RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

Submodularità nei gruppi finiti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 355-363

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__355_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Submodularità nei gruppi finiti.

FRANCO NAPOLITANI (*)

Si rammenta che in un reticolo L due intervalli primi $[a/b]$ e $[c/d]$ (cioè a copre b: $a \succ b$, c copre d: $c \succ d$) si dicono *trasposti*, $[a/b]\,\tau\,[c/d]$, se $a = b \cup c$, $d = b \cap c$ oppure $c = a \cup d$, $b = a \cap d$. Essi diconsi *proiettivi*, $[a/b]\,\pi\,[c/d]$, se esiste una sequenza finita di intervalli primi $[a/b] = [x_1/y_1]$, $[x_2/y_2]$, ..., $[x_n/y_n] = [c/d]$ tale che $[x_i/y_i]\,\tau\,[x_{i+1}/y_{i+1}]$, $i = 1, ..., n-1$. La relazione di proiettività π è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutti gli intervalli primi di L. Si denota con K_L il suo insieme quoziente e con $\pi([a/b]) \in K_L$ la classe di proiettività a cui appartiene $[a/b]$.

È noto che, se L è a catene limitate finite, ogni congruenza λ di L è univocamente determinata dall'insieme B_λ costituito dalle classi $\pi([a/b])$ annullate da λ, tali cioè che $a \equiv b \bmod \lambda$, e che quindi l'applicazione canonica Θ: $\lambda \to B_\lambda$ è un monomorfismo del reticolo $\hat{L}$ delle congruenze di L nel reticolo di tutti i sottoinsiemi di K_L.

Tamaschke [6], [7] ha chiamato *submodulare* un reticolo L a catene limitate finite nel quale le seguenti due condizioni, ciascuna duale dell'altra, valgono:

$$(\underline{\mathrm{S}}) \quad x \cup y \succ y \quad \text{implica} \quad [p/q]\,\pi\,[x \cup y/y] \quad \text{se } x \geqslant p \succ q \geqslant x \cap y$$

$$(\overline{\mathrm{S}}) \quad x \cap y \prec y \quad \text{implica} \quad [p/q]\,\pi\,[y/x \cap y] \quad \text{se } x \cup y \geqslant p \succ q \geqslant x\,.$$

Egli ha inoltre provato che l'essere Θ un isomorfismo caratterizza i reticoli submodulari.

(*) Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico Università - Via Belzoni 5 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

In questa nota si caratterizzano i gruppi finiti G il cui reticolo $L(G)$ dei sottogruppi è submodulare. In particolare, confermando una congettura di G. Zacher di qualche anno fa, si prova che il reticolo dei sottogruppi di un gruppo semplice ha una sola classe di intervalli primi proiettivi.

Indichiamo con E il sottogruppo identico di un gruppo G e con Q_{2^n} il gruppo dei quaternioni di ordine 2^n. Le altre notazioni e terminologie sono quelle usuali della teoria dei gruppi [2] e della teoria dei reticoli [1], [5]. Tutti i gruppi considerati sono finiti. G indica un gruppo non identico.

Le seguenti proprietà verranno frequentemente usate nel seguito:

1.1. Se G è un gruppo ed $[H/K]$ è un intervallo primo di $L(G)$, esiste un primo $p/|G|$ ed un p-sottogruppo ciclico $C \neq E$ tale che $[H/K]\,\tau\,[C/\mho^1(C)]$.

1.2. In un p-gruppo P di ordine p^n, $|K_{L(P)}| = n$ se P è ciclico, $|K_{L(P)}| = 2$ se P è dei quaternioni, $|K_{L(P)}| = 1$ se P non è dei tipi precedenti.

1.3. Se $N \lhd G$, allora ogni intervallo primo $[H/K]$ di $L(G)$ è proiettivo ad almeno un intervallo $[X/Y]$ in cui $X \leqslant N$ oppure $Y \geqslant N$.

La 1.1 è evidente; una dimostrazione della 1.2 è contenuta in [3] e [7]. La 1.3 discende da 1.1 osservando che per ogni p-sottogruppo ciclico non identico C si ha $C \leqslant N$ oppure $[CN/\mho^1(C)N]\,\tau\,[C/\mho^1(C)]$.

