $C_{p^2} \leftthreetimes C_q$ o $(C_p \times C_p) \leftthreetimes C_q$, cosicchè esso contiene al più due sottogruppi di ordine p normali in G.

α_1) Se $S_p(G)$ è abeliano, allora $\Omega_1(S_p(G))$ è abeliano elementare e normale in G. Se $|\Omega_1(S_p(G))| = p^n$, allora, per la supersolubilità di G, in base al teorema di Maschke ([5], I.17.6), esistono in $\Omega_1(S_p(G))$ n sottogruppi di ordine p normali in G. Per 1.3 risulta $n \leqslant 2$; perciò $S_p(G)$ è generabile con due elementi e $|S_p(G)| \leqslant p^3$ in quanto $|\Phi(G)| = p$.

α_2) Se $S_p(G)$ è modulare non abeliano, allora $|S_p(G)'| = p$. Ne consegue, giacchè $p \neq 2$, $S_p(G) = S_1 \times S_2$ con S_1 metaciclico ed S_2 abeliano (cfr. [10], p. 15). Se S_2 non è ciclico, allora $|\Omega_1(\mathfrak{Z}(S_p(G)))| \geqslant p^3$ e, riapplicando l'argomento usato in α_1) si ottiene un assurdo. Pertanto $S_p(G)$ è generabile con 3 elementi: ne consegue $|S_p(G)| \leqslant p^4$.

α_3) Se $S_p(G)$ è non modulare, allora, per 2.4, è generabile con 3 elementi, giacchè $p \neq 2$: risulta ancora $|S_p(G)| \leqslant p^4$.

β) $$\Phi(G) \quad \text{è un } q\text{-gruppo}\,.$$

Esiste un sottogruppo Q di ordine q normale in G e contenuto in $\Phi(G)$. G/Q è modulare non nilpotente e, pertanto, $S_p(G/Q) = S_p(G)Q/Q \simeq S_p(G)/(S_p(G) \wedge Q) \simeq S_p(G)$ è abeliano elementare; inoltre $S_q(G)$ è abeliano, con un sottogruppo ciclico di indice q, giacchè $S_q(G/Q) = S_q(G)/Q$ è ciclico. Da ciò consegue, per 1.3, che un sottogruppo N minimale non modulare di G è del tipo $C_p \leftthreetimes (C_q \times C_q)$. Risulta $|S_p(G)| = p$, altrimenti, per il teorema di Maschke e per la supersolubilità di G, esisterebbero sottogruppi di ordine p normali in G e non contenuti in N, in contrasto con 1.3.

Pertanto si ha: $G = C_p \leftthreetimes (C_{q^{\beta-1}} \times C_q)$ con $\beta \geqslant 2$. Se $\beta > 2$, allora Q non è contenuto in $C_{q^{\beta-1}}$, essendo G/Q modulare non nilpotente; al-

lora, per 1.3, $C_p \vee C_{q^{\beta-1}}$ è modulare; ne consegue $\{1\} \neq (C_{q^{\beta-1}})^q \lhd G$. Allora $G/(C_{q^{\beta-1}})^q$ è non modulare giacchè G è non nilpotente: e ciò contrasta con le ipotesi. Pertanto $\beta = 2$ e quindi $\Phi(G) = \{1\}$: ciò é ancora in constrasto con le ipotesi e prova che il caso β) non si può presentare. La dimostrazione è ora completa.

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia G un gruppo supersolubile non nilpotente con $\Phi(G) \neq \{1\}$. G è debolmente modulare se e solo se si verifica una delle seguenti eventualitá:*

(i) *G è modulare,*

(ii) *$|G| = pqr$ ove p, q, r sono primi.*

DIM. *Sufficienza*: ovvia.

