Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Enrico Martino

Elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 345-354

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__345_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 50 (1973)

Elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo.

Enrico Martino (*)

Introduzione.

Ricordiamo che un sottogruppo N d'un gruppo G è *neutro* se, e, solo se, sono siddisfatte le condizioni

$$1) \qquad N \cup (V_1 \cap V_2) = (N \cup V_1) \cap (N \cup V_2) ,$$

$$2) \qquad N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2) ,$$

per ogni coppia V_1, V_2 di sottogruppi di G.

Chiameremo *$\cup$-distributivo* (*$\cap$-distributivo*) un sottogruppo N soddisfacente alla 1) (soddisfacente alla 2)), di guisa che N è neutro se, e solo se, è simultaneamente $\cup$-distributivo ed $\cap$-distributivo.

I sottogruppi $\cup$-distributivi, i sottogruppi $\cap$-distributivi e quelli neutri sono stati caratterizzati da Zappa nel caso d'un gruppo finito ([3] e [4]). Higman e Sato hanno caratterizzato i sottogruppi $\cup$-distributivi rispettivamente d'un gruppo periodico e di un gruppo non periodico [3].

Non si ha invece, a quanto risulta all'autore della presente nota una caratterizzazione dei sottogruppi $\cap$-distributivi d'un gruppo infinito qualsiasi.

(*) Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico Università - Via Belzoni 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del C.N.R.

In [1] si è provato che, nel caso d'un gruppo localmente nilpotente, le tre menzionate classi di sottogruppi, nonchè altre classi di sottogruppi a priori più generali di quelle, coincidono. In questa nota, prendendo le mosse dai citati teoremi di Higman e Sato, caratterizzeremo, entro certi limiti, i sottogruppi neutri d'un gruppo generico.

Elenco di alcuni simboli ed abbreviazioni.

$H \subseteq G$ H è un sottoinsieme del gruppo G;

$H \leqslant G$ H è un sottogruppo del gruppo G;

$H \trianglelefteq G$ H è un sottogruppo normale del gruppo G;

$\omega(G)$ Insieme del numero 1 e dei numeri primi che dividono l'ordine di qualche elemento periodico di G;

$\cup$-*d.* $\cup$-distributivo;

$\cap$-*d.* $\cap$-distributivo.

* * *

1. Elenchiamo alcune proprietà generali dei sottogruppi in questione che ci saranno utili in seguito.

Sono intanto immediate le seguenti proposizioni:

1.1 *Sia* $H \leqslant N \leqslant G$, $H \trianglelefteq G$. *Se* N *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* G, N/H *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* G/H.

1.2. *Siano* H, $N \leqslant G$. *Se* N *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* G, *allora* $N \cap H$ *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* H.

Si ha poi ([1] prop. 8):

1.3. *Siano* H, $N \leqslant G$ *con* $H \trianglelefteq G$ *ed* $H \cap N = e$. *Se* N *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* G, *allora* NH/H *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* G/H.

Dimostriamo infine la seguente proposizione che riduce il problema della determinazione dei sottogruppi neutri d'un gruppo G al caso in cui G sia finitamente generato:

1.4. PROPOSIZIONE. *Sia* N *un sottogruppo d'un gruppo* G. N *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d.*) *di* G *se, e solo se, per ogni sottogruppo finitamente generato* H *di* G, $H \cap N$ *è un sottogruppo* $\cup$-*d.* ($\cap$-*d*) *di* H.

DIM. La necessità rientra nella 1.2.

Quanto alla sufficienza, sia $H \cap N$ un sottogruppo $\cap$-d. di H per ogni sottogruppo H finitamente generato di G. Detti V_1, V_2 due sottogruppi di G, proviamo che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2) .$$

Allo scopo, basta verificare che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) \leqslant (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2) ,$$

l'inclusione inversa essendo ovvia.