Lemma 1. Sia $G = PQ$, $P \lhd G$, $|P| = p^n$, $|Q| = q$, $p \neq q$ primi. Se Q opera non banalmente su P, allora $|K_{L(G)}| = 1$ se P non è un gruppo dei quaternioni, $|K_{L(G)}| = 2$ se P è un gruppo dei quaternioni (in questo ultimo caso $G \simeq SL(2,3)$).

Dim. Da un risultato di Burnside [2, pag. 174] e dal teorema di Maschke, segue che P contiene un sottogruppo proprio $N \lhd G$ tale che P/N sia abeliano elementare e QN/N operi irriducibilmente su P/N. Allora, se $|H/N| = p$ ed $x \in P - N$, si ha $[H/N]\,\tau\,[G/Q^xN]\,\tau\,[Q/E]$. Osservato che Q opera non banalmente su ogni sottogruppo non identico di P se P è ciclico, e che i soli intervalli primi proiettivi a $[Z(P)/E]$ sono $[Z(P)Q/Q]$ e quelli ad esso coniugati se P è un gruppo dei quaternioni, il lemma segue da 1.1 ed 1.2.

Corollario 1. Sia P un S_p-sottogruppo di un gruppo G. Se P non è un gruppo dei quaternioni e G non ha p-complemento normale se P è ciclico, gli intervalli primi di $L(P)$ sono a due a due proiettivi in $L(G)$.

Dim. Il caso P non ciclico essendo ovvia conseguenza di 1.2, supponiamo che P sia ciclico. Poichè G non ha p-complemento normale, G contiene un sottogruppo ciclico Q di ordine q^n inducente su P un automorfismo di ordine q. Per il lemma 1, $|K_{L(QP/\mho^1(Q))}| = 1$ e quindi l'asserto.

Lemma 2. *Il reticolo dei sottogruppi di un gruppo semplice G ha una sola classe di intervalli primi proiettivi.*

Dim. Supposto, com'è lecito, G non abeliano, siano H e K due sottogruppi di G di ordine primo p. Poichè il sottogruppo di Frattini di G è identico, esiste un sottogruppo massimo M non contenente H. Se per un qualche $x \in H$, K non è contenuto in M^x, si ha

$$[H/E]\,\tau\,[G/M^x]\,\tau\,[K/E]\,.$$

Altrimenti $T = \bigcap_{x \in H} M^x$ contiene K. In questa eventualità, sia U un S_p-sottogruppo di TH contenente K. U contiene almeno due sottogruppi distinti di ordine p ed uno di questi, sia J, non è in T. Segue da ciò $[J/E]\,\pi\,[H/E]$ e $|K_{L(U)}| = 1$, e quindi $[H/E]\,\pi\,[K/E]$. Poichè, essendo G semplice, per ogni $p \mid |G|$ esiste un elemento di ordine p non in M, quanto detto comporta che due qualunque intervalli primi minimali (cioè intervalli primi della forma $[R/E]$) di $L(G)$ sono proiettivi. Per la 1.1 la dimostrazione sarà completa ove risulti che, per ogni $p \mid |G|$, tutti gli intervalli primi del reticolo dei sottogruppi di un S_p-sottogruppo P di G sono proiettivi ad un intervallo primo minimale. Se P non è un gruppo dei quaternioni, ciò è assicurato dal cor. 1. Supposto P gruppo dei quaternioni (in un gruppo semplice questa situazione non si presenta, ma si preferisce non far uso del teorema di Brauer-Suzuki), esiste, per il teorema di Frobenius sui complementi normali, un 3-elemento che normalizza ma non centralizza un sottogruppo di P. Segue dal lemma 1 che ogni intervallo primo di $L(P/Z(P))$ è proiettivo ad un intervallo primo di un S_3-sottogruppo e pertanto ad ogni intervallo primo minimale.

