

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO BIROLI

**Sur un'inéquation parabolique dans un
ouvert non cylindrique**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 53 (1975), p. 21-35

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__21_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur un'inéquation parabolique dans un ouvert non cylindrique.

MARCO BIROLI (*)

1. Introduction et énoncés.

Considérons l'espace Euclidien $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et soit $\hat{\Omega}$ un ouvert de $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t$ avec $\text{mes}(\hat{\Omega}) > 0$.

Nous indiquons par $\hat{F}$ la frontière de $\hat{\Omega}$, et nous supposons que $\hat{F}$ soit une variété de dimension n indéfiniment différentiable par morceaux, $\hat{\Omega}$ étant d'une seule coté de $\hat{F}$. Nous indiquons par $\Omega(s)$ l'ensemble $\hat{\Omega} \cap \{t = s\} \subset \mathbf{R}_x^n$, $s > 0$, et par $\Omega(0)$ l'ensemble $\text{Int}(\hat{F} \cap \{t = 0\})$ et nous supposons que les ensembles $\Omega(s)$ soient des ouverts bornés non vides de $\mathbf{R}_x^n$ pour $s \geq 0$ et posons $\Gamma(s) = \partial\Omega(s)$.

Nous dirons, suivant J. L. Lions [4], que l'ouvert $\hat{\Omega}$ vérifie l'hypothèse (R) lorsque les propriétés suivantes ont lieu:

- (a) On suppose que $\hat{\Omega}$ est contenu dans le demi-espace $t > 0$.
- (b) Il y a une suite localement finie O_i d'ensembles ouverts ou fermés de $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t$ telle que
 - (1) les O_i recouvrent un voisinage de $\hat{F} - \Omega(0)$
 - (2) Chaque O_i est contenu dans une bande $\alpha_i < t < \beta_i$ (ou $\alpha_i \leq t \leq \beta_i$) avec $\alpha_i \geq 0$
 - (3) Soit $Q(\alpha_i, \beta_i)$ l'ensemble de $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\tau$ $\{(\xi, \tau) | -1 < \xi_i < 1, \alpha_i < \tau < \beta_i\}$; il y a un homeomorphisme

$$h_i(x, t) = (\xi_1(x, t), \dots, \xi_n(x, t), \tau(x, t))$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

avec

$$\tau(x, t) = t$$

de $\bar{O}_i$ sur $\overline{Q(\alpha_i, \beta_i)}$ et tel que $\Omega \cap O_i$ est appliqué biunivoquement sur la partie « $\xi > 0$ » et que $\hat{F} - \Omega(0)$ est appliqué biunivoquement sur $\overline{Q(\alpha_i, \beta_i)} \cap \{\xi_n = 0\}$.

Soit $0 < T < +\infty$, $Q = \hat{\Omega} \cap \{(x, t) | 0 < t < T\}$, $\Sigma = (\hat{F} - \Omega(0)) \cap \{(x, t) | 0 < t < T\}$.

Indiquons

$$\mathcal{V} = \left\{ v(x, t) | v(x, t) \in \mathcal{L}^2(Q), \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) \in \mathcal{L}^2(Q), \right. \\ \left. i = 1, \dots, n, v(x, t) = 0 \text{ sur } \Sigma \right\},$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}^2(Q).$$

Indiquons par $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{K}$, identifions $\mathcal{V}$ avec un sous espace dense de $\mathcal{K}$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $\mathcal{V}$ et son dual $\mathcal{V}^*$.

Indiquons par $\psi_i(x, t)$, $i = 1, 2$, deux fonctions de $\mathcal{L}^2(0, T; H^2(\Omega(t)))$ avec $(\partial \psi_i / \partial t)(x, t) \in \mathcal{L}^2(Q)$, $i = 1, 2$, $\psi_1(x, t) \leq 0 \leq \psi_2(x, t)$ p.p. sur Σ et $\psi_1(x, t) < \psi_2(x, t)$ p.p. sur Q . Posons

$$\mathcal{K}_1 = \{v \in \mathcal{K} | v(x, t) \geq \psi_1(x, t) \text{ p.p. sur } Q\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{v \in \mathcal{K} | v(x, t) \leq \psi_2(x, t) \text{ p.p. sur } Q\},$$

$$\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2.$$

Soit enfin $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un graphe maximal monotone de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta(0)$ et $\varphi(t): \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ la fonction convexe propre s.c.i., telle que $\partial \varphi = \beta$, $\varphi(0) = 0$.