Considerato dunque un $x \in N \cap (V_1 \cup V_2)$, lo si esprima nella forma

$$x = v_{11}v_{21} \dots v_{1n}v_{2n} \qquad (v_{ij} \in V_i,\ i = 1, 2) .$$

Posto allora

$$H = \langle v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1n}, v_{2n} \rangle ,$$

$$V_1' = \langle v_{11}, \dots, v_{1n} \rangle , \qquad V_2' = \langle v_{21}, \dots, v_{2n} \rangle ,$$

si ha, per ipotesi,

$$N \cap (V_1' \cup V_2') = (N \cap V_1') \cup (N \cap V_2')$$

onde

$$x \in (N \cap V_1') \cup (N \cap V_2') \leqslant (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2) .$$

Analogamente si ragiona nel caso di sottogruppi $\cup$-d.; donde l'asserto.

2. In questo numero caratterizzeremo i sottogruppi neutri d'un gruppo periodico.

2.1 LEMMA. *Siano N, M due sottogruppi normali del gruppo periodico G, con $\omega(N) \cap \omega(M) = 1$. S NM/M è un sottogruppo $\cap$-d. di G/M, allora N è un sottogruppo $\cap$-d. di G.*

DIM. Per ogni sottogruppo $U \leqslant G$ si ha, nelle ipotesi poste,

$$(U \cap N) \cup M = (U \cup M) \cap (N \cup M) .$$

Detti allora V_1, V_2 due sottogruppi di G, si ha

$$((V_1 \cup V_2) \cap N) \cup M = (V_1 \cup V_2 \cup M) \cap (N \cup M) =$$
$$= (V_1 M \cap NM) \cup (V_2 M \cap NM) = (V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N) \cup M$$

da cui

$$(V_1 \cup V_2) \cap N \simeq \frac{((V_1 \cup V_2) \cap N) M}{M} =$$
$$= \frac{(V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N) M}{M} \simeq (V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N)$$

gli isomorfismi essendo quelli canonici, onde

$$(V_1 \cup V_2) \cap N = (V_1 \cap N) \cup (V_2 \cap N)\,; \qquad \text{c.v.d.}\,.$$

2.2. Teorema. *Sia N un sottogruppo non banale del gruppo periodico G. N è un sottogruppo neutro di G se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

1) $N \lhd G$

2) *Detto N_p l'insieme dei p-elementi di N, per ogni $p \in \omega(G/N)$*:

 2a) *ogni p-elemento u di G è permutabile con tutti gli elementi di N*;

 2b) *è o $\langle u \rangle \geqslant N_p$ oppure $N_p \geqslant \langle u \rangle$.*

3) *L'insieme $M = \{x \in G \mid \langle x \rangle \cap N = e\}$ è un sottogruppo di G tale che*:

 3a) $M \lhd G$, $\omega(M) \cap \omega(N) = 1$;

 3b) *il centralizzante $C_{G/M}(NM/M)$ di NM/M in G/M è un S-gruppo (cioè è prodotto diretto dei propri sottogruppi di Sylow).*

Dim. *Necessità.* Le 1), 2) seguono dal fatto che N è un sottogruppo $\cup$-d. di G([3] pag. 65 teor. 6).

Quanto alla 3), M è evidentemente un sottogruppo di G soddisfacente alla 3a) e proviamo che esso soddisfa anche alla 3b).

Allo scopo, supponiamo dapprima $M = e$ e sia $p \in \omega(C_G(N))$. Se ogni p-elemento di $C_G(N)$ appartiene ad N, allora $C_G(N)$ ha un solo p-sottogruppo di Sylow perchè $C_G(N) \cap N$ è abeliano. In caso contrario, siano, per assurdo, S_p ed S'_p due p-sottogruppi di Sylow distinti di G e sia $t \in S_p \cup S'_p$ un q-elemento con $q \neq p$. Dalla 2*b*) si trae $S_p \cap N = S'_p \cap N = N_p$; inoltre, essendo $M = e$, è $\langle t \rangle \cap N \neq e$, sicchè dalla

$$\langle t \rangle \cap N \leqslant (S_p \cup S'_p) \cap N = (S_p \cap N) \cup (S'_p \cap N) = N_p$$

segue che N_p contiene un q-elemento, cosa assurda. $C_G(N)$ è dunque un S-gruppo.