Corollario 2. *Se P e $\overline{P}$ sono p-sottogruppi di uguale ordine di un gruppo G e P_1 e $\overline{P}_1$ sono sottogruppi massimi rispettivamente di P e $\overline{P}$, allora $[P/P_1]\,\pi\,[\overline{P}/\overline{P}_1]$.*

Dim. Siano G_p e $\bar{G}_p$ due S_p-sottogruppi di G contenenti rispettivamente P e $\bar{P}$ e σ un automorfismo di G tale che $G_p^\sigma = \bar{G}_p$. Poichè, per la 1.2, $[P^\sigma/P_1^\sigma]$ è proiettivo a $[\bar{P}/\bar{P}_1]$, negando la tesi esisterebbe un gruppo G^* avente un automorfismo σ e contenente un p-sottogruppo P per cui $[P/P_1]$ non è proiettivo a $[P^\sigma/P_1^\sigma]$ e di ordine minimo rispetto a queste condizioni. L'esistenza in G^* di un sottogruppo caratteristico non banale contraddirebbe la minimalità di G^*. Pertanto G^* dovrebbe essere caratteristicamente semplice, contro il lemma 2 e la 1.2.

Osservazione 1. Una autoproiettività di un gruppo G induce una permutazione su $K_{L(G)}$. L'insieme $K(G)$ delle autoproiettività che inducono la permutazione identica su $K_{L(G)}$ formano un sottogruppo normale del gruppo $A(G)$ di tutte le autoproiettività. Il corollario 2 implica che $K(G)$ contiene l'insieme delle autoproiettività che conservano gli indici.

Dal corollario 2 segue che, fissato per ogni $p \mid |G|$ un S_p-sottogruppo G_p di G, $|K_{L(G)}| \leq \sum_{p \mid |G|} |K_{L(G_p)}|$. È naturale quindi chiedersi quali sono i gruppi che in rapporto alla struttura proiettiva dei propri sottogruppi di Sylow hanno massimo numero di classi di proiettività. La risposta è data dal seguente teorema, già provato da Frigerio [4] per i gruppi risolubili.

Teorema 1. Un gruppo G è nilpotente se e solo se $|K_{L(G)}| = \sum_{p \mid |G|} |K_{L(G_p)}|$, ove G_p è un S_p-sottogruppo di G.

Dim. Sia G un gruppo per cui $|K_{L(G)}| = \sum_{p \mid |G|} |K_{L(G_p)}|$. La precedente uguaglianza implica che $N_G(H)/C_G(H)$ di ogni p-sottogruppo $H \neq E$ di G, per ogni $p \mid |G|$, è un p-gruppo; altrimenti dal lemma 1 seguirebbe l'esistenza di due primi distinti t e q tali che qualche intervallo primo del reticolo dei sottogruppi di un S_t-sottogruppo di G sia proiettivo a qualche intervallo primo del reticolo di un S_q-sottogruppo di G e quindi $|K_{L(G)}| < \sum_{p \mid |G|} |K_{L(G_p)}|$. Ma allora per il teorema di Frobenius G ha p-complemento normale per ogni $p \mid |G|$, e così G è nilpotente. Il viceversa è evidente.

Lemma 3. Sia G un gruppo ed $L(G)$ sia immerso in un reticolo L in modo che $A \lessdot B$ in $L(G)$ implichi $A \lessdot B$ in L. Allora:

a) gli intervalli primi di $L(G)$ sono a due a due proiettivi in L se G è L-indecomponibile e, per ogni $p \mid |G|$, due qualunque intervalli primi del reticolo dei sottogruppi di un S_p-sottogruppo di G sono proiettivi in L.

b) gli intervalli primi del reticolo dei sottogruppi di un S_2-sottogruppo di G sono a due a due proiettivi in L se G ha S_2-sottogruppi dei quaternioni, centro di ordine dispari, non ha 2-complemento normale e due qualunque intervalli primi del reticolo dei sottogruppi di un S_3-sottogruppo di G sono proiettivi in L nel caso che $16 \nmid |G|$ e G abbia 3-complemento normale.