Necessitá: in base al lemma 3.1 basta verificare che non sono debolmente modulari le estensioni non nilpotenti di uno dei seguenti gruppi

I) $C_{p^2} \times C_p$ II) $C_{p^2} \leftthreetimes C_p$ III) $(C_p \times C_p) \leftthreetimes C_q$

IV) $(C_{p^2} \leftthreetimes C_p) \times C_p$ V) $C_{p^2} \curlyvee ((C_p \times C_p) \leftthreetimes C_p)$

mediante un gruppo di ordine q, ove p e q sono primi e $p > q$.

Distinguiamo i vari casi:

I) Sia $P = \langle a, b | a^{p^2} = b^p = [a, b] = 1 \rangle$, α un automorfismo di ordine q, e sia $G = P \leftthreetimes \langle c \rangle$, ove $c^q = 1$ e $x^c = x^\alpha$ per ogni x di P. Se G è debolmente modulare, allora $G/\Phi(P) = G/\langle a^p \rangle$ è un P_0^*-gruppo e pertanto $\langle a^p, b \rangle$ è $\langle c \rangle$-invariante; per il teorema di Maschke ([5], I.17.3) esiste in $\langle a^p, b \rangle$ un sottogruppo $\langle c \rangle$-invariante di ordine p e distinto da $\langle a^p \rangle$. Perciò, con un eventuale cambiamento di notazioni, possiamo supporre che $\langle b \rangle$ sia normale in G. $G/\langle b \rangle$ è non nilpotente giacchè c induce in $\langle a \rangle$ un automorfismo di ordine q con $q \not\equiv 1 \bmod p$, altrimenti c indurrebbe l'identità su $P/\Phi(P)$ e quindi su P. Pertanto $G/\langle b \rangle$ non è modulare e G non è debolmente modulare: contraddizione.

II) Sia $P = \langle a, b | a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p} \rangle$. Se n è un intero tale che $2n \equiv 1 \bmod p^3$ allora la posizione $g \circ h = gh[h, g]^n$ per $g, h \in P$, definisce una operazione $\circ$ su P. P con l'operazione $\circ$ è un gruppo abeliano e nei sottogruppi abeliani di P l'operazione $\circ$ coincide con l'operazione vigente in P. Inoltre ogni automorfismo di P è automorfismo di $(P, \circ)$ e pertanto non esiste una estensione debolmente modulare non nilpo-

tente di P mediante un gruppo di ordine q altrimenti ne esisterebbe pure una di $(P, \circ)$ dello stesso tipo in contrasto con quanto si è visto in I).

III) Sia ora

$$P = \langle a, b | a^p = b^p = [a, b]^p = [[a, b], a] = [[a, b], b] = 1 \rangle ,$$

α un automorfismo di P di ordine q, e sia $G = P \leftthreetimes \langle c \rangle$ con $c^q = 1$ e $x^c = x^\alpha$ per ogni $x \in P$.

Se G è debolmente modulare allora $G/\langle [a, b] \rangle$ è un P_0^*-gruppo e pertanto $\langle a, [a, b] \rangle$ e $\langle b, [a, b] \rangle$ sono $\langle c \rangle$-invarianti; per il teorema di Maschke esistono in $\langle a, [a, b] \rangle$ ed in $\langle b, [a, b] \rangle$ sottogruppi di ordine p distinti da $\langle [a, b] \rangle$ e $\langle c \rangle$-invarianti. Con un eventuale cambiamento di notazioni possiamo supporre che tali sottogruppi siano $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$. Allora si ha $\langle a \rangle \vee \langle c \rangle \geqslant \langle c \rangle$, $\langle b \rangle \vee \langle c \rangle \geqslant \langle c \rangle$ e $(\langle a \rangle \vee \langle c \rangle) \vee (\langle b \rangle \vee \langle c \rangle) = G$ e pertanto G non è debolmente modulare: contraddizione.

IV) e V) Sia G un'estensione di un gruppo del tipo IV) o V) mediante un gruppo di ordine q; se G è debolmente modulare esso contiene un sottogruppo debolmente modulare che è estensione di un gruppo del tipo II) o III) mediante un gruppo di ordine q e ciò è assurdo per quanto si è visto sopra.