Considérons, pour $i = 1, 2, 3$, le problème

$$(1.1)_i \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g - f, v - u \right) \geq 0, \\ g(x, t) \in \beta(u(x, t)) \quad \text{p.p. sur } Q, \\ \forall v \in \mathcal{K}_i, \\ u \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{V}, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega(0) \end{cases}$$

et sa formulation faible

$$(1.2_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u - f, v - u \right\rangle + \int_Q \varphi(v(x, t)) \, dx \, dt \\ - \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt \geq -\frac{1}{2} \|v(\cdot, 0) - u_0\|_{L^2(\Omega(0))}^2, \\ \forall v \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{V} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathcal{K}, \quad \varphi(v(x, t)) \in L^1(Q), \\ u \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{V}. \end{array} \right.$$

Nous obtenons les résultats suivants:

TH. 1. — Supposons que $\hat{\Omega}$ satisfait à la condition (R), $f \in \mathcal{K}$, $u_0 \in H_0^1(\Omega(0))$, $\psi_1(x, 0) \leq u_0(x)$ ($u_0(x) \leq \psi_2(x, 0)$, $\psi_1(x, 0) \leq u_0(x) \leq \psi_2(x, 0)$) p.p. dans $\Omega(0)$, $\varphi(u_0(x)) \in L^1(\Omega(0))$ et $\exists g_i(x, t) \in L^2(Q)$ avec $g_i(x, t) \in \beta(\psi_i(x, t))$ p.p. dans Q , $i = 1, 2$; le problème $(1, 1_i)[(1, 1_2), (1, 1_3)]$ a alors une unique solution $u(x, t)$ avec $\partial u / \partial t \in \mathcal{K}$, $\Delta u \in \mathcal{K}$.

TH. 2. — Soit $\hat{\Omega}$, $\psi_i(x, t)$, $i = 1, 2$, comme au Th. 1, $f \in \mathcal{V}^*$, $u_0(x) \in L^2(\Omega(0))$ avec $\psi_1(x, 0) \leq u_0(x)$ ($u_0(x) \leq \psi_2(x, 0)$, $\psi_1(x, 0) \leq u_0(x) \leq \psi_2(x, 0)$) p.p. dans $\Omega(0)$ avec $u_0(x) \in D(\varphi)$ p.p. dans $\Omega(0)$; le problème $(1, 2_i)[(1, 2_2)(1, 2_3)]$ a alors une solution unique.

REMARQUE 1. — Le sens de la relation $u(x, 0) = u_0(x)$ dans $(1, 1_i)$ est donné par le Th. 3 § 2.

REMARQUE 2. — L'équation correspondante au problème (1.1_i) a été traitée par H. Fujita [3], par une méthode très différente de la nôtre; cet Auteur obtient pour l'équation en question un résultat analogue au Th. 1. Le problème (1.1_i) a été traité dans le cas où $\hat{\Omega}$ est un ouvert cylindrique par H. Brézis [2], J. C. Peralba [6] et l'A. [1].

Dans le § 2 on donne des lemmes et des résultats préliminaires, dans le § 3 on démontre le Th. 1 et dans le § 4 on démontre le Th. 2.

2. Résultats et lemmes préliminaires.

Dans tout ce paragraphe nous supposons que $\hat{\Omega}$ satisfait à la condition (R).

