

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Su un'equazione astratta di tipo Tricomi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 53 (1975), p. 257-267

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__257_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__257_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su un'equazione astratta di tipo Tricomi.

ANGELO FAVINI (*)

SUMMARY - In this note I consider the abstract equation

$$u''(z) = zAu(z), \quad z \in R.$$

First, I study the existence of a « strict » solution for the Cauchy problem of hyperbolic type

$$(1) \quad \begin{cases} u''(z) = zB^2u(z), & z \geq 0, \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1, \end{cases}$$

B being a suitable linear closed operator in the Banach space X . I prove that if u_0 and u_1 belong to $D(B^2)$ and $D(B^3)$, respectively, a strict solution exists. The abstract result allow me to obtain, for example, Tricomi's formula for the solution of the problem

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = z \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2}, & z \geq 0, x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), & \frac{\partial u(0, x)}{\partial z} = u_1(x), \quad x \in R. \end{cases}$$

Then, I write explicitly a « strict » solution for the elliptic problem

$$(3) \quad \begin{cases} u''(z) = zAu(z), & z > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

where A is a suitable linear closed operator in the complex Banach space X .

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Piazza di Porta San Donato 5, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

The results apply, in particular, to the problem

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} = -z \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2}, & z \geq 0, x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in R. \end{cases}$$

Moreover, making use of the Theorem 1 (hyperbolic type), I find a « solution » for Tricomi equation in the whole plane assuming the given value $u_0(x)$ on the parabolic line $z = 0$.

1. Sia X uno spazio di Banach reale o complesso e sia B un operatore lineare in X a dominio $D(B)$ denso in X , generatore infinitesimale di un gruppo fortemente continuo di operatori.

DEFINIZIONE 1. Siano u_0, u_1 elementi di X . Diciamo che $u(z)$, $z \geq 0$, è soluzione stretta del problema (1) se $u(z)$ è continua su $[0, +\infty[$, ha derivate prima e seconda continue su $]0, +\infty[$, $u(z) \in D(B^2)$, e vale la (1).

TEOREMA 1. Se $u_0 \in D(B^2)$, $u_1 \in D(B^3)$, allora il problema (1) ha la soluzione stretta

$$(5) \quad u(z) = C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_0 dt + \\ + C_1 z \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t\right] u_1 dt, (*) ,$$

$$\text{dove } C_0 = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \right)^{-1}, \quad C_1 = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \right)^{-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo prima di tutto che, in virtù delle ipotesi su u_0 e u_1 e delle proprietà del gruppo generato da B (cfr. [1], pp. 11-12), $u(z) \in D(B^2)$, $z > 0$.

Indichiamo con $y(z)$ e $w(z)$ rispettivamente i due addendi nel secondo membro di (5).

(*) La formula è motivata dalla espressione della funzione di Airy. Per un'idea analoga, relativa all'equazione di Eulero-Poisson-Darboux, cfr. [2].

Consideriamo $y(z)$. Poichè $u_0 \in D(B^2)$, riesce, eseguendo opportune integrazioni per parti,

$$\begin{aligned}
 y'(z) &= C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} t B \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt = \\
 &= 2 C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} z^2 B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt ; \\
 y''(z) &= \frac{C_0}{z} \int_{-1}^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} B^2 t \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt + \\
 &+ C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} z t^2 B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt = \\
 &= C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} z B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt + \\
 &+ C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (t^2-1+1) z B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt = \\
 &= C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} z B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] u_0 dt = z B^2 y(z) , \quad z > 0 .
 \end{aligned}$$

D'altra parte, poichè $\|\exp[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t] x - x\| \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 0$, $x \in D(B)$ e

$$\|\exp[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t]\|_{X \rightarrow X} \leq M \exp[\omega|t|z^{\frac{3}{2}}] \leq M_1, \quad t \in [-1, 1], \quad z \in [0, \varepsilon],$$

deduciamo che $\|y(z) - u_0\| \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 0$.