TEOREMA 3.3. *Sia G un gruppo finito supersolubile non nilpotente. G è debolmente modulare se e solo se si presenta una delle seguenti eventualitá:*

(i) *G è modulare.*

(ii) *$|G| = pqr$ con p, q, r primi.*

(iii) *G è un gruppo con centro identico e sottogruppi di Sylow ciclici; inoltre il sottogruppo di Sylow relativo al massimo primo divisore di $|G|$ ha ordine primo e coincide col derivato di G.*

(iv) *$G \simeq (C_p \times \bar{C}_p) \leftthreetimes (C_q \times C_r)$ p, q, r primi distinti, con $[C_p, C_q] = \{1\} = [\bar{C}_p, C_r]$ e $[\bar{C}_p, C_q] \neq \{1\} \neq [C_p, C_r]$, $\mathfrak{N}(C_p) \geqslant C_r$, $\mathfrak{N}(\bar{C}_p) \geqslant C_q$.*

DIM. Per 3.2 è sufficiente provare l'asserto qualora sia $\Phi(G) = \{1\}$. Supponiamo dunque che G sia non modulare e che $\Phi(G)$ sia identico.

G' è nilpotente, giacchè G è supersolubile, e quindi $\Phi(G') \geqslant G''$; essendo $G' \lhd G$ si ha $\Phi(G') \leqslant \Phi(G) = \{1\}$: ne consegue

$$G'' = \{1\} .$$

Se p è il primo massimo divisore di $|G|$, risulta $S_p(G) \lhd G$ e quindi $\Phi(S_p(G)) \leqslant \Phi(G) = \{1\}$: ne consegue

$$S_p(G) \text{ è abeliano elementare .}$$

Inoltre, per il teorema di Maschke e per la supersolubilità di G, $S_p(G)$ è prodotto dei sottogruppi normali minimali di G contenuti in esso.

Dall'ipotesi $\Phi(G) = \{1\}$ consegue pure che G si spezza su ogni suo sottogruppo abeliano normale (cfr. [5], III.4.4). Ne consegue

$$G = S_p(G) \leftthreetimes K , \qquad \text{con } K \text{ modulare.}$$

Sia ora M un sottogruppo minimale non modulare contenuto in G; per 1.3 e per quanto si è appena visto, risulta $S_p(G) = S_p(M)$: ne consegue

$$|S_p(G)| \leqslant p^2 .$$

In relazione a $|S_p(G)|$ distinguiamo i due casi possibili.

α) $$|S_p(G)| = p^2 .$$

Allora $M = (P_1 \times P_2) \leftthreetimes Q$, con P_1, P_2 di ordine p e Q di ordine primo q e $P_i \lhd G$ $(i = 1, 2)$. Dato che G' è nilpotente, il derivato di ogni sottogruppo di Hall di G è normale in G ([5], VI.9.10): ne consegue $K' \lhd G$ e quindi, per 1.3, $K' = \{1\}$, giacchè $M \wedge K' \lhd M$ e quindi $M \wedge K' = \{1\}$; pertanto K è abeliano.

Inoltre, per 1.3, $P_i \leftthreetimes K$ è modulare $(i = 1, 2)$ e si ha $G = P_1 \leftthreetimes (P_2 \vee K) = P_2 \leftthreetimes (P_1 \vee K)$.

α_1) Se $\mathfrak{C}_G(P_i) \not\geqslant Q$ per $i = 1, 2$, allora, in base alla struttura dei gruppi modulari si ha:

$$G = P_1 \leftthreetimes (P_2 S_q(K) \times S_{q'}(K)) = P_2 \leftthreetimes (P_1 S_q(K) \times S_{q'}(K))$$

e quindi $S_q(K)$ è ciclico e $S_{q'}(K)$ è normale in G. Per 1.3; si ha $S_{q'}(K) = \{1\}$.