Indiquons par $B(Q)$ l'espace des $v \in \mathcal{V}$ avec $\partial v / \partial t \in \mathcal{V}^*$, muni de

la norme.

$$\|v\|_{(B(Q))} = \left\{ \|v\|_{\mathfrak{U}}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathfrak{U}^*}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Rappelons certains résultats que nous utiliserons dans la suite:

TH. 3. — Fixons $0 \leq s \leq T$; il existe un'application linéaire continue et une seule

$$u \rightarrow u(\cdot, s)$$

de $B(Q)$ dans $\mathfrak{L}^2(\Omega(s))$, telle que $u(\cdot, s)$ coïncide p.p. avec la restriction de u à $\Omega(s)$, lorsque u est continue sur $\bar{Q}$ (J. L. Lions [4] pg. 159)

TH. 4. — Soient $u, v \in B(Q)$; on a.

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, u \right\rangle = (v(\cdot, T), u(\cdot, T))_{\mathfrak{L}^2(\Omega(T))} - (v(\cdot, 0), u(\cdot, 0))_{\mathfrak{L}^2(\Omega(0))}.$$

(J. L. Lions pg. 161 [4])

LEMME 1. — Considérons $u \in B(Q)$ avec $u(x, 0) \in \mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$; on a, $\forall \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle &\leq \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{\mathcal{K}} \left\| \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{K}}, \\ \left(\left\langle -\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{(u - \psi_2)^+}{\lambda} \right\rangle \right) &\leq \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\|_{\mathcal{K}} \left\| \frac{(u - \psi_2)^+}{\lambda} \right\|_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Observons que de [4] prop. 4.1. pg. 158 il suffit de démontrer le résultat dans le cas $\partial u / \partial t \in \mathcal{K}$. Si $\partial u / \partial t \in \mathcal{K}$, on a $u \in H^1(Q)$; donc, de [7] pg. 17, on a

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} (u - \psi_1), \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial t} (u - \psi_1)^-, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right).$$

Étant $(u - \psi_1)^- \in \mathfrak{U}$ et $(\partial / \partial t)(u - \psi_1)^- \in \mathcal{K}$, on a, du Th. 4,

$$\begin{aligned} (2.2) \quad &\left(\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - u), \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \|(u(x, 0) - \psi_1(x, 0))^- \|_{\mathcal{K}}^2 = \frac{1}{\lambda} \|(u(x, T) - \psi_1(x, T))^- \|_{\mathcal{K}}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

dont

$$(2.3) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right) \leq \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right) \leq \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \frac{u - \psi_1^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}}.$$

LEMME 2. — Soit $u \in \mathcal{V}$; on a, $\forall \lambda > 0$,

$$(2.4) \quad \left\langle -\Delta u, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle \leq \|\Delta \psi_1\|_{\mathcal{H}} \left\| \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}},$$

$$(2.5) \quad \left\langle \Delta u, \frac{(u - \psi_2)^+}{\lambda} \right\rangle \leq \|\Delta \psi_2\|_{\mathcal{H}} \left\| \frac{(u - \psi_2)^+}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}}.$$

On a, [7] pg. 17,

$$\left\langle -\Delta(u - \psi_1), \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle = \left\langle \Delta(u - \psi_1)^-, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle \leq 0$$

dont

$$\left\langle -\Delta u, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle \leq \left\langle -\Delta \psi_1, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle \leq \|\Delta \psi_1\|_{\mathcal{H}} \left\| \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}}.$$

On a ainsi démontrée (2.4); analoguement on peut aussi démontrer (2.5).

Indiquons maintenant par β_λ la régularisée de Yoshida de β_λ et par φ_λ la fonction convexe s.c.i., telle que $(d/d\tau)\varphi_\lambda(\tau) = \beta_\lambda(\tau)$.

Nous observons qu'on a $\varphi_\lambda(0) = \beta_\lambda(0) = 0$.

LEMME 3. — Soit $u \in \mathcal{V}$ avec $\partial u / \partial t \in \mathcal{H}$; on a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \beta_\lambda(u) \right) = \int_{\Omega(T)} \varphi_\lambda(u(x, T)) dx - \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u(x, 0)) dx.$$

Nous observons que de [4] prop. 4.1. pg. 158 il suffit démontrer le résultat pour $u \in D(Q)$ avec $u = 0$ dans un voisinage de Σ .