Inoltre, da $\exp[tB] Bx = B \exp[tB] x$, $\forall x \in D(B)$, segue

$$\|y'(z)\| \leq z^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \left\| \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{3}{2}} t \right] \right\|_{X \rightarrow X} \|C_0 B u_0\| dt \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 0 .$$

Ciò prova che $y(z)$ soddisfa il problema

$$\begin{cases} y''(z) = zB^2y(z), & z > 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0^+} y(z) = u_0, & \lim_{z \rightarrow 0^+} y'(z) = 0. \end{cases}$$

Ora, la funzione $(t, z) \rightarrow (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} \exp[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t]u_0$ è continua su $] -1, 1[\times [0, +\infty[$ ed è anche dotata di derivata parziale prima continua rispetto a z su $] -1, 1[\times [0, +\infty[$ (cfr. [4], pp. 481-483); allora

$$y'(z) = C_0 \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} z^{\frac{1}{2}} \exp[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t] Bu_0 dt, \quad z \geq 0$$

In particolare, $y'(0) = 0$. Vale poi

$$z^{-1}[y'(z) - y'(0)] = 2zC_0 \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{1}{6}} \exp[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t] B^2u_0 dt, \quad z > 0,$$

e quindi esiste $y''(0) = 0$. Risulta anche

$$B^2y(z) = C_0 \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{-\frac{5}{6}} \exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\right] B^2u_0 dt \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} B^2u_0,$$

e perciò l'equazione è soddisfatta anche in $z = 0$.

Passiamo ad esaminare la $w(z)$. Con integrazioni per parti, si ha

$$\begin{aligned} w'(z) = C_1 \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{-\frac{1}{6}} \exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\right] u_1 dt + \\ + \frac{2}{5} z C_1 \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{1}{6}} B^2 z^2 \exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\right] u_1 dt, \end{aligned}$$

$$w''(z) = \frac{8}{5} C_1 \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{1}{6}} B^2 z^2 \exp\left[\frac{2}{3}Bz^{\frac{3}{2}}t\right] u_1 dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{5} C_1 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{2}{5}} B^2 z^2 t \frac{d}{dt} \left(\exp \frac{2}{3} B z^{\frac{2}{3}} t \right) u_1 dt = \\
& = C_1 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{2}{5}} z^2 B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{2}{3}} t \right] u_1 dt + \\
& + C_1 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{5}} (t^2 + 1 - 1) z^2 B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{2}{3}} t \right] u_1 dt = \\
& = C_1 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{5}} z^2 B^2 \exp \left[\frac{2}{3} B z^{\frac{2}{3}} t \right] u_1 dt = z B^2 w(z), \quad z > 0.
\end{aligned}$$

Nello stesso modo col quale si è studiata la $y(z)$, si prova poi che $w(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0+} 0$, $w'(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0+} u_1$ e che $w(z)$ è ben definita, insieme alle sue derivate prima e seconda, anche nello zero e soddisfa l'equazione anche per $z = 0$.

Dunque, la (5) è effettivamente soluzione stretta del problema (1).

APPLICAZIONE 1. Denotiamo con $UCB(R)$ l'insieme di tutte le funzioni limitate e uniformemente continue su R , a valori reali o complessi. $UCB(R)$ è uno spazio di Banach se munito della norma $\|f\|_C = \sup_x |f(x)|$.

$L^p(R)$, $1 \leq p < +\infty$, denota invece lo spazio di Banach di tutte le (classi di) funzioni misurabili su R e di p -esima potenza sommabili, con la norma usuale. Con $AC_{loc}(R)$ intendiamo lo spazio di tutte le funzioni localmente assolutamente continue su R .

Sia $X = UCB(R)$ oppure $X = L^p(R)$. Definiamo

$$D(B) = \{f \in X; f \in AC_{loc}(R), f' \in X\}, \quad Bf = f'.$$

Si sa (cfr. [1], p. 45) che $B = d/dx$ genera il gruppo delle traslazioni

$$(e^{tB}f)(x) = f(x+t), \quad f \in X, \quad t \in R;$$

inoltre, se $r \in \mathbb{N}$ e

$$f \in D(B^r) = \{f \in X; f, f', \dots, f^{(r-1)} \in AC_{\text{loc}}(R) \cap X, f^{(r)} \in X\},$$

risulta $B^r f = f^{(r)}$, (cfr. [1], p. 43).

Ciò premesso, consideriamo il problema (2). Esso non è altro che la « parte iperbolica » dell'equazione di Tricomi (cfr. [7], p. 347 sgg.).

