RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Kommutatorbeziehungen in Ringen der Charakteristik 0 mit Einselement und ihren Einheitengruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 53 (1975), p. 105-115

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1975__53__105_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 53 (1975)

Kommutatorbeziehungen in Ringen der Charakteristik 0 mit Einselement und ihren Einheitengruppen.

WALTER STREB (*)

1. Einleitung.

Sei R ein Ring mit Einselement 1 und G die Gruppe seiner Einheiten. R heißt G-Ring, wenn R *als Ring von* G *erzeugt wird.* R *besitzt endliche Klasse,* wenn es eine Folge A_i, $0 \leqslant i \leqslant n$ von Idealen von R gibt, so daß $A_0 = R$, $A_n = 0$, $A_{i+1} \subseteq A_i$ und $R \circ A_i \subseteq A_{i+1}$ für $0 \leqslant i < n$. Hierbei ist

$$a \circ b := ba - ab \qquad \text{für } a, b \in R,$$

$$A \circ B := \{a \circ b \mid a \in A, b \in B\} \qquad \text{für } A, B \subseteq R.$$

2. Anmerkung.

Üblich ist eigentlich die Notation $a \circ b := ab - ba$. Bei Iterierung alterniert $a \circ b := -(ab - ba)$ gegenüber der üblichen Notation. Dies entlastet die Darstellung der Beweise der Lemmata 1 und 5 wesentlich.

G heißt *stark nilpotent* (bzw. *stark auflösbar*), wenn es eine Folge N_i, $0 \leqslant i \leqslant n$ von Normalteilern von G gibt, so daß $N_0 = G$, $N_n = 1$, $N_{i+1} \subseteq N_i$ und $G \bullet N_i \subseteq N_{i+1}$ (bzw. $N_i \bullet N_i \subseteq N_{i+1}$) für $0 \leqslant i < n$. Hierbei ist

$$g \bullet h := g^{-1}h^{-1}gh \qquad \text{für } g, h \in G,$$

$$A \bullet B := \{a \bullet b \mid a \in A, b \in B\} \qquad \text{für } A, B \subseteq G.$$

(*) Indirizzo dell'A.: D-43 Essen, Henri-Dunant-Str. 65, Universität Essen, Fachbereich 6, BRD.

In [3; Satz 5, S. 320 und Satz 6, S. 324] wurde gezeigt:

(I) Ein G-Ring R ist ein Ring endlicher Klasse genau dann, wenn G stark nilpotent und das *von* $R \circ R$ *erzeugte Ideal* R' von R nilpotent ist.

(II) Ein G-Ring R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn G stark nilpotent und *das von* $R \circ (R \circ R)$ erzeugte Ideal R'' von R nilpotent ist.

Diese Ergebnisse können mit einem neuen Beweisansatz für Ringe R der Charakteristik 0 wesentlich vertieft werden. Hierbei *besitzt ein Ring* R *die Charakteristik* 0, wenn für ganze Zahlen n und $r \in R$ aus $nr = 0$ stets $n = 0$ oder $r = 0$ folgt. Im folgenden sei R *immer stillschweigend* ein Ring der Charakteristik 0 mit Einselement 1 und G seine Einheitengruppe.

Für G-Ringe R gilt:

(III) R ist Ring endlicher Klasse genau dann, wenn R' beschränkt nil und G stark nilpotent ist.

(IV) R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn R'' nil und G stark nilpotent ist.

Ohne die Voraussetzung, G-Ring zu sein, gilt:

(V) R' ist nilpotent genau dann, wenn R' beschränkt nil und G stark auflösbar ist.

(VI) Ist G stark auflösbar, so besitzt R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn R' nil ist.

(VII) Ist G stark auflösbar, erfüllt G die beschränkte Engelbedingung und ist R' nil, so besitzt R' einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring und ist R'' nilpotent.