Se poi è $M \neq e$, NM/M è un sottogruppo neutro di G/M (1..3)
Ora, l'insieme degli elementi di G/M che non hanno altra potenza in NM/M che l'unità è il sottogruppo identico, onde, per quanto sopra dimostrato, $C_{G/M}(NM/M)$ è un S-gruppo.

Sufficienza. Dalle 1), 2) segue che N è $\cup$-d. ([3] pag. 65 teor. 6); resta dunque da provare che esso è $\cap$-d.

Allo scopo, supponiamo dapprima di nuovo $M = e$.

Detti V_1, V_2 due sottogruppi di G, si tratta di provare che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)\,. \tag{1}$$

Sia, all'uopo, $x \in N \cap (V_1 \cup V_2)$ un p-elemento $(p \in \omega(G))$ e lo si esprima nella forma

$$x = v_{11} v_{21} \ldots v_{1n} v_{2n} \tag{2}$$

dove v_{ij} è un p_{ij}-elemento $(p_{ij} \in \omega(G))$ e

$$v_{ij} \in V_i \qquad (i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

(potendo essere eventualmente $p_{ij} = 1$ per qualche i, j).

In virtù della 2*a*), è lecito supporre che nella (2), per un conveniente k, $1 \leqslant k \leqslant n$, i primi $2k$ fattori appartengano ad N mentre gli ultimi $2\,(n-k)$, se non identici, non vi appartengano. Posto

$$v_{11} v_{21} \ldots v_{1k} v_{2k} = a_1 a_2 \ldots a_r$$

con gli a_i p_i-elementi fra loro permutabili, $a_i \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$, $p_i \neq p_j$ per $i \neq j$, la (2) si può esprimere nella forma

$$x = a_1 a_2, \dots, a_r v_{1,k+1} v_{2,k+1}, \dots, v_{1n} v_{2n} . \tag{3}$$

Se è $p_{ij} = p$ (p essendo sempre il numero primo relativo ad x) per qualche $i, j (i = 1, 2;\ j = k+1, \dots, n)$, poichè $p_{ij} \in \omega(G/N)$, dalla $2b$) si trae che $x \in \langle v_{ij} \rangle$, onde $x \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$.

In caso contrario, osserviamo che, attese le $2a$) e $2b$), per ogni $q \in \omega(G/N)$, i q-elementi di G sono tutti nel $C_G(N)$. Ne segue, essendo $C_G(N)$ un S-gruppo, che nella 3) v_{ij} e v_{rs} sono permutabili se $p_{ij} \neq p_{rs}$, mentre il prodotto $v_{ij} v_{rs}$ è ancora un p_{ij}-elemento se $p_{ij} = p_{rs}$. Pertanto la (3), permutati ed associati opportunamente i v_{ij}, diviene

$$x = a_1 a_2 \dots a_r b_1 b_2 \dots b_s \tag{4}$$

dove i b_i sono q_i-elementi $(q_i \in \omega(G/N))$ fra loro permutabili con $q_i \neq p$ per ogni $i = 1, 2, \dots, s$. Orbene, poichè tutti i fattori del 2° membro della (4) sono permutabili ed x è un p-elemento, uno degli a_i, per esempio a_1, deve essere un p-elemento, mentre deve essere $a_2, \dots, b_s = e$, perciò

$$x = a_1 \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$$

ed N è $\cap$-d.

Se poi $M \neq e$, essendo N $\cup$-d. in G, NM/M è $\cup$-d. in G/M (1.3) di guisa che per esso valgono senz'altro le 1), 2) dell'enunciato. Si verifica subito poi che vale anche la 3) con la particolarità che il sottogruppo degli elementi di G/M che non hanno altra potenza in NM/M all'infuori dell'unità è identico.

Ne segue, per quanto dimostrato sopra, che NM/M è neutro in G/M e finalmente dal lemma 2.1 si trae che N è neutro in G.