Supposons que $\text{Supp}(u)$ ait une distance $> \delta > 0$ de Σ .

Indiquons maintenant par $X_{\delta'}$ l'ensemble des points de Q qui ont distance $\geq 2\delta'$ de Σ ($\delta' > 0$) et par $\chi_{\delta'}$ la fonction caractéristique de $X_{\delta'}$.

Soit ϱ une fonction de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ non negative avec

$$\varrho(y) = 0 \quad \text{si} \quad |y| \geq 1,$$

$$\int \varrho(y) dy = 1.$$

Posons

$$\varrho_{\delta'}(y) = (\delta')^{-(n+1)} \varrho\left(\frac{y}{\delta'}\right)$$

et

$$\theta_{\delta'}(y) = \chi_{\delta'}(y) * \varrho_{\delta'}(y)$$

Observons qu'on a, pour $\delta' < \delta/4$,

$$\begin{aligned} (2.6) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \beta_\lambda(u) \right) &= \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\lambda(u(x, t)) dx dt = \\ &= \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\lambda(u(x, t)) \theta_{\delta'}(x, t) dx dt = - \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \theta_{\delta'}(x, t) \varphi_\lambda(u(x, t)) dx dt + \\ &\quad + \int_{\Omega(T)} \varphi_\lambda(u(x, T)) \theta_{\delta'}(x, T) dx - \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u(x, 0)) \theta_{\delta'}(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Nous observons maintenant que sur $\text{Supp}(u)$ on a, pour δ' grande, $(\partial/\partial t) \theta_{\delta'}(x, t) = 0$ $\theta_{\delta'}(x, t) = 1$; dont de (2.6)

$$(2.7) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \beta_\lambda(u) \right) = \int_{\Omega(T)} \varphi_\lambda(u(x, T)) dx - \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u(x, 0)) dx.$$

LEMME 4. — Soit $u \in \mathfrak{H}$; on a

$$(2.8) \quad \left(\beta_\lambda(u), \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right) \leq \|\beta_\lambda(\psi_1)\|_{\mathfrak{H}} \left\| \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathfrak{H}},$$

$$(2.9) \quad \left(-\beta_\lambda(u), \frac{(u - \psi_2)^+}{\lambda} \right) \leq \|\beta_\lambda(\psi_2)\|_{\mathfrak{H}} \left\| \frac{(u - \psi_2)^+}{\lambda} \right\|_{\mathfrak{H}}.$$

On a

$$(2.10) \quad \left(\beta_\lambda(u) - \beta_\lambda(\psi_1), \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right) \leq 0$$

dont le résultat; on peut démontrer analogiquement (2.9).

On a aussi facilement

LEMME 5. — Soit $u \in \mathcal{V}$; on a

$$\langle -\Delta u, \beta_\lambda(u) \rangle \geq 0.$$

LEMME 6. — Soit $u \in B(Q)$; l'équation

$$(2.11) \quad u = u_\varepsilon - \varepsilon \Delta u_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

a une solution $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$ avec $\partial u_\varepsilon / \partial t \in \mathcal{V}$ et on a:

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, -\Delta u_\varepsilon \right) = \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(T, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega(T))}^2 - \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(0, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega(0))}^2.$$

Il est évident que (2.11) a une solution $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$, donc on a $-\Delta u_\varepsilon \in \mathcal{V}$.

Nous observons que de [4] prop. 4.1. pag. 158 il suffit de démontrer le résultat dans le cas où $u \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ et $\text{Supp}(u)$ a une distance $> 2\delta > 0$ de Σ .

Indiquons par X_δ l'ensemble des points de Q qui ont une distance $< \delta$ de Σ .