Die Sätze (III)-(VII) basieren auf den folgenden Aussagen (VIII) und (IX): Mit den Symbolen v und $\square$ bildet man rekursiv die Menge K der *formalen Kommutatoren*:

$$v \in K. \quad \text{Mit } f, g \in K \text{ ist } (f \square g) \in K.$$

Durch die formalen Substitutionen $v \to R$ und $\square \to \circ$ (bzw. $v \to G$ und $\square \to \bullet$) wird jedem Element f von K eine Teilmenge f_R von R (bzw. f_G von G) zugeordnet, wobei die Klammersymbole wie üblich die Reihenfolge der Operationen $\circ$ (bzw. $\bullet$) festlegen.

Wir sagen, *in* R (bzw. G) *gelte die Kommutatorbeziehung* $f = 0$ (bzw. $f = 1$), wenn $f_R = 0$ (bzw. $f_G = 1$) und zeigen:

(VIII) Gilt in G die Kommutatorbeziehung $f = 1$, so gilt in jedem nilen Unterring S von R die Kommutatorbeziehung $f = 0$.

(IX) Gilt in G die n. *Engelbedingung*, so gilt in jedem nilen Unterring S von R die n. Engelbedingung.

Hierbei gilt in G (bzw. R) die n. Engelbedingung, wenn

$$\underbrace{(((g \bullet h) \bullet h) \ldots \bullet h)}_{n\text{-mal}} \bullet h = 1 \quad \text{für alle } g, h \in G$$

$$\Big(\text{bzw. } \underbrace{(((a \circ b) \circ b) \ldots \circ b)}_{n\text{-mal}} \circ b = 0 \quad \text{für alle } a, b \in R\Big).$$

Herrn Professor Dr. H. Heineken danke ich für kritische Anmerkungen, durch die diese Note ihre jetzige Gestalt erhalten hat.

3. Beweisteil.

Wir zeigen zunächst (III)-(VII) mit (VIII) und (IX):

Zu (IV): Nach (II) gilt die rechtsseitige Implikation. Linksseitige Implikation: Wegen (VIII) besitzt R'' einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Nach [5: Lemma 9 und Satz 1] ist dann R'' nilpotent. Mit (II) folgt die Behauptung.

Zu (V): Die rechtsseitige Implikation ergibt sich mit [3; Satz 4, S. 318]. Linksseitige Implikation: Wegen (VIII) besitzt R' einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring. Nach [4; Lemma 5 und Satz 6] ist R' nilpotent.

Zu (III): (I) erbringt die rechtsseitige Implikation. Linksseitige Implikation: Nach (V) ist R' nilpotent, also wegen (I) R Ring endlicher Klasse.

Zu (VI): Die rechtsseitige Implikation folgt mit [4; Satz 4]. Linksseitige Implikation: Nach (VIII) besitzt R', also R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring.

Zu (VII): Wegen (IX) erfüllt R' die beschränkte Engelbedingung. Mit (VIII) folgt, daß R' einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring be-

sitzt. Nach [1; Theorem 1, p. 9] besitzt R' einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Wegen [5; Lemma 9 und Satz 1] ist R'' nilpotent.

Wir zeigen (VIII): Die folgenden *ringtheoretischen Vorbereitungen* stützen sich auf [2; S. 559-563] mit nachstehenden *Änderungen* und

4. Ergänzungen.

N Menge der *natürlichen Zahlen.*

Z Menge der *ganzen Zahlen.*

$|M|$ der von der Teilmenge M eines Ringes S *erzeugte Modul.*

X Menge der *Unbestimmten* $x_1, x_2, x_3, \ldots$

${}_XP$ Menge der *formalen Potenzprodukte* $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ in den Unbestimmten der Menge X.