Per la modularità di P_iK si ha $K^q = S_q(G)^q \leqslant \mathfrak{C}_G(P_i)$ e quindi $K^q = \{1\}$ per la non modularità di M. In questo caso abbiamo ottenuto $G = M \cong (C_p \times C_p) \rtimes C_q$:

α_2) Se $\mathfrak{C}_G(P_1) \geqslant Q$ (il caso $\mathfrak{C}_G(P_2) \geqslant Q$ non è essenzialmente diverso) allora può presentarsi la situazione seguente

$$(*) \qquad G = P_1 \rtimes \big(P_2 S_q(K) \times S_{q'}(K)\big) = P_2 \rtimes \big(P_1 S_r(K) \times S_{r'}(K)\big), \qquad q \neq r.$$

In base alla struttura dei gruppi modulari, $S_q(K)$ ed $S_r(K)$ sono ciclici e si ha $S_q(K)^q \times S_r(K)^r \leqslant \mathfrak{Z}(G)$: per 1.3 risulta $S_q(K)^q \times S_r(K)^r = \{1\}$.

Pertanto $|S_q(K)| = |S_q(G)| = q$ e $|S_r(K)| = |S_r(G)| = r$. Inoltre da (*) risulta che un t-sottogruppo di Sylow di K con $q \neq t \neq r$ è normale in G e quindi, per 1.3, è identico. Ne consegue: $G \cong (C_p \times C_p) \rtimes (C_q \times C_r)$, come in (iv).

β) $$|S_p(G)| = p\,.$$

Distinguiamo ulteriormente due sottocasi.

β_1) $K' \neq \{1\}$.

Per la supersolubilità di G, essendo $K' \lhd G$, esiste un sottogruppo $Q \lhd K'$ di ordine primo q normale in G. Per 1.3. Q è contenuto in M e quindi

$$M = (P \times Q) \rtimes T \qquad \text{oppure} \qquad M = P \rtimes (Q \times \bar{Q})$$

ove $|P| = p$, $|\bar{Q}| = q$, $|T| = t$, con p, q, t primi distinti.

K' è abeliano essendo $G' \geqslant K'$; per la supersolubilità di G e per 1.3, consegue che K' è un q-gruppo; inoltre $\Phi(K') \leqslant \Phi(G) = \{1\}$, cosicchè K' è abeliano elementare. Per 1.3 consegue

$$|K'| = q.$$

Per quanto si è osservato in precedenza, G è estensione spezzata di K'. Qualora sia $M = P \rtimes (Q \times \bar{Q})$, si ha $G = K' \rtimes \big(P \bar{S}_q(K) \times B\big)$ con $\bar{S}_q(K) \simeq \simeq S_q(K)/K'$ ciclico. Per la struttura dei gruppi modulari, K' è il prodotto diretto dei derivati delle componenti di Hall di K: pertanto, se $S_q(K)$ è in un P_0^*-gruppo allora $|S_q(K)| = q$ giacchè $|K'| = q$, mentre se $S_q(K)$ è un q-gruppo componente di Hall, allora $K' = S_q(K)'$ e quindi $S_q(K)$ è ciclico essendo $\bar{S}_q(K)$ ciclico: in ogni caso si ottiene un assurdo avendo supposto $M = P \rtimes (Q \times \bar{Q})$.

Dunque $M = (P \times Q) \rtimes T$ e $[S_q(K), S_t(K)] \neq \{1\}$: allora $S_q(G)$ è contenuto in una componente di Hall non nilpotente di K e si ha $K' = S_q(G) = Q$. Pertanto risulta $G = Q \rtimes (PS_t(K) \times A)$ con A abeliano ed $S_t(K)$ ciclico.