3. Ci occuperemo ora dei sottogruppi neutri d'un gruppo non periodico. Poichè nel seguito sfrutteremo sistematicamente il teorema di Stato ([3] pag. 66 teor. 7), riportiamo, per comodità del lettore, l'enunciato di tale teorema.

3.1. TEOREMA (Sato). *Sia G un gruppo non periodico e sia N un sottogruppo non banale di G. N è $\cup$-d. se, e solo se, sono soddifatte le* *seguenti condizioni*:

1) $N \lhd G$;

2) G/N *è periodico*;

3) *gli elementi periodici di* G *sono contenuti in* N *ed* $\omega(N) \cap \cap\, \omega(G/N) = 1$;

4) *per ogni coppia* u, v *di elementi aperiodici di* G *è*

$$\langle u \rangle \cap \langle v \rangle \neq e \, ;$$

5) *Se* X *è un laterale di* N *in* G *ed* $x \in X$, *allora, per ogni* $a \in N$, *esiste un intero* h *tale che*

$$x^h \in X \, , \qquad a x^h = x^h a \, .$$

3.2. Corollario. *Siano* G *un gruppo non periodico finitamente generato,* $Z(G)$ *il suo centro ed* N *un sottogruppo non banale di* G. *Se* N *è* $\cup$*-d. in* G, *allora* $Z(G) \cap N$ *è non periodico.*

Dim. Per la 3) del teorema 3.1 esiste un insieme finito $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ di generatori aperiodici di G; le 2), 4) dello stesso teorema implicano che N è non periodico, sicchè ancora dalla 4) segue che

$$e \neq \langle y_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle y_n \rangle \cap N \leqslant Z(G) \, ,$$

donde la conclusione.

3.3. Proposizione. *Sia* N *un sottogruppo* $\cup$*-d. non banale del gruppo non periodico finitamente generato* G. N *è neutro in* G *se, e solo se, fissato un elemento aperiodico* $z \in Z(G) \cap N$, *esiste un intero* $n > 0$ *tale che* $N/\langle z^n \rangle$ *sia un sottogruppo neutro del gruppo* $G/\langle z^n \rangle$, *gruppo necessariamente periodico.*

Dim. La condizione è necessaria per 1.1.

Quanto alla sufficienza, si tratta, al solito, di provare che, per ogni V_1, $V_2 \leqslant G$, risulta

$$N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2) \, . \tag{1}$$

All'uopo, se V_1 e V_2 sono entrambi periodici, si ha V_1, $V_2 \leqslant N$ (3.1), 3), donde la (1).

Se V_1, V_2 sono entrambi non periodici, scelto un elemento aperiodico $z \in Z(G) \cap N$, risulta (3.1), 4)

$$\langle z \rangle \cap N \cap V_1 \cap V_2 = \langle z^n \rangle \qquad (n > 0)\,,$$

$N/\langle z^n \rangle$ per ipotesi è neutro in $G/\langle z^n \rangle$, donde la (1).

Se infine V_1 è periodico e V_2 è non periodico, allora è $V_1 \leqslant N$ e si ha

$$\begin{aligned} N \cap (V_1 \cup V_2) &= N \cap \big(V_1 \cup (V_2 \cap N) \cup V_2\big) = \\ &= \big(N \cap (V_1 \cup (V_2 \cap N))\big) \cup (N \cap V_2) = \\ &= V_1 \cup (V_2 \cap N) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)\,; \qquad \text{c.v.d.}\,. \end{aligned}$$

Le proposizioni 1.4 e 3.3 riconducono il problema della determinazione dei sottogruppi neutri d'un gruppo, nel caso d'un gruppo non periodico, allo stesso problema relativo al caso d'un gruppo periodico ed al problema della determinazione dei sottogruppi $\cup$-d. d'un gruppo non periodico, problemi risolti rispettivamente dai teoremi 2.2 e 3.1.