Dai risultati sopra richiamati e dal Teorema 1 segue che se $u_0 \in D(B^2)$ e $u_1 \in D(B^3)$, la funzione $u(z, x)$ data da

$$u(z, x) = C_0 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} u_0(x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} t) dt + C_1 z \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} u_1(x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} t) dt$$

è soluzione di tale problema.

Effettuando il cambiamento di variabile $x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} t = \xi$, otteniamo

$$u(z, x) = C_2 (x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} - x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}) \int_{x - \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}}^{x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}} \left[(x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} - \xi)(\xi - (x - \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}})) \right]^{-\frac{1}{2}} u_0(\xi) d\xi + \\ + C_3 \int_{x - \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}}^{x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}} \left[(x + \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}} - \xi)(\xi - (x - \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}})) \right]^{-\frac{1}{2}} u_1(\xi) d\xi.$$

Riotteniamo in tal modo la formula (6) di [6], p. 349.

2. Sia $0 \leq \omega < \pi$ e sia $M > 0$. Ricordiamo che per un operatore lineare chiuso A nello spazio di Banach complesso X di tipo (ω, M) , è possibile definire la potenza A^α , $0 < \alpha < 1$, (cfr. [5], p. 269). A^α è di tipo $(\alpha\omega, M)$ e se $\alpha\omega < \pi/2$, $-A^\alpha$ è generatore infinitesimale del semi-gruppo $\exp[-\tau A^\alpha]$, olomorfo su $|\arg \tau| < \pi/2 - \alpha\omega$ e uniformemente limitato per $|\arg \tau| < \pi/2 - \alpha\omega - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

In particolare, se $\alpha = \frac{1}{3}$, $\exp[-\tau A^{\frac{1}{3}}]$ riesce definito su $|\arg \tau| < \pi/6 + (\pi - \omega)/3$ ed è uniformemente limitato su $|\arg \tau| < \pi/6 + (\pi - \omega)/3 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Poichè l'insieme risolvente di $-A^{\frac{1}{3}}$ è aperto, esiste una curva regolare Γ , contenuta in $\text{Re } \lambda < 0$, coincidente con i raggi $\arg \lambda = \pm \theta$, per $|\lambda|$ grande, θ essendo un conveniente reale con $\frac{2}{3}\pi \leq \theta < \frac{5}{3}\pi$, tale che $\exp[tA^{\frac{1}{3}}]$ è definito su Γ e naturalmente, a « sinistra » di Γ e in un intorno a « destra » di Γ . A Γ viene dato l'orientamento antiorario.

TEOREMA 2. *Valgano su A le ipotesi fatte sopra e sia $u_0 \in D(A)$. Allora la funzione*

$$u(z) = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} \exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3] u_0 dt, \quad \alpha = \int_{\Gamma} \exp[-t^3/3] dt \neq 0,$$

è soluzione « stretta » del problema (3) nel senso che è definita e continua su $[0, +\infty[$, a valori in X , dotata di derivate forti prima e seconda continue su $]0, +\infty[$, $u(z) \in D(A)$, $z > 0$, e soddisfa (3).

DIMOSTRAZIONE. In forza della scelta di Γ , per ogni $t \in \Gamma$, $|t|$ sufficientemente grande, riesce $|\arg t^3| < \pi/2$ e quindi $\operatorname{Re} t^3 > 0$; poichè, poi, la norma di $\exp[tA^{\frac{1}{2}}]$ è uniformemente limitata su Γ , l'integrale risulta convergente, addirittura anche per $z = 0$.

In effetti, dalla sommabilità di $\exp[-t^3/3]$ e dalla

$$\|\exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3]\|_{X \rightarrow X} \leq C |\exp[-t^3/3]|, \quad \forall t \in \Gamma, \quad \forall z \geq 0,$$

si ha che $\lim_{z \rightarrow 0+} u(z) = u(0) = u_0$.

Poichè $u_0 \in D(A)$ e $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x$ per ogni $x \in D(A)$, $0 < \alpha, \beta$, $\alpha + \beta \leq 1$,

$$u''(z) = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} t^2 A^{\frac{1}{2}} \exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3] u_0 dt = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} t^2 \exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3] A^{\frac{1}{2}} u_0 dt.$$

Di qui, integrando per parti, in base alla limitatezza del semi-gruppo, otteniamo

$$u''(z) = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} \exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3] z A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} u_0) dt = z A u(z), \quad z > 0.$$

La prova dell'affermazione è così terminata.