D'altra parte si ha $G = P \rtimes (QS_t(K) \times A)$: quindi $A \leqslant \mathfrak{Z}(G)$; ne consegue $A = \{1\}$, per 1.3, e $G = (P \times Q) \rtimes S_t(K)$ con $S_t(K)$ ciclico. Con una argomentazione già usata in α_1) si ottiene $|S_t(K)| = t$ e quindi $G = M = (C_p \times C_q) \rtimes C_t$:

β_2) $K' = \{1\}$.

Se $\mathfrak{C}_G(S_p(G)) = S_p(G)$, allora $K = \mathfrak{N}_K(S_p(G))/\mathfrak{C}_K(S_p(G))$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di $S_p(G)$ e pertanto è ciclico.

Ovviamente il centralizzante di ogni elemento non identico di $S_p(G)$ è contenuto in $S_p(G)$ e quindi G è di Frobenius come in (iii) (cfr. [5], V.8.5).

Se $\mathfrak{C}_K(S_p(G)) \neq \{1\}$ allora ogni sottogruppo di $\mathfrak{C}_K(S_p(G))$ è normale in G e contenuto in M per 1.3. Pertanto $M = P \rtimes (Q \times \bar{Q})$ con $P = S_p(G)$, $|Q| = |\bar{Q}| = q$ primo diverso da p. Poniamo $Q \leqslant \mathfrak{C}_K(P)$. Risulta $G = Q \rtimes (P\bar{S}_q(K) \times \bar{K})$ con $(|\bar{K}|, pq) = 1$ e $\bar{S}_q(K) = S_q(K)/Q$ ciclico; inoltre $\bar{K} \lhd G$ e per 1.3. $\bar{K} = \{1\}$: pertanto $S_q(G) = S_q(K) = K = Q \times Q^*$ con Q^* ciclico. Come nel caso β_1) di 3.1 otteniamo $|Q^*| = q$ e quindi $|G| = pq^2$.

Sufficienza: per la (i): ovvia; per la (ii): vedi 1.5.

Per la (iii): Sia $G = P \rtimes K$, gruppo di Frobenius con $|P| = p$ e K ciclico. Chiaramente P genera in $\mathfrak{L}(G)$ un filtro modulare. Sia H un sottogruppo minimale di G distinto da P. Possiamo supporre $H \leqslant K$ (altrimenti ragioniamo in $G = P \rtimes K^g$ per un conveniente $g \in G$). Giacchè G è di Frobenius, da $K \neq K^g$, per $g \in G$, consegue $K \wedge K^g = \{1\}$ e pertanto un sottogruppo di G di ordine non divisibile per p e contenente H è contenuto in K.

Ne consegue che $F(H) = \{L, LP | H \leqslant L \leqslant K\}$ è il filtro generato da H in $\mathfrak{L}(G)$. Inoltre per ogni $X \in F(H)$ si ha:

$$(X \vee K) \wedge (X \vee HP) = X = (X \wedge K) \vee (X \wedge HP) .$$

Per un noto risultato di teoria dei reticoli (cfr. [7], th. 4.13) da ciò risulta $F(H) = F_K(H) \times F_{HP}(H)$ ove $F_K(H)$ è il filtro distributivo generato da H in $\mathfrak{L}(K)$ e $F_{HP}(H)$ è il filtro di lunghezza 1 generato da H in $\mathfrak{L}(HP)$.

Ne consegue che $F(H)$ e come esso tutti i filtri massimali propri di $\mathfrak{L}(G)$ sono modulari e quindi che G è debolmente modulare.

Per la (iv):

$$\text{Sia } G = \left\langle a, b, c, z \;\middle|\; \begin{array}{l} a^p = b^p = c^q = z^r = [b, c] = [a, z] = [a, b] = \\ \qquad\qquad = [c, z] = 1,\ a^c = a^{\varepsilon(c)} \\ b^z = b^{\varepsilon(z)},\ \varepsilon(c) \not\equiv 1 \not\equiv \varepsilon(z),\ \varepsilon(c)^q \equiv 1 \equiv \varepsilon(z)^r \bmod p \end{array} \right\rangle$$

ove p, q, r sono primi distinti tali che $p > q$ e $p > r$.