DIM. Proviamo sia la *a*) che la *b*) per induzione su $|G|$; è chiaro che in entrambi i casi si può supporre G non semplice.

a) Sia N un sottogruppo normale minimo di G e sia G_i/N, $N < G_i \leqslant G$, una componente L-indecomponibile di G/N. È sufficiente provare che due qualunque intervalli primi di $L(G_i)$ sono proiettivi in L; e quindi, poichè $|K_{L(N)}| = 1$ e per l'ipotesi di induzione gli intervalli primi di $L(G_i/N)$ sono a due a due proiettivi in L, che esiste un intervallo primo di $L(G_i/N)$ proiettivo ad un intervallo primo di $L(N)$. Ciò è immediata conseguenza delle ipotesi se $|N|$ e $|G_i/N|$ non sono relativamente primi, e del lemma 1, ove si noti che per la L-indecomponibilità di $L(G)$, G_i contiene propriamente $NC_{G_i}(N)$ e quindi esiste in G_i un p-elemento $g \notin NC_{G_i}(N)$ inducente un automorfismo non identico su un sottogruppo di Sylow di N, se N è di Hall in G_i.

b) Sia N un sottogruppo normale minimo di G. Possiamo supporre che $2 \nmid |N|$. Allora, se $Z(G/N)$ è di ordine dispari, la *b*) è vera per l'ipotesi di induzione. Rimane $2 \,|\, |Z(G/N)|$. Sia H/N il sottogruppo di ordine 2 di $Z(G/N)$. Poichè $NC_G(N) \not\geqslant H$, il lemma 1 implica $|K_{L(H)}| = 1$. Inoltre $G/C_G(N)$ è un gruppo con S_2-sottogruppi dei quaternioni e privo di 2-complemento normale: pertanto $3 \,|\, |G/C_G(N)|$. Dunque, poichè due qualunque intervalli primi di un S_3-sottogruppo di G sono, per il corollario 1 o per le ipotesi, proiettivi in L (non esistono infatti gruppi con S_2-sottogruppi dei quaternioni, aventi ordine divisibile per 16, 3-complemento normale ma non 2-complemento normale), $|K_{L(PN)}| = 1$ per ogni S_3-sottogruppo P di G. Ove si osservi che G ha una sezione isomorfa al gruppo alterno A_4 la *b*) è provata.

OSSERVAZIONE 2. Nella *b*) del lemma 3 l'assunzione che due qualunque intervalli primi del reticolo dei sottogruppi di un S_3-sottogruppo di G siano proiettivi in L nel caso $16 \nmid |G|$ e G abbia 3-complemento normale è insopprimibile. Infatti, sia p un primo congruo 1 modulo 9 e sia N un gruppo abeliano elementare di ordine p^2. $GL(2, p)$ contiene un sottogruppo della forma $Q_8\langle\alpha\rangle\times\langle\sigma\rangle$, con $Q_8\langle\alpha\rangle\simeq SL(2,3)$ contenuto in $SL(2,p)$ e σ di ordine 9 nel centro di $GL(2,p)$. L'estensione di N mediante $Q_8\langle\alpha\sigma\rangle$ è un gruppo G in cui due qualunque intervalli primi di un S_3-sottogruppo non sono proiettivi in $L(G)$ pur essendo verificate tutte le restanti ipotesi della b) del lemma 3. In $L(G)$ gli intervalli primi di un S_2-sottogruppo di G non sono a due a due proiettivi.

Come corollario si ottiene:

COROLLARIO 3. Sia G un gruppo perfetto. $|K_{L(G)}|=1$ se e solamente se il centro di G è di ordine dispari quando G ha S_2-sottogruppi dei quaternioni.

DIM. Sia G un gruppo perfetto avente centro di ordine dispari se i suoi S_2-sottogruppi sono dei quaternioni. Per il corollario 1 e la b) del lemma 3 gli intervalli primi di un qualsivoglia sottogruppo di Sylow di G sono a due a due proiettivi in $L(G)$. Per il teorema di Feit-Thompson, G è L-indecomponible e quindi, per la a) del lemma 3, $|K_{L(G)}|=1$. Poichè $|K_{L(G)}|$ è più grande di 1 in un gruppo G con S_2-sottogruppi dei quaternioni e centro di ordine pari, il corollario è provato.