On peut définir de façon analogue à $\mathcal{V}$ un espace $\mathcal{V}_\delta$

$$\mathcal{V}_\delta = \left\{ v(x, t) \mid v(x, t) \in \mathcal{L}^2(X_\delta), \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) \in \mathcal{L}^2(X_\delta), \right. \\ \left. i = 1, \dots, n; v(x, t) = 0 \text{ sur } \Sigma_\delta \text{ p.p.} \right\}$$

où $\Sigma_\delta = \partial X_\delta - \{\partial X_\delta \cap (\Omega(0) \cup \Omega(T))\}$.

Considérons l'équations.

$$(2.12) \quad u = u_\varepsilon - \varepsilon \Delta u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\delta$$

Le problème (2.12) a une solution u_ε .

Indiquons encore par u_ε la prolongée de u_ε à Q par 0; on a alors $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$ et que u_ε est solution de (2.11).

Considérons maintenant une union C de cylindres C_i , $i = 1, \dots, m$, du type

$$C_i = [t_i, t_{i+2}] \times \omega_i.$$

Supposons que

$$X_\delta \subset C \subset Q.$$

et que $X_\delta + B_{\delta/4} \subset C$ et $C + B_{\delta/4} \subset Q$ où $B_{\delta/4}$ est la bulle de $\mathbb{R}^{n+1}$ de centre 0 et rayon $\delta/4$.

On a

$$u = u_\varepsilon - c \Delta u_\varepsilon \quad \text{p.p. dans } C_i$$

$i = 1, \dots, m$; donc on a $\partial u_\varepsilon / \partial t \in \mathcal{L}^2(t_i, t_{i+1}; H_0^1(\omega_i))$

Nous observons aussi que $\partial u_\varepsilon / \partial t$ est nulle dans un voisinage de $\partial C - (\omega_1 \cup \omega_m)$, dont on a que la prolongée de $\partial u_\varepsilon / \partial t$ à Q par 0 est encore la dérivée dans le temps de u_ε ; on a alors $\partial u_\varepsilon / \partial t \in \mathcal{V}$.

Du Th. 4 on a alors

$$\int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t)(-\Delta u_\varepsilon(x, t)) dx dt = \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(x, T)\|_{H_0^1(\Omega(T))}^2 - \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{H_0^1(\Omega(0))}^2.$$

Le résultat est ainsi démontré.

REMARQUE 1. – Le lemme 6 peut aussi être démontré par une méthode de réduction à un ouvert cylindrique par homéomorphisme, cfr. [3].

Passons enfin aux derniers résultats que nous avons à rappeler.

LEMME 7. – Soit $\mathcal{L}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ un opérateur linéaire maximal monotone, $\mathcal{A}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ un opérateur monotone borné, hemicontinu, coercif et $f \in \mathcal{V}^*$; le problème

$$\mathcal{L}u + \mathcal{A}u = f$$

a alors une unique solution (R. CARROL, *Abstract methods in partial differential equations*, Haper's series in Modern Mathematics, 1969).

LEMME 8. – Considérons l'opérateur $\mathcal{L}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ u \mid u \in \mathcal{V}, \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{V}^*, u(0, x) = 0 \right\}.$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est maximal monotone ([5] pg. 344).

3. Démonstration du Th. 1.

Nous démontrons le résultat dans le cas $i = 1$, la démonstration dans les autres cas étant analogue. Considérons le problème

$$(3.1_\lambda) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta_\lambda u - \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} = f & \text{dans } \mathcal{U}^*, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{p.p. sur } \Omega(0), \quad u \in B(Q). \end{cases}$$

Des lemmes 7, 8 on a que (3.1_λ) a une solution u_λ :

De (3.1_λ) on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left(f, -\frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right) + \left(\beta_\lambda u_\lambda, \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right) + \\ &+ \left(-\Delta u_\lambda, \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right) + \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right) \leq \\ &\leq \left\| \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \left(\|f\|_{\mathcal{H}} + \|\beta_\lambda(\psi_1)\|_{\mathcal{H}} + \|\Delta \psi_1\|_{\mathcal{H}} + \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{\mathcal{H}} \right) \leq \\ &\leq C_1 \left\| \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

dont

$$(3.2) \quad \left\| \frac{(u_\lambda - \psi_1)^-}{\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \leq C_1.$$