Proviamo che G è debolmente modulare verificando che in $\mathfrak{L}(G)$ due sottogruppi massimali coprono la loro intersezione e che due sottogruppi che coprono un sottogruppo minimale sono coperti dalla loro unione.

Dalle relazioni definitrici si ricava che G contiene

$p+1$ sottogruppi di ordine p

$$(\langle a\rangle \text{ e } \langle a^i b\rangle \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

p sottogruppi di ordine q

$$(\langle a^i c\rangle \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

p sottogruppi di ordine r

$$(\langle b^i z\rangle \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

p sottogruppi ciclici di ordine pq

$$(\langle b\rangle \vee \langle a^i c\rangle \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

p sottogruppi ciclici di ordine pr

$$(\langle a\rangle \vee \langle b^i z\rangle \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

p^2 sottogruppi ciclici di ordine qr

$$(\langle a^i c\rangle \vee \langle b^j z\rangle \qquad i, j = 0, 1, \ldots, p-1),$$

$$\langle a\rangle \vee \langle c\rangle \qquad \langle b\rangle \vee \langle z\rangle \qquad \langle a\rangle \vee \langle b\rangle$$

e che $G/\langle a\rangle$ e $G/\langle b\rangle$ sono modulari.

Ne consegue che ogni sottogruppo massimale di G è elemento di Dedekind in $\mathfrak{L}(G)$ e quindi che l'intersezione di due sottogruppi massimali è coperta da entrambi. Inoltre si ricava che un sttogruppo di ordine q distinto da $\langle a\rangle$ e da $\langle b\rangle$ è coperto soltando da $\langle a, b\rangle$.

Se $\langle a^i, c\rangle$ è un sottogruppo di ordine p di G allora esso è coperto da $\langle a, c\rangle$ da $\langle b, a^i c\rangle$ e dai p sottogruppi ciclici $\langle a^i c\rangle \vee \langle b^j z\rangle$ (j $= 0$, $1, \ldots, p-1$) e pertanto l'unione di due sottogruppi di G che coprono $\langle a^i c\rangle$ è $\langle a, c\rangle \times \langle b\rangle$ oppure $\langle a, c\rangle \times \langle b^j z\rangle$ oppure $\langle a^i c\rangle \times \langle b, z\rangle$.

Con considerazioni analoghe si ricava che l'unione di due elementi di $\mathfrak{L}(G)$ che coprono un sottogruppo di ordine r è un sottogruppo massimale di G; cosí viene completata la verifica che G è debolmente modulare e con essa la dimostrazione del teorema.

4. Gruppi risolubili.

TEOREMA 4.1. *Sia G un gruppo finito risolubile non supersolubile. Sono equivalenti asserzioni*:

(i) *G è debolmente modulare.*

(ii) *G è un gruppo di Frobenius di nucleo P: $G = P \leftthreetimes K$ e soddisfa alle condizioni*

a) P è il sottogruppo normale minimo di G, (non ciclico);

b) K è un gruppo modulare di ordine dispari;

c) per ogni $k \in K$, P è un $\langle k\rangle$-modulo irriducibile.

DIM. Ogni immagine epimorfa propria di G è supersolubile in quanto modulare e quindi $G = P \leftthreetimes K$ ove P è il sottogruppo nomale minimo di G e K è un sottogruppo massimale di indice non primo in G (cfr. [2], Hilfs. 2) Sia $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ e poniamo $\lambda(G) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i$, $|P| = p_1^{\beta}$, $\beta \geqslant 2$.