F *Formenring* (Algebra über dem Ring Z mit der Basis ${}_XP$). Die Elemente von F heißen *Formen.*

F_1 zu einer Algebra mit Einselement 1 *erweiterter Formenring.*

Für Elemente von Z bzw. ${}_XP$ bzw. F verwenden wir die Zeichen i, j, k, l, m, n bzw. ϱ, σ, τ, bzw. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Jede Form $\alpha \neq 0$ besitzt eine (bis auf die Reihenfolge der Summanden) *eindeutige Darstellung als Linearkombination*

$$(1) \quad \alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i \quad \text{mit } 0 \neq n_i \in Z \text{ und paarweise verschiedenen } \alpha_i \in {}_XP.$$

Für eine Form α wird auch genauer das Zeichen $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ verwendet, wenn in der Darstellung (1) von α *höchstens* die Unbestimmten x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ wirklich erscheinen. $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *homogen*, wenn es $0 \leqslant k_i \in Z$, $1 \leqslant i \leqslant n$ gibt, so daß *in jedem Potenzprodukt* der Darstellung (1) von α *die Unbestimmte* x_i *genau* k_i*-mal vorkommt* für $1 \leqslant i \leqslant n$. Ist $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ eine weitere homogene Form, so heißen α und β *verwandt*, wenn in jedem Potenzprodukt der Darstellung (1) von β die Unbestimmte x_i ebenfalls genau k_i-mal vorkommt für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Jede Form $\alpha \neq 0$ besitzt eine (bis auf die Reihenfolge der Summanden) *eindeutige Darstellung als Summe*

$$(2) \quad \alpha = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \text{ mit } \textit{paarweise nicht verwandten homogenen Formen } \alpha_i \neq 0.$$

Seien M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ Untermoduln von R und $\gamma(x_1, \ldots, x_n) \in F$. Für jede Wertereihe $r_i \in M_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ stellt der durch die formalen Substitutionen $x_i \to r_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ gebildete Ausdruck $\gamma(r_1, \ldots, r_n)$ ein Element von R dar. Wir sagen, in R *gelte bezüglich* M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *das Gesetz* $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$, wenn für jede Wertereihe $r_i \in M_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, die Gleichung $\gamma(r_1, \ldots, r_n) = 0$ erfüllt ist. Wir sagen, *in* R *gelte das Gesetz* $\gamma = 0$, wenn in R bezüglich $M_i := R$, $1 \leqslant i \leqslant n$, das Gesetz $\gamma = 0$ gilt. Sinngemäße Übertragung von [2; 1. Beweisschritt zu Satz 3, S. 568] liefert:

BEMERKUNG 1. In R gelten bezüglich M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ mit dem Gesetz $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$ auch alle Gesetze $\gamma_i = 0$ der Darstellung (2) $\gamma = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i$ von γ.

Den formalen Kommutatoren entsprechen bezüglich der Anwendung auf Ringe die folgenden *Ringkommutatoren*. Wir definieren für m, $n \in N$ mit $m < n$ rekursiv Teilmengen $X(m, n)$ von F:

$$X(m, m+1) = \{x_m\} .$$

Für $n - m \geqslant 2$ sei $\alpha \in X(m, n)$ genau dann, wenn es $i \in N$ gibt mit $m < i < n$, so daß $\alpha = \beta \circ \gamma$ mit $\beta \in X(m, i)$ und $\gamma \in X(i, n)$.

5. Gruppentheoretische Vorbereitungen.

Mit der Menge U der Unbestimmten $y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, \ldots$ bilden wir analog [2; S. 560] die Menge ${}_UP$ der formalen Potenzprodukte $u_1 u_2 \ldots u_n$ mit $u_i \in U$, $1 \leqslant i \leqslant n$ in den Unbestimmten der Menge U und erklären eine Bijektion von ${}_UP$ auf ${}_UP$ durch folgende Festsetzungen:

$$y_i \to \bar{y}_i := z_i , \quad z_i \to \bar{z}_i := y_i , \quad \varphi y_i \to \overline{\varphi y}_i := z_i \bar{\varphi} , \quad \varphi z_i \to \overline{\varphi z}_i := y_i \bar{\varphi}$$

für alle $i \in N$ und $\varphi \in {}_UP$.