LEMMA 4. Sia $G=PO_{p'}(G)$ con P p-gruppo ciclico o dei quaternioni e sia $[A_1/A_2]$ un intervallo di $L(G)$ tale che $|A_1\colon A_2|=p$, $|A_2|=p^\alpha d$ con $(p,d)=1$. Sia inoltre $C_G(\Omega_n(P))P=C_G(\Omega_{n+1}(P))P$, ove $n=\alpha$ se P è ciclico, e vale zero oppure 1 a seconda che $\alpha=0$ oppure $\alpha\geqslant1$ se P è un gruppo dei quaternioni. Se $[H/K]$ è un intervallo primo trasposto ad $[A_1/A_2]$, allora $|H:K|=p$ con $|K|=p^\alpha\underline{d}$, $(p,\underline{d})=1$, se P è ciclico oppure $\alpha=0$; $|K|=p^\beta\underline{d}$ con $\beta\geqslant1$ eventualmente diverso da α se $\alpha\geqslant1$ e P è un gruppo dei quaternioni.

DIM. A_2 è sottogruppo normale di A_1 ed è $A_1=P_1D$, $A_2=P_2D$ con $P_1>P_2$ contenuti in un coniugato di P in G e $D\leqslant O_{p'}(G)$. Per provare il lemma è sufficiente dimostrare che risulta $K\lhd H$, le rimanenti proprietà di $[H/K]$ essendone conseguenza. Ciò è chiaro se $H\leqslant A_1$. Supposto $H>A_1$ e scritto H nella forma P^*D^* con $P^*\geqslant P_1$ e $D^*\leqslant O_{p'}(G)$, notiamo che, se K non contenesse D^*, allora si avrebbe $H=KD^*$ e così K conterrebbe un S_p-sottogruppo $\overline{P}$ di H. Scelto $\overline{P}$ in modo che contenga P_2, è $\overline{P}\neq P^*$. L'intersezione $\overline{P}\cap P^*$ è P_2 se P^* è ciclico o, in ogni caso, se $\alpha=0$; contiene invece P_2 se P^* è dei quaternioni ed $\alpha\geqslant1$. Considerato un elemento $g\in D^*$ tale che $\overline{P}^g=P^*$, allora $g\in C_G(\Omega_n(P))P$ ma $g\notin C_G(\Omega_{n+1}(P))P$. Pertanto $K\geqslant D^*$ e così $K\lhd H$.

TEOREMA 2. Sia G un gruppo finito di ordine composto e sia ν l'insieme dei primi p per i quali G ha p-complemento normale e S_p-sottogruppi ciclici o dei quaternioni. Nel reticolo $L(G)$ dei sottogruppi di G due qualunque intervalli primi sono proiettivi se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

(i) l'applicazione: $\Omega_i(P) \to C_G(\Omega_i(P))P$, $i > 0$, è strettamente decrescente se P è un S_p-sottogruppo di G con $p \in \nu$;

(ii) il centro di G è di ordine dispari se G ha S_2-sottogruppi dei quaternioni;

(iii) l'applicazione: $\Omega_i(P) \to O_{2'}\big(C_G(\Omega_i(P))\big)$, $i \geqslant 0$, ove P è un S_3-sottogruppo ciclico di G, è strettamente decrescente se:

1) $G/O_{\{2,3\}'}(G)$ è isomorfo al prodotto semi-diretto ma non diretto di Q_8 mediante P ed ogni $\{2, 3\}'$-elemento che centralizza un 2-elemento non identico centralizza anche tutto il 2-sottogruppo di Sylow cui esso appartiene;

(iv) con le componenti L-indecomponibili di $O_{\nu'}(G)$ si può costruire una sequenza finita $\{N_j\}$, in cui le suddette componenti compaiano ciascuna almeno una volta, e tale che, se $N_j \neq N_{j+1}$, esistano un elemento t_j e due sottogruppi rispettivamente di N_j e N_{j+1}, aventi ordine dispari se vale la 1) di (iii), sui quali t_j induca automorfismi non identici dello stesso ordine.