De (3.1_λ) on a aussi

$$\begin{aligned} \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq (f, \beta_\lambda u_\lambda) + \langle \Delta u_\lambda, \beta_\lambda u_\lambda \rangle - \left\langle \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, \beta_\lambda u_\lambda \right\rangle + \\ &+ \left\langle \beta_\lambda u_\lambda, \frac{(u - \psi_1)^-}{\lambda} \right\rangle \leq \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}} (\|f\|_{\mathcal{H}} + C_1) + \int_{\Omega(0)} \varphi_\lambda(u_0(x)) \, dx \leq \\ &\leq \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \cdot (\|f\|_{\mathcal{H}} + C_1) + C_2 \end{aligned}$$

dont on a

$$(3.3) \quad \|\beta_\lambda u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \leq C_3$$

Posons maintenant

$$u_\lambda = u_{\varepsilon\lambda} - \varepsilon \Delta u_{\varepsilon\lambda}, \quad u_{\varepsilon,\lambda} \in \mathcal{V}$$

Nous observons que de (3.1_λ) on a, pour $v \in B(Q)$

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, v - u_\lambda \right\rangle - \langle \Delta u_\lambda, v - u_\lambda \rangle \right| &= \\ &= \left| \left\langle -\beta_\lambda u_\lambda + \frac{(u - \varphi_1)^-}{\lambda} + f, v - u_\lambda \right\rangle \right| \leq C_4 \|v - u_\lambda\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Posons maintenant $v = u_{\varepsilon\lambda}$; on a

$$\left| \left\langle \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}, u_{\varepsilon\lambda} - u_\lambda \right\rangle - \varepsilon \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}^2 \right| \leq \varepsilon \cdot C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}$$

dont

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left\langle \frac{\partial u_{\varepsilon\lambda}}{\partial t}, u_{\varepsilon\lambda} - u_\lambda \right\rangle + \frac{\|u_0 - u_{\varepsilon\lambda}(0)\|_{\Omega(0)}^2}{2} + \varepsilon C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \left\langle \frac{\partial u_{\varepsilon\lambda}}{\partial t}, \varepsilon \Delta u_{\varepsilon\lambda} \right\rangle + \frac{\|u_0 - u_{\varepsilon\lambda}(0)\|_{\tilde{\mathcal{L}}^2(\Omega(0))}^2}{2} + \varepsilon \cdot C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

dont

$$(3.4) \quad \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon\lambda}(0)\|_{H_0^1(\Omega(0))}^2 + \frac{\|u_0 - u_{\varepsilon\lambda}(0)\|_{\tilde{\mathcal{L}}^2(\Omega(0))}^2}{\varepsilon} + C_4 \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}}.$$

De (3.4), étant $u_0 \in H_0^1(\Omega(0))$, on a

$$(3.5) \quad \|\Delta u_{\varepsilon\lambda}\|_{\mathcal{H}} \leq C_5$$

dont on a

$$(3.6) \quad \|\Delta u_\lambda\|_{\mathcal{H}} \leq C_5.$$

De (3.2), (3.3), (3.6) on a alors aussi

$$(3.7) \quad \left\| \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} \right\|_{\mathcal{H}} \leq C_6.$$

De (3.6) et (3.7) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(3.8) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0}^* \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans } \mathcal{K},$$

$$(3.9) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0}^* \Delta u_\lambda = \Delta u \quad \text{dans } \mathcal{K}.$$

De (3.3) on peut aussi supposer, sans perdre de généralité,

$$(3.10) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0}^* \beta_\lambda(u_\lambda) = g \quad \text{dans } \mathcal{K}.$$