Man erhält demnach das Bild $\bar{\psi}$ von $\psi \in {}_UP$, indem man die Reihenfolge der Unbestimmten spiegelt und die Substitutionen $y_i \to z_i$ und $z_i \to y_i$ für alle in ψ vorkommenden Unbestimmten ausführt. Für Elemente von ${}_UP$ will ich die Zeichen φ, ψ, χ verwenden.

Wir setzen

$$\varphi \bullet \psi := \bar{\varphi}\bar{\psi}\varphi\psi \quad \text{für } \varphi, \psi \in {}_UP.$$

Das Symbol • beschreibt gleichzeitig die Kommutatorbildung in G. Verwechslungen schließt der jeweilige Zusammenhang aus.

Den formalen Kommutatoren entsprechen bezüglich der Anwendung auf Gruppen die folgenden *Gruppenkommutatoren*. Wir definieren für $m, n \in N$ mit $m < n$ rekursiv Teilmengen $U(m, n)$ von ${}_UP$:

$$U(m, m+1) = \{y_m\} .$$

Für $n - m \geqslant 2$ sei $\chi \in U(m, n)$ genau dann, wenn es $i \in N$ gibt mit $m < i < n$, so daß $\chi = \varphi \bullet \psi$ mit $\varphi \in U(m, i)$ und $\psi \in U(i, n)$.

Für $\varphi \in {}_UP$ will ich auch genauer das Zeichen $\varphi(y_m, z_m, \ldots, y_n, z_n)$ verwenden, wenn in φ *höchstens* die Unbestimmten $y_m, z_m, \ldots, y_n, z_n$ wirklich erscheinen. Für jede Wertereihe $g_i \in G$, $m \leqslant i \leqslant n$ stellt der durch die formalen Substitutionen $y_i \to g_i$ und $z_i \to g_i^{-1}$, $m \leqslant i \leqslant n$, gebildete Ausdruck $\varphi(g_m, g_m^{-1}, \ldots, g_n, g_n^{-1})$ wiederum ein Element von G dar. Wir sagen, *in G gelte das Gesetz* $\varphi(y_m, z_m, \ldots, y_n, z_n) = 1$, wenn für jede Wertereihe $g_i \in G$, $m \leqslant i \leqslant n$ die Gleichung

$$\varphi(g_m, g_m^{-1}, \ldots, g_n, g_n^{-1}) = 1$$

erfüllt ist. Man zeigt leicht

BEMERKUNG 2. Sei $(m, n, i, \varphi, \psi, \chi)$ ein 6-Tupel mit $m, n, i \in N$, $m < i < n$, $\varphi \in U(m, i)$, $\psi \in U(i, n)$ und $\chi = \varphi \bullet \psi$. Dann ist genauer $\varphi = \varphi(y_m, z_m, \ldots, y_{i-1}, z_{i-1})$, $\psi = \psi(y_i, z_i, \ldots, y_{n-1}, z_{n-1})$ und $\chi = \chi(y_m, z_m, \ldots, y_{n-1}, z_{n-1})$. Für beliebige $g_j \in G$, $m \leqslant j \leqslant n-1$ gilt

$$\varphi(g_m, g_m^{-1}, \ldots, g_{i-1}, g_{i-1}^{-1}) \bullet \psi(g_i, g_i^{-1}, \ldots, g_{n-1}, g_{n-1}^{-1}) =$$

$$= \chi(g_m, g_m^{-1}, \ldots, g_{n-1}, g_{n-1}^{-1}) .$$

6. Vererbung der Kommutatorbeziehungen von G auf R.

Man sieht unmittelbar ein, daß es genau eine Bijektion

$$\Gamma: \bigcup_{m,n \in N} U(m, n) \to \bigcup_{m,n \in N} X(m, n)$$

gibt mit den Eigenschaften $\Gamma(y_i) = x_i$ und

$$\Gamma(\varphi \bullet \psi) = \Gamma(\varphi) \circ (\psi) \quad \text{für alle } i \in N \text{ und } \varphi, \psi \in \bigcup_{m,n \in N} U(m, n) .$$

BEMERKUNG 3. Sei S niler Unterring von R. Wir erklären eine Abbildung $\Theta\colon S \to N$:

$\Theta(0) = 1$. Für $0 \neq s \in S$ sei $\Theta(s)$ die größte natürliche Zahl n, für die $s^n \neq 0$.