Sia ora $k \neq 1$ un elemento di ordine primo in K e sia $X \leqslant P$, $X \neq \neq \{1\}$. Allora $p(k) = \lambda(G) - \beta$ (per il significato di $p(k)$ si veda 1.2) e $p(P \vee \langle k\rangle) = \lambda(G) - \beta - 1$: pertanto una catena massimale, in $\mathfrak{L}(G)$, che connette $\langle k\rangle$ con $P \vee \langle k\rangle$ ha lunghezza 1. Essendo $P \vee \langle k\rangle \geqslant X \vee \vee \langle k\rangle \underset{\neq}{>} \langle k\rangle$ risulta $P \vee \langle k\rangle = X \vee \langle k\rangle$. Da ciò consegue:

α) nessun elemento di K normalizza alcun sottogruppo proprio non triviale di P;

β) P è un $\langle k\rangle$-modulo irriducibile per ogni $k \in K$;

γ) $\mathfrak{C}_G(x) \subseteq P$ per ogni $1 \neq x \in P$, e quindi $\beta = \alpha_1$ giacchè in un p-gruppo il centro è non triviale.

In base a γ) G è un gruppo di Frobenius (cfr. [5], V.8.5) con nucleo P; inoltre $|K|$ è dispari giacchè, altrimenti, un'involuzione di K invertirebbe gli elementi di P in contrasto con β) (cfr. [5], V.8.9).

Verifichiamo che il reticolo dei sottogruppi di un gruppo G soddisfacente alle condizioni (ii) è debolmente modulare.

Sia M un sottogruppo minimale di G di ordine p; allora, per la condizione c) il filtro generato da M in $\mathfrak{L}(G)$ è costituito da tutti i sottogruppi di P contenenti M e da tutti i sottogruppi di G contenenti P: ne consegue che $F(M)$ è modulare.

Se M è un sottogruppo di ordine primo distinto da p, allora esso è contenuto in un unico complemento di Frobenius $\overline{K}$ ed il filtro che genera in $\mathfrak{L}(G)$ è $F(M) = \{L, LP | M \leqslant L \leqslant \overline{K}\}$ giacchè un sottogruppo T di ordine divisibile per p e non contenuto in P, è di Frobenius con nucleo $T \wedge P$ e per c) $T \wedge P = P$.

Ripetendo l'argomento usato in 3.3 otteniamo che $F(M)$ è modulare anche in questo caso e ciò completa la dimostrazione del teorema.

5. Conclusioni.

Concludiamo questa nota mostrando che i gruppi debolmente modulari sono risolubili: quindi, la caratterizzazione di tali gruppi data nei teoremi 2.4, 3.3, 4.1 risulta completa. All'uopo proviamo due lemmi:

LEMMA 5.1. *Un gruppo G non è debolmente modulare se si verifica una delle condizioni seguenti*:

i) $G \simeq PSL(2, p^f)$ *p primo, $p^f \neq 2$, $p^f \neq 3$, f intero positivo.*

ii) $G \simeq PSL(3, 3)$.

DIM. In base ad teorema di Dickson (cfr. [5], II.8.27) basta provare l'asserto nel caso che f sia primo per $p = 2, 3$ ed 1 negli altri casi.

Se $p \neq 2$, consideriamo $C \leqslant G$, $|C| = q$, q primo distinto da 2 e da p ed un'involuzione τ che inverte ogni elemento di C (cfr. [5], pag. 192-3).

Risulta $\langle C, \tau \rangle = \mathfrak{N}_G(C)$; inoltre τ appartiene ad un gruppo quadrinomio K (cfr. [5], p. 197) e K è sottogruppo normale di un sottogruppo

$A \simeq A_4$ (cfr. [5], II.8.16). Si ha: $\langle C, \tau\rangle \wedge A = \langle C, \tau\rangle \wedge K = \langle\tau\rangle$ ed in base al teorema di Dickson citato

$$\langle C, \tau\rangle \vee K = G \text{ oppure } \langle C, \tau\rangle \vee K \cong S_4 .$$

Nel primo caso possiamo concludere che il filtro generato da $\langle\tau\rangle$ in $\mathfrak{L}(G)$ non è modulare; nel secondo caso, supponendo che S_4 operi sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ la conclusione è fornita dal sottoreticolo di $\mathfrak{L}(S_4)$ generato dai seguenti sottogruppi: $\langle(1, 2)\rangle$, $\langle(1, 2), (3, 4)\rangle$, $\langle(1, 2, 3, 4), (1, 2)\rangle$,$\langle(1, 2, 3), (1, 2)\rangle$, S_4.