Indiquons par J_λ la resolvante de β ; de (3.3), on a

$$(3.11) \quad \|J_\lambda u_\lambda - u_\lambda\|_{\mathcal{K}} \leq \lambda C_3$$

de (3.8) (3.9) on a aussi

$$(3.12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda = u \quad \text{dans } \mathcal{K}.$$

De (3.10), (3.11), (3.12), étant $\beta_\lambda u_\lambda \in \beta(J_\lambda u_\lambda)$, on a

$$(3.13) \quad g(x, t) \in \beta(u(x, t)) \quad \text{p.p dans } Q.$$

Soit maintenant $v \in \mathcal{K}_1$; de (3.1₁) on a

$$\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \Delta u_\lambda + \beta_\lambda u_\lambda - f, v - u_\lambda \right) \geq 0.$$

De (3.8), (3.9), (3.10) on a

$$(3.14) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g - f, v - u \right) \geq 0.$$

La partie du résultat qui concerne l'existence est ainsi démontrée.

Passons maintenant à la partie, que concerne l'unicité. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (1.1_i), $i = 1, 2, 3$.

On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 + g_1 - f, u_2 - u_1 \right) &\geq 0, \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 + g_2 - f, u_2 - u_1 \right) &\geq 0. \end{aligned}$$

dont

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathfrak{U}}^2 \leq - \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2), u_1 - u_2 \right) \leq 0$$

dont $u_1 = u_2$.

Le résultat est ainsi démontré.

4. Démonstration du Th. 2.

Nous démontrons le Th. 2 dans le cas $i = 1$, étant la démonstration dans les autres cas analogue.

Soit u une solution du problème (1.2₁) et $\{u_{0n}(x)\}$ une suite telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{0n}(x) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathfrak{L}^2(\Omega(0)),$$

$u_{0n}(x) \geq \psi_1(x, 0)$ p.p dans $\Omega(0)$

$$u_{0n}(x) \in H_0^1(\Omega(0)), \quad \varphi(u_{0n}(x)) \in \mathfrak{L}^1(\Omega(0)).$$

Considérons le problème,

$$(4.1_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f_n, v - u \right) + \int_Q \varphi(v(x, t)) \, dx \, dt - \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt \geq 0, \\ \forall v \in \mathfrak{K}_1, \quad \varphi(v(x, t)) \in \mathfrak{L}^1(Q), \\ u \in \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{U}, \quad \varphi(u(x, t)) \in \mathfrak{L}^1(Q), \\ u(x, 0) = u_{0n}(x), \end{array} \right.$$

où $\{f_n\}$ est une suite, telle que

$$f_n \in \mathfrak{K}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{dans } \mathfrak{U}^*.$$

Pour le Th. 1 le problème (4.1_n) a une solution unique u_n ; pour démontrer l'unicité de la solution u du problème (1.2₁) il suffira de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

(pour la suite $\{u_n\}$, *sans* extraction de soussuites).

De (1.1₁) (1.2₁) on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n - f_n, u - u_n \right\rangle + \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt - \int_Q \varphi(u_n(x, t)) \, dx \, dt &\geq 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u - f, u_n - u \right\rangle + \int_Q \varphi(u_n(x, t)) \, dx \, dt - \\ - \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt &\geq -\frac{1}{2} \|u_n(\cdot, 0) - u_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega(0))}^2 \end{aligned}$$

dont

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{V}^*} \|u_n - u\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \|u_{0n} - u_0\|_{L^2(\Omega(0))}^2$$

dont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{dans } \mathcal{V}.$$

Le résultat est ainsi démontré; passons maintenant à la partie concernant l'existence.