Wegen $(1-s)\left(1+\sum_{i=1}^{l} s^i\right) = 1$ für alle $s \in S$ und $l \geqslant \Theta(s)$ ist die multiplikativ abgeschlossene Menge $1 + S := \{1 + s | s \in S\}$ Untergruppe von G.

Für beliebige $l \in N$ definieren wir eine durch Bemerkung 3 motivierte Abbildung $\Delta_l\colon {}_UP \to F_1$.

Durch die formalen Substitutionen $y_i \to 1 - x_i$ und $z_i \to 1 + \sum_{j=1}^{l} (x_i)^j$, $m \leqslant i \leqslant n$ wird dem Element $\varphi(y_m, z_m, \ldots, y_n, z_n)$ von ${}_UP$ das Element $\alpha(x_m, \ldots, x_n)$ von F_1 zugeordnet. Wir setzen $\Delta_l(\varphi) := \alpha$.

Sei J derjenige *Untermodul von* F, welcher *von allen Potenzprodukten* aus ${}_XP$ erzeugt wird, in denen *mindestens eine Unbestimmte wenigstens zweimal vorkommt*. J ist Ideal von F_1. Bezüglich Lemma 1.(*c*) beachte man, daß für homogene Formen, speziell also für *Ringkommutatoren* α und β gilt: $\alpha\alpha$, $\alpha\beta\alpha \in J$.

LEMMA 1. Im folgenden verstehen sich *alle Kongruenzen modulo* J. Für $m, n \in N$ mit $m < n$, $l \in N$ und $\chi \in U(m, n)$ gilt:

(*a*) $\Delta_l(\chi) \equiv 1 - \Gamma(\chi)$ und $\Delta_l(\bar{\chi}) \equiv 1 + \Gamma(\chi)$.

(*b*) Mit (*a*) folgt unmittelbar $1 - \Delta_l(\chi) \in F$.

Induktionsbeweis zu (*a*): Für $n - m = 1$ gilt $\Delta_l(y_m) = 1 - x_m = 1 - \Gamma(y_m)$ und $\Delta_l(\bar{y}_m) = \Delta_l(z_m) = 1 + \sum_{j=1}^{l} (x_m)^j \equiv 1 + x_m = 1 + \Gamma(y_m)$. Wir schließen von $n - m \leqslant k$ auf $n - m = k + 1$: Sei $\chi \in U(m, n)$ und $n - m = k + 1$. Es gibt ein Tripel (i, φ, ψ), so daß $i \in N$, $m < i < n$, $\varphi \in U(m, i)$, $\psi \in U(i, n)$ und $\chi = \varphi \bullet \psi$, wobei $i - m \leqslant k$ und $n - i \leqslant k$. Nach Induktionsannahme gilt

$$\Delta_l(\chi) = \Delta_l(\varphi \bullet \psi) = \Delta_l(\bar{\varphi}\bar{\psi}\varphi\psi) = \Delta_l(\bar{\varphi})\Delta_l(\bar{\psi})\Delta_l(\varphi)\Delta_l(\psi) \equiv$$
$$(1 + \Gamma(\varphi))(1 + \Gamma(\psi))(1 - \Gamma(\varphi))(1 - \Gamma(\psi)) =: \alpha\,.$$

Die Berechnung von α nach den Distributivgesetzen erbringt mit

(*c*) $\Gamma(\varphi)\Gamma(\varphi) \equiv \Gamma(\psi)\Gamma(\psi) \equiv \Gamma(\varphi)\Gamma(\varphi)\Gamma(\varphi) \equiv \Gamma(\psi)\Gamma(\varphi)\ \Gamma(\psi) \equiv 0$

die Kongruenz $\alpha \equiv 1 - \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(\psi) = 1 - \Gamma(\chi)$.