DIM. Sia G un gruppo di ordine composto in cui due qualunque intervalli primi sono proiettivi. Per il lemma 4 la (i) è vera in G. La (ii) è evidente e la (iii) si prova con argomentazioni analoghe a quelle svolte per provare il lemma 4. Rimane la (iv). Facendo uso del lemma 4, è possibile determinare la struttura degli intervalli primi che possono essere trasposti ad un intervallo primo $[H/K]$ con $|H:K|$ che divide l'ordine di una fissata componente L-indecomponibile N di $O_{\nu'}(G)$ $\big($risp.: di $O_{2'}(O_{\nu'}(G))$ se vale la 1) di (iii)$\big)$.

In effetti $[X/Y]\tau[H/K]$ implica $|X:Y|\,\big|\,|N|$ oppure $|X:Y| = p$ con $p \in \nu$, $|Y| = p^\alpha d$, $(p, d) = 1$, $C_N(\Omega_n(P)) \neq C_N(\Omega_{n+1}(P))$, essendo P un S_p-sottogruppo di G e $n = \alpha$ se P è ciclico, $n = 0$ oppure $n = 1$ a seconda che $\alpha = 0$ oppure $\alpha \geqslant 1$ se P è un gruppo dei quaternioni $\big($risp.: con, in più, intervalli $[X/Y]$ con $|X| = 2d$, d dispari, e $|Y| = d$ se N è il 2-complemento normale della componente L-indecomponibile di ordine pari di $O_{\nu'}(G)$ se ...$\big)$. Si deduce che, se $|K_{L(G)}| = 1$, con le componenti L-indecomponibili di $O_{\nu'}(G)$ $\big($risp.: di $O_{2'}(O_{\nu'}(G))$ se ...$\big)$ è possibile costruire una sequenza finita $\{N_j\}$ in cui le suddette componenti compaiono ciascuna almeno una volta, e tale che, se $N_j \neq N_{j+1}$, esistono un $p \in \nu$ ed un intero n per i quali, se P è un S_p-sottogruppo di G, si ha contemporaneamente $C_{N_j}(\Omega_n(P)) \neq C_{N_j}(\Omega_{n+1}(P))$, $C_{N_{j+1}}(\Omega_n(P)) \neq$ $\neq C_{N_{j+1}}(\Omega_{n+1}(P))$. Si vede facilmente che esiste un elemento $t_j \in P$ che induce un automorfismo di ordine p sia su $C_{N_j}(\Omega_n(P))$ che su $C_{N_{j+1}}(\Omega_n(P))$, e così vale anche la (iv).

Viceversa, supponiamo che G sia un gruppo che verifica le condizioni da (i) a (iv) dell'enunciato. Il lemma 3, tenuto conto della (ii) e del corollario 1, implica che due qualunque intervalli primi del reticolo dei sottogruppi di una medesima componente L-indecomponibile di $O_{\nu'}(G)$ (risp.: $O_{2'}(O_{\nu'}(G))$ se ...) sono proiettivi in $L(G)$. Dunque per la (iv) due qualunque intervalli primi di $L(O_{\nu'}(G))$ (risp.: $L(O_{2'}(O_{\nu'}(G)))$) sono proiettivi. Infine per (i), (ii) e (iii) ogni intervallo $[X/Y]$ con $Y \geqslant O_{\nu'}(G)$ (risp.: $Y \geqslant O_{2'}(O_{\nu'}(G))$ se ...) è proiettivo ad un intervallo primo di $L(O_{\nu'}(G))$ (risp.: $L(O_{2'}(O_{\nu'}(G)))$ se ...) e così $|K_{L(G)}| = 1$.