Considérons une suite $\{u_{0n}(x)\}$ dans $H_0^1(\Omega(0))$ avec

$$\lim_{n \rightarrow 0} u_{0n}(x) = u_0(x) \quad \text{dans } L^2(\Omega(0)),$$

$$u_{0n}(x) \geq \psi_1(x, 0) \quad \text{p.p. dans } \Omega(0),$$

$$\varphi(u_{0n}(x)) \in L^1(\Omega(0))$$

et soit $\{f_n\}$ une suite dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow 0} f_n = f \quad \text{dans } \mathcal{V}^*.$$

Considérons le problème

$$(4.2_n) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f_n, v - u \right) + \int_Q \varphi(v(x, t)) \, dx \, dt - \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt \geq 0, \\ \forall v \in \mathcal{K}_1, \quad \varphi((x, t)) \in \mathcal{L}^1(Q), \\ u \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{V}, \quad \varphi(u(x, t)) \in \mathcal{L}^1(Q), \\ u(x, 0) = u_{0n}(x). \end{array} \right.$$

On a, du Th. 1, que (4.2_n) a une solution u_n .

De (4.2_n) on a aussi

$$\|u_n - u_m\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{V}^*} \|u_n - u_m\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \|u_{0n} - u_0\|_{\mathcal{L}^2(\Omega(0))},$$

dont on a

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{dans } \mathcal{V}.$$

De (4.2_n) on a aussi, si $\partial v / \partial t \in \mathcal{H}$ et $\Delta v \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \int_Q \varphi(u_n(x, t)) \, dx \, dt &\leq \frac{1}{2} \|v(\cdot, 0) - u_0\|_{\mathcal{L}^2(\Omega(0))}^2 + \\ &\quad + \int_Q (\varphi(v(x, t)) \, dx \, dt + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v, v - u_n \right)) \end{aligned}$$

dont, en posant $v(x, t) = \psi_1(x, t)$, on a

$$(4.4) \quad \int_Q \varphi(u_n(x, t)) \, dx \, dt \leq C_1$$

De (4.4) on a

$$(4.5) \quad \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_Q \varphi(u_n(x, t)) \, dx \, dt \leq C_1.$$

Considérons alors $v \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{V}$ avec $\varphi(v(x, t)) \in \mathcal{L}^1(Q)$, $\partial v / \partial t \in \mathcal{H}$; de

(4.2_n) (4.3) (4.4) on a

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u - f, v - u \right\rangle + \int_Q \varphi(v(x, t)) \, dx \, dt - \\ - \int_Q \varphi(u(x, t)) \, dx \, dt \geq -\frac{1}{2} \|u_0 - v(\cdot, 0)\|_{\tilde{L}^2(\Omega(0))}^2.$$

Nous observons enfin que de (4.3) on a $u \in \mathcal{K}_1$. On a ainsi démontré aussi la partie concernant l'existence du résultat.

REMARQUE 1. — Il est facile aussi démontrer par régularisation une formule de dépendance continue pour le problème (1.2_i).

Soit $(u_{0i}, f_1) [(u_{02}, f_2)]$ un couple de données pour (1.2_i) et $u_1(u_2)$ les solutions correspondantes de (1.2_i).

Nous supposons que $(u_{01}, f_1) [(u_{02}, f_2)]$ satisfont aux hypothèses du Th. 2; on a

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{V}'} \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \|u_{01} - u_{02}\|_{\tilde{L}^2(\Omega(0))}^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BIROLI, *Sur les inéquations d'évolution avec convexe dépendent du temps*, « Ricerche di Matematica » XXIII, 203-222, 1974
- [2] H. BRÉZIS, *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendent du temps*, C. R. Acad. Sc. Paris, A **274** (1972), pp. 310-312.
- [3] H. FUJITA, *The penalty method and some non linear initial value problems*, Symposium on non linear Functional Analysis, Madison, 1971, Academic Press (1971), pp. 635-667.
- [4] J. L. LIONS, *Sur les problèmes mixtes pour certaines systèmes paraboliques, dans des ouverts non cylindriques*, Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), pp. 143-182.
- [5] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [6] J. C. PERALBA, *Un problème d'évolution relatif à un opérateur sousdifférentiel dépendent du temps*, C. R. Acad. Sc. Paris, A **275**, fasc. 2 (1972), pp. 93-95.
- [7] G. STAMPACCHIA, *Equations du second ordre à coefficients discontinus*, Les Presses de l'Université de Montréal (1966).