Se $p = 2$, allora G possiede un sottogruppo ciclico C di ordine $2^f + 1$ il cui normalizzante $\mathfrak{N}_G(C)$ è diedrale di ordine $2(2^f + 1)$ (cfr. [5], II.8.4), inoltre un'involuzione τ di $\mathfrak{N}_G(C)$ è contenuta in un 2-sottogruppo di Sylow abeliano elementare S di G (cfr. [5], II.8.2).

Se $|S| = 4$ allora $G \simeq PSL(2, 4) \simeq PSL(2, 5)$ e si è ricondotti al caso precedente; se $|S| > 4$ allora esiste $K < G$ tale che $\langle\tau\rangle \underset{\neq}{<} K \underset{\neq}{<} S$: si ha $S \vee \mathfrak{N}_G(C) = K \wedge \mathfrak{N}_G(C) = \langle\tau\rangle$ e, per il teorema citato di Dickson, $K \vee \mathfrak{N}_G(C) = G = S \vee \mathfrak{N}_G(C)$ cosicchè $\langle\tau\rangle$ genera in $\mathfrak{L}(G)$ un filtro proprio non modulare.

(ii) È noto che un 2-sottogruppo di Sylow di $PSL(3, 3)$ è semidiedrale di ordine 16 (cfr. [3], p. 486) e ciò basta per concludere che G non è debolmente modulare.

LEMMA 5.2. *Il gruppo di Suzuki $Sz(2^q)$, $q \geqslant 3$, non è debolmente modulare.*

DIM. È sufficiente provare l'asserto nel caso che q sia primo (cfr. [6], p. 37). Allora il normalizzante di un 2-sottogruppo di Sylow di $Sz(2^q)$ è un gruppo di Frobenius risolubile di ordine $2^{2q}(2^q - 1)$ (cfr. [6], 4.12) e quindi non è debolmente modulare per 4.1 e 3.3 giacchè un 2-sottogruppo di Sylow di $Sz(2^q)$ non è abeliano elementare (cfr. [6], 4.1).

TEOREMA 5.3. *Un gruppo finito debolmente modulare è risolubile.*

DIM. La debole modularità è una proprietà gruppale che si eredita ai sottogruppi ed alle immagini epimorfe. Ne consegue che i gruppi debolmente modulari sono risolubili qualora non siano debolmente modulari i gruppi semplici ogni cui sottogruppo proprio è risolubile; tali gruppi sono stati determinati da J. Thompson (cfr. [5], II.7.5) ed in base ai lemmi 5.1 e 5.2 non sono debolmente modulari.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BLACKBURN, *Generalization of certain elementary theorems on p-groups*, Proc. London Math. Soc., **11** (1961), pp. 1-22.
[2] K. DOERK, *Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen*, Math. Zeit., **91** (1966), pp. 198-205.
[3] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, Harper and Row, New York (1968).
[4] H. HEINEKEN, *Kriterien für Vertauschbarkeit von Untergruppen Staatsexamenarbeit*, Frankfurt (1960).
[5] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin - Heidelberg (1967).
[6] H. LÜNEBURG, *Die Suzukigruppen und ihre Geometrien*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1965).
[7] F. MAEDA - S. MAEDA, *Theory of symmetric lattices*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1970).
[8] F. NAPOLITANI, *Gruppi finiti minimali non modulari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **45** (1971), pp. 229-247.
[9] E. SCHENKMAN, *Group theory*, Van Nostrand, Princeton (1965).
[10] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Erg. Math., **10**, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1956).
[11] H. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, Chelsea, New York (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 giugno 1974.