Nach Induktionsannahme gilt bei Beachtung von $\overline{\varphi \bullet \psi} = \psi \bullet \varphi$ entsprechend

$$\Delta_l(\tilde{\chi}) = \Delta_l(\overline{\psi \bullet \varphi}) = \Delta_l(\psi \bullet \varphi) \equiv 1 - \Gamma(\psi) \circ \Gamma(\varphi) =$$

$$= 1 + \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(\psi) = 1 + \Gamma(\chi) .$$

LEMMA 2. Seien M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ Untermoduln von R, $l \in N$ und $\varphi \in U(1, n+1)$. Dann ist genauer $\varphi = \varphi(y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n)$.

(a) Also erscheinen in der Darstellung (1) von $1 - \Delta_l(\varphi)$ höchstens die Unbestimmten x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

In R gilt bezüglich M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ mit dem Gesetz $1 - \Delta_l(\varphi) = 0$ (siehe Lemma 1.(b)) auch das Gesetz $\Gamma(\varphi) = 0$.

BEWEIS. Da $\Gamma(\varphi)$ Element von $X(1, n+1)$ ist, treten in jedem Potenzprodukt der Darstellung (1) von $\Gamma(\varphi)$ genau die Unbestimmten x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ auf, wobei jede dieser Unbestimmten *genau einmal* erscheint. Nach Lemma 1 gilt $\Gamma(\varphi) \equiv 1 - \Delta_l(\varphi)$ modulo J. Folglich erscheinen in der Darstellung (1) von $1 - \Delta_l(\varphi)$ neben den Potenzprodukten der Darstellung (1) von $\Gamma(\varphi)$ nur noch Potenzprodukte, bei denen mindestens eine Unbestimmte wenigstens zweimal vorkommt. Demnach tritt $\Gamma(\varphi)$ in der Darstellung (2) von $1 - \Delta_l(\varphi)$ als Summand auf und ist nach Bemerkung 1 Gesetz in R bezüglich M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

LEMMA 3. Sei S niler Unterring von R und $\varphi \in U(1, n+1)$:

Gilt in der multiplikativen Gruppe $1 + S$ (Bemerkung 3) das Gesetz $\varphi = 1$, so gilt in S das Gesetz $\Gamma(\varphi) = 0$.

BEWEIS. Für $0 \neq m \in Z$ und $s \in S$ gilt stets

(a) $$\Theta(ms) = \Theta(s) .$$

Seien $s_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant n$ beliebig aber fest gewählt und l das Maximum der Zahlen $\Theta(s_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Nach Bemerkung 3 und ($a$) ist

(b) $$(1 - r_i)^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{l} (r_i)^j \quad \text{für alle } r_i \in |s_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

In der Gruppe $1 + S$ gilt das Gesetz $\varphi = 1$. Also gilt wegen (b)

und Lemma 2.(*a*) in R bezüglich $|s_i|$, $1 \leqslant i \leqslant n$ das Gesetz $1 - \Delta_l(\varphi) = 0$, folglich nach Lemma 2 das Gesetz $\Gamma(\varphi) = 0$. Da in der Darstellung (1) von $\Gamma(\varphi) \in X(1, n+1)$ genau die Unbestimmten x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ auftreten und $s_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant n$ beliebig gewählt sind, gilt in S das Gesetz $\Gamma(\varphi) = 0$.

Die Gleichwertigkeit formaler Kommutatoren mit Ring- bzw. Gruppenkommutatoren bezüglich der Anwendung auf Ringe bzw. Gruppen bestimmt je eine Bijektion von K auf $\bigcup_{n \in N} X(1, n+1)$ bzw. $\bigcup_{n \in N} U(1, n+1)$. Bei Beachtung von Bemerkung 2 ergibt sich (VIII) unmittelbar aus Lemma 3.