OSSERVAZIONE. Mostriamo che, nelle ipotesi del Teorema 2, $u(z)$ è derivabile due volte anche nell'origine e soddisfa ivi la equazione. Notiamo che da

$$u'(z) = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} t A^{\frac{1}{2}} \exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3] u_0 dt = \alpha^{-1} \int_{\Gamma} t \exp[ztA^{\frac{1}{2}} - t^3/3] A^{\frac{1}{2}} u_0 dt$$

segue

$$u'(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} \alpha^{-1} \left(\int_R t \exp \left[-\frac{t^3}{3} \right] dt \right) A^{\frac{1}{3}} u_0 = \beta A^{\frac{1}{3}} u_0 .$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} z^{-1}[u(z) - u(0)] - \alpha^{-1} \left(\int_R t \exp \left[-\frac{t^3}{3} \right] dt \right) A^{\frac{1}{3}} u_0 &= \\ &= \alpha^{-1} \int_R \frac{\exp[-t^3/3]}{z} [\exp[ztA^{\frac{1}{3}}] u_0 - u_0 - tzA^{\frac{1}{3}} u_0] dt \end{aligned}$$

e quindi, se $z \in]0, 1[$, ad esempio,

$$\begin{aligned} \left\| z^{-1}[u(z) - u(0)] - \alpha^{-1} \int_R t \exp \left[-\frac{t^3}{3} \right] A^{\frac{1}{3}} u_0 dt \right\| &\leq \\ &\leq |\alpha^{-1}| \int_R \frac{|\exp[-t^3/3]|}{|z|} \|\exp[ztA^{\frac{1}{3}}] u_0 - u_0 - tzA^{\frac{1}{3}} u_0\| |dt| . \end{aligned}$$

Ora, (cfr. [6], pp. 235-236, p. 721), vale

$$\begin{aligned} \|\exp[z + A^{\frac{1}{3}}] u_0 - u_0 - tzA^{\frac{1}{3}} u_0\| &\leq \sup_{\xi \in]0, 1[} \left\| \frac{\partial}{\partial \xi} \exp[\xi t A^{\frac{1}{3}}] u_0 - t A^{\frac{1}{3}} u_0 \right\| \cdot z = \\ &= \sup_{\xi \in]0, 1[} \|\exp[\xi t A^{\frac{1}{3}}] t A^{\frac{1}{3}} u_0 - t A^{\frac{1}{3}} u_0\| \cdot z \leq C|t| \|A^{\frac{1}{3}} u_0\| \cdot z . \end{aligned}$$

Di qui segue la derivabilità di $u(z)$ in $z=0$ sulla base del Teorema della convergenza dominata. Inoltre, $u'(0) = \beta A^{\frac{1}{3}} u_0$.

Poi, dalle $u''(z) = z \left(\alpha^{-1} \int_R \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3] A u_0 dt \right)$ e

$$\left\| \int_R \exp[ztA^{\frac{1}{3}} - t^3/3] A u_0 dt \right\| \leq C' \|A u_0\| ,$$

deduciamo che $\lim_{z \rightarrow 0^+} u''(z) = 0$.

Facendo appello al ragionamento usato sopra, deduciamo che $u(z)$ ha derivata seconda continua su $[0, +\infty[$, con $u''(0) = 0$.

D'altro canto

$$\frac{u''(z)}{z} \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} Au_0.$$

Ciò implica che $Au(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} Au_0$ e pertanto, $zAu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 0$.

L'affermazione è provata.

TEOREMA 3. *Sia A un operatore di tipo (ω, M) con $\omega < \pi/2$ (cioè, $-A$ è generatore infinitesimale di un semigruppoo olomorfo limitato). Se $u_0 \in D(A)$ e $\gamma = \exp[i\frac{2}{3}\pi]$, allora la $u(z)$, $z \geq 0$, data da*

$$u(z) = \gamma \int_0^\infty \exp[\gamma t A^{\frac{1}{3}} z - t^3/3] x_0 dt - \gamma^2 \int_0^\infty \exp[\gamma^2 t A^{\frac{1}{3}} z - t^3/3] x_0 dt,$$

dove $x_0 = (\gamma(1 - \gamma)\alpha)^{-1}u_0$, è soluzione stretta del problema (3).