TEOREMA 3. *Sia G un gruppo L-indecomponibile. Il reticolo $L(G)$ dei sottogruppi di G è submodulare se e solo se $G = HK$ con $K \lhd G$, $(|H|, |K|) = 1$, H gruppo nilpotente a sottogruppi di Sylow ciclici o dei quaternioni ed esiste un sottogruppo normale $N \leqslant H$ tale che $|K_{L(G/N)}| = 1$.*

DIM. Sia G un gruppo L-indecomponibile con $L(G)$ submodulare. Se G è un p-gruppo chiaramente G verifica le condizioni espresse dall'enunciato. Supposto G di ordine composto, sia ν l'insieme dei primi $p \mid |G|$ per cui G ha p-complemento normale e S_p-sottogruppi ciclici o dei quaternioni. Posto $K = O_{\nu'}(G)$ ed indicato con H un complemento di K in G, l'intersezione N di H con $Z(G)$ è un elemento neutro di $L(G)$ [5, pag. 79]. Ciò implica che $L(G/N)$ è omomorfo a $L(G)$ e quindi è anch'esso submodulare; inoltre $L(G/N)$ è L-indecomponibile. Per concludere è sufficiente provare che $|K_{L(G/N)}| = 1$, o, ciò che è lo stesso, che $|K_{L(G)}| = 1$ se $N = E$. Supponiamo dunque $N = E$ e sia P un S_p-sottogruppo di G, $p \in \nu$. Per la struttura di P, esiste un sottogruppo di Sylow Q di $O_{\nu'}(G)$ normalizzato da P e sul quale P agisce fedelmente. Con procedimenti già applicati si vede che G ha una sezione T che è estensione di un q-gruppo, $q \mid |Q|$, abeliano elementare Q^* mediante P, con P che agisce irriducibilmente e fedelmente su Q^*. Considerato in T un coniugato P^* di P distinto da P, si ha $P^* \cap P = E$ ed applicando l'assioma $(\underline{S})$ si ha che due qualunque intervalli primi di $L(P)$ sono proiettivi a $[T/P^*]$ e quindi proiettivi. Osservato che G

ha 2-complemento normale se esso ha centro di ordine pari e S_2-sottogruppi dei quaternioni, dal lemma 3 segue che $|K_{L(G)}| = 1$.

Viceversa, sia G un gruppo soddisfacente alle condizioni espresse dall'enunciato del teorema. Supposto, com'è lecito, N di ordine $2d$, d dispari, qualora $2 \mid |N|$ e la 2-componente di H sia un gruppo dei quaternioni, N è un elemento neutro di $L(G)$. L'applicazione φ_N: $L(G) \ni$ $\ni X \to X \cap N$ è pertanto un omomorfismo di $L(G)$ su $L(N)$. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle congruenze di $L(G)$ canonicamente associate agli omomorfismi del tipo $\alpha \circ \varphi_N$, α essendo l'omomorfismo canonico di $L(N)$ su $L(N)/\varrho$, $\varrho \in \hat{L}(N)$. Poichè $L(N)$ è submodulare $|\mathcal{A}| = 2^{|K_{L(N)}|}$. Sia $\bar{\mathcal{A}} = \{\lambda \cap \beta; \beta \in \mathcal{A}\}$ ove λ è la congruenza di $L(G)$ associata all'endomorfismo φ^N: $L(G) \ni X \to X \cup N$. È $|\mathcal{A}| = |\bar{\mathcal{A}}|$ e nessun elemento di $\mathcal{A}$ è in $\bar{\mathcal{A}}$. Pertanto $|\hat{L}(G)| \geq |\mathcal{A}| + |\bar{\mathcal{A}}| = 2^{|K_{L(N)}|+1} = 2^{|K_{L(G)}|}$ e ciò implica che $L(G)$ è submodulare.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, A.M.S., 1967.

[2] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, 1968.

[3] A. Frigerio, *Sopra le classi di proiettività dei quozienti primi nel reticolo dei sottogruppi di alcune classi di gruppi finiti*, Accademia Patavina, vol. LXXVII, 1964-65.

[4] A. Frigerio, *Caratterizzazione dei gruppi speciali finiti mediante le classi di proiettività dei quozienti primi di $L(G)$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XLIII, 1970.

[5] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer Verlag, 1956.

[6] O. Tamaschke, *Submodulare Verbände*, Math. Z., **74** (1960).

[7] O. Tamaschke, *Die Kongruenzrelationen im Verband der züganglichen Subnormalteiler*, Math. Z., **75** (1961).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 Aprile 1973 e in forma riveduta il 4 luglio 1973.