Wir zeigen (IX): Rekursiv werde definiert:

$$a_1 := x_1 \quad \text{und} \quad a_{i+1} := a_i \circ x_2 , \qquad b_1 := y_1 \quad \text{und} \quad b_{i+1} := b_i \bullet y_2 .$$

Sei

$$c_l := 1 + \sum_{j=1}^{l} (x_2)^j ,$$

Q die Menge aller Potenzprodukte in den Unbestimmten der Menge X, *in denen die Unbestimmte* x_1 *wenigstens zweimal vorkommt,*

$$Q_m := \{\sigma (x_2)^m \tau \mid \sigma, \tau \in {}_X P\} \quad \text{für } m \in N ,$$

$$J_m := |Q \cup Q_m| . \quad J_m \text{ ist Ideal von } F_1 \text{ für alle } m \in N.$$

Im folgenden verstehen sich *alle Kongruenzen modulo* J_{l+1}.

LEMMA 4. Für alle $l, n \in N$ gilt:

(*a*) $$\Delta_l(\bar{y}_2)\, \Delta_l(y_2) \equiv \Delta_l(y_2)\, \Delta_l(\bar{y}_2) \equiv 1 .$$

(*b*) $$\Delta_l(\bar{b}_n)\, \Delta_l(b_n) \equiv \Delta_l(b_n)\, \Delta_l(\bar{b}_n) \equiv 1 .$$

BEWEIS. Man bestätigt unmittelbar (*a*) und (*b*) für $n = 1$.

Induktionsschluß zu (*b*): Wir schließen von $n = i$ auf $n = i + 1$ bei Verwendung von $\bar{b}_{i+1} = \overline{b_i \bullet y_2} = y_2 \bullet b_i = \bar{y}_2 \bar{b}_i y_2 b_i$:

$$\Delta_l(\bar{b}_{i+1})\, \Delta_l(b_{i+1}) = \Delta_l(\bar{y}_2 \bar{b}_i y_2 b_i)\, \Delta_l(\bar{b}_i \bar{y}_2 b_i y_2) =$$
$$\Delta_l(\bar{y}_2)\, \Delta_l(\bar{b}_i)\, \Delta_l(y_2)\, \Delta_l(b_i)\, \Delta_l(\bar{b}_i)\, \Delta_l(\bar{y}_2)\, \Delta_l(b_i)\, \Delta_l(y_2) .$$

Der letzte Ausdruck ist kongruent 1, da je zwei symmetrisch stehende Faktoren nach Induktionsannahme und (*a*) kongruent 1 sind. Entsprechend zeigt man $\Delta_l(b_{i+1})\Delta_l(\bar{b}_{i+1}) \equiv 1$.

LEMMA 5. Für alle $l, n \in N$ gilt:

(*a*) $\Delta_l(b_n) \equiv 1 - (c_l)^{n-1} a_n$ und $\Delta_l(\bar{b}_n) \equiv 1 + (c_l)^{n-1} a_n$.

(*b*) Mit (*a*) folgt unmittelbar $1 - \Delta_l(b_n) \in F$.

BEWEIS. Es gilt

(*c*) $$1 - \Delta_l(\bar{b}_i)\Delta_l(\bar{y}_2)\Delta_l(y_2)\Delta_l(b_i) \equiv 0 .$$

da nach Lemma 4 symmetrisch stehende Faktoren des Subtrahenden kongruent 1 sind,

(*d*) $$(1 - (c_l)^{i-1} a_i) \circ (1 - x_2) = (c_l)^{i-1}(a_i \circ x_2) = (c_l)^{i-1} a_{i+1} ,$$

(*e*) $$(c_l)^{i-1} a_i (c_l)^i a_{i+1} \equiv 0 ,$$

da in jedem Potenzprodukt der Darstellung (1) der Faktoren a_i und a_{i+1} die Unbestimmte x_1 vorkommt.