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che se $\omega < \pi/2$ allora $\pi/3 < \pi/2 - \omega/3$ e quindi $\exp[tA^{\frac{1}{3}}]$ è definito anche su $\arg t = \pm \frac{2}{3}\pi$, $\operatorname{Re} t \leq 0$.

La formula precedente ha quindi senso e si potrebbe mostrare, per la olomorfia della funzione considerata, che tale espressione coincide con quella data nel Teorema 2; d'altra parte, un calcolo diretto prova la nostra affermazione.

TEOREMA 4. *Se A è un operatore di tipo (ω, M) ed è invertibile, allora la soluzione del problema (3) soddisfa anche*

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} u(z) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi segue che si può assumere che riesca $\|(\lambda + A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq M_\varepsilon(1 + |\lambda|)^{-1}$, $|\arg \lambda| < \pi - \omega - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, e che una valutazione analoga è vera anche per $A^{\frac{1}{3}}$. Ciò implica

$$\|\exp[-\tau A^{\frac{1}{3}}]\|_{X \rightarrow X} \leq C \exp[-\delta \operatorname{Re} \tau], \quad \operatorname{Re} \tau \geq 0,$$

$$|\arg \tau| < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi - \omega}{3} - \varepsilon,$$

$\delta > 0$, conveniente (cfr. [5], p. 105). Poichè inoltre

$$\|\exp[ztA^\dagger - t^3/3]\|_{X \rightarrow X} \leq M \exp[-\delta z \operatorname{Re} t] \exp[-t^3/3] \leq M_1 \exp[-\delta_1 z] \exp[-t^3/3], \quad t \in \Gamma,$$

riesce

$$\|u(z)\| \leq M_1 \exp[-\delta_1 z] \int_{\Gamma} \left| \exp\left[-\frac{t^3}{3}\right] \right| \|\alpha^{-1}u_0\| dt \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

APPLICAZIONE 2. Sia A l'operatore $-d^2/dx^2$ definito in uno degli spazi $UCB(R)$, $L^p(R)$, $1 \leq p < +\infty$; cioè, in riferimento ai Teoremi precedenti, $X = UCB(R)$ oppure $X = L^p(R)$.

Se D_A è opportunamente definito, (cfr. [4]), A è di tipo $(0, 1)$.

Allora in base al Teorema 2, esiste una funzione $u = u(z, x)$, definita su $[0, +\infty[\times R$, soddisfacente (4) nella topologia di X .

Notiamo che

$$\frac{\partial u(0, \cdot)}{\partial z} = \beta A^\dagger u_0.$$

D'altra parte, se $u_0 \in X$, $u'_0 \in AC_{\text{loc}}(R) \cap X$, $u''_0 \in X$, $A^\dagger u_0 = u_1 \in X$, $u'_1, u''_1 \in AC_{\text{loc}}(R) \cap X$, $u^{(3)}_1 \in X$, sappiamo (cfr. la Applicazione 1), che il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 u(z, x)}{\partial x^2} = 0, & z \leq 0, x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), & \frac{\partial u(0, x)}{\partial z} = \beta A^\dagger u_0(x), & x \in R, \end{cases}$$

ha una soluzione « stretta ». Sotto queste condizioni su u_0 , la $u(z, x)$ così prolungata a $] -\infty, 0] \times R$, è una soluzione dell'equazione di Tricomi che assume il dato valore $u_0(x)$ sulla linea parabolica $z = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. L. BUTZER - H. BERENS, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, ed. Springer (1967).
- [2] J. A. DONALDSON, *An operational calculus for a class of abstract operator equations*, J. Math. Anal. and Appl., **37** (1972), pp. 167-184.

- [3] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations*, ed. Holt, Rinehart and Winston (1969).
- [4] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, ed. Springer (1966).
- [5] T. KATO, *Fractional powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), pp. 246-274.
- [6] L. SCHWARTZ, *Analyse mathématique*, tome 1, ed. Hermann (1967).
- [7] F. G. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, ed. Cremonese (1957).

Pervenuto in Redazione il 2 gennaio 1975.