Man prüft (*a*) sofort für $n = 1$. Wir schließen für (*a*) von $n = i$ auf $n = i + 1$:

$$\Delta_l(b_{i+1}) = \Delta_l(\bar{b}_i \bar{y}_2 b_i y_2) = \Delta_l(\bar{b}_i)\Delta_l(\bar{y}_2)\Delta_l(b_i)\Delta_l(y_2) \underset{(c)}{\equiv}$$

$$1 + \Delta_l(\bar{b}_i)\Delta_l(\bar{y}_2)\Delta_l(b_i)\Delta_l(y_2) - \Delta_l(\bar{b}_i)\Delta_l(\bar{y}_2)\Delta_l(y_2)\Delta_l(b_i) =$$

$$1 - \Delta_l(\bar{b}_i)\Delta_l(\bar{y}_2)\big(\Delta_l(b_i) \circ \Delta_l(y_2)\big) \underset{(\text{Ann.})}{\equiv}$$

$$1 - \big(1 + (c_l)^{i-1} a_i\big) c_l\big((1 - (c_l)^{i-1} a_i) \circ (1 - x_2)\big) \underset{(d)}{=}$$

$$1 - \big(1 + (c_l)^{i-1} a_i\big)(c_l)^i a_{i+1} \underset{(e)}{\equiv} 1 - (c_l)^i a_{i+1} .$$

Entsprechend zeigt man $\Delta_l(\bar{b}_{i+1}) \equiv 1 + (c_l)^i a_{i+1}$.

LEMMA 6. Seien M_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$ Untermoduln von R, $l, n \in N$ und $(r_2)^{l+1} = 0$ für alle $r_2 \in M_2$. Wegen $b_n = b_n(y_1, z_1, y_2, z_2)$ gilt:

(*a*) In der Darstellung (1) von $1 - \Delta_l(b_n)$ erscheinen höchstens die Unbestimmten x_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$.

In R gilt bezüglich M_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$ mit dem Gesetz $1 - \Delta_l(b_n) = 0$ (siehe Lemma 5.(*b*)) auch das Gesetz $a_n = 0$.

BEWEIS. Nach Lemma 5.(*a*) gibt es $\delta(x_1, x_2) \in |Q|$ und $\varepsilon(x_1, x_2) \in \in |Q_{l+1}|$, so daß

$$1 - \Delta_l(b_n) = (c_l)^{n-1} a_n + \delta + \varepsilon \,. \tag{b}$$

Aus $(r_2)^{l+1} = 0$ folgt $\varepsilon(r_1, r_2) = 0$ für alle $r_i \in M_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$. Wegen (*b*) gilt in R bezüglich M_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$ mit den Gesetzen $1 - \Delta_l(b_n) = 0$ und $\varepsilon = 0$ auch das Gesetz $(c_l)^{n-1} a_n + \delta = 0$. Da a_n in der Darstellung (2) von $(c_l)^{n-1} a_n + \delta$ als Summand vorkommt, gilt nach Bemerkung 1 in R bezüglich M_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$ das Gesetz $a_n = 0$.

Überträgt man schließlich bei Verwendung von Lemma 6 (anstelle von Lemma 2) sinngemäß den Beweis von Lemma 3 für $n = 2$, so erhält man

LEMMA 7. Sei S niler Unterring von R. Gilt in der Untergruppe $1 + S$ (Bemerkung 3) von G das Gesetz $b_n = 1$, so gilt in S das Gesetz $a_n = 0$. Hiermit ist (IX) bewiesen.

LITERATUR

[1] P. J. HIGGINS, *Lie-Rings satisfying the Engelcondition*, Proceedings of the Cambridge philosophical society, **50**, pp. 8-15.

[2] W. SPECHT, *Gesetze in Ringen I.*, Math. Zeitschrift, **52**, Heft 5, S. 557-589,

[3] W. STREB, *Über Ringe, die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **47**, S. 313-329.

[4] W. STREB, *Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **50**, S. 127-142.

[5] W. STREB, *Über Ringe mit Kommutatorbeziehungen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **51**, S. 27-48.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 maggio 1974.