Al fine di giungere ora ad una caratterizzazione più esplicita dei sottogruppi neutri d'un gruppo non periodico G, supporremo che G soddisfi alla seguente condizione:

3.4. *Per ogni coppia H, K di sottogruppi di G con $K \lhd H$ ed H/K periodico, il gruppo H/K è localmente finito.*

Si osservi che la 3.4 è senz'altro soddisfatta se G è localmente risolubile.

3.5. Teorema. *Sia N un sottogruppo non banale del gruppo non periodico G soddisfacente alla* 3.4.

N è neutro in G se, e solo se, valgono le seguenti condizioni:

1) *L'insieme P degli elementi periodici di G è un sottogruppo proprio di N, G/P è localmente ciclico ed è $\omega(P) \cap \omega(G/N) = 1$;*
2) *Se X è un laterale di N in G ed $x \in X$, allora, per ogni $a \in N$, esiste un intero h tale che*

$$x^h \in X\,, \qquad x^h a = a x^h\,.$$

DIM. *Necessità.* C'è da dimostrare soltanto che $P \leqslant N$ e che G/P è localmente ciclico, le altre condizioni figurando già nel teorema 3.1. È lecito supporre G finitamente generato, di guisa che $Z(G)$ è non periodico.

Detto x un elemento aperiodico di N e posto $|G/N| = m$ il sotto-. gruppo $K_x = Z(G) \cap \langle x^m \rangle$ è aperiodico, quindi G/K_x è finito $(3.1, 4)_3$ Pertanto, indicato con L_x l'insieme degli $y \in N$ aventi ordine, mod K_x. primo con m, dalla 2) del teorema 2.2 applicato a G/K_x si trae, usando il teorema di Burnside, che $L_x \lhd G$ [4].

Indi, applicando il teorema 2.2 al gruppo G/L_x, osservato che l'M di cui in 2.2, 3*a*) è identico, la 2.2, 3*b*) porge che G/L_x è nilpotente. Ora, poichè $L_x \subset P$ ed $x \notin L_x$, risulta

$$\bigcap_{x \in N \setminus P} L_x = P \tag{1}$$

onde $P < N$.

Dalla (1) discende poi che G/P è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto $\prod\limits_{x \in N \setminus P} G/L$, sicchè, essendo quest'ultimo localmente nilpotente ([2] pag. 183), tale è anche G/P che risulta quindi localmente ciclico ([1], cor. 18).

Sufficienza. Possiamo ancora supporre G finitamente generato (1.4). Si trae allora dalle 1), 2) che $Z(G)$ è non periodico: infatti, se $\{g^{r_1} u_1, \ldots, g^{r_n} u_n\}$ $(u_i \in P)$ è un sistema finito di generatori di G, esiste, per la 2), una potenza g^h di g, con $h > 0$, permutabile con $u_1, \ldots, u_n$ e quindi $g^h \in Z(G)$.

Ne segue facilmente che valgono tutte le condizioni del teorema 3.1, talchè N è intanto $\cup$-d.

Se $z \in Z(G) \cap N$ è un elemento aperiodico, consideriamo il gruppo $G/\langle z^m \rangle$ con $m = |G/N|$. Poichè $N/\langle z^m \rangle$ è $\cup$-d. in $G/\langle z^m \rangle$ (1.1), questo soddisfa alle condizioni 1), 2) del teorema 2.2 e proviamo che esso soddisfa anche alla 3) dello stesso teorema. Infatti, dalla 2*b*) del teorema 2.2 discende che l'insieme $M/\langle z^m \rangle$ degli elementi di $G/\langle z^m \rangle$ che non hanno altra potenza in $N/\langle z^m \rangle$ all'infuori dell'unità è il sottogruppo identico di $G/\langle z^m \rangle$.

Inoltre, essendo G/P ciclico, tenuto conto di 2.2, 2*a*), si verifica facilmente che, per ogni $p \in \omega(G/N)$, due p-elementi di $G/\langle z^m \rangle$ sono permutabili, donde la 3*b*) di 2.2.

Pertanto, $N/\langle z^m \rangle$ è neutro in $G/\langle z^m \rangle$, quindi N è neutro in G(3.3).

Infine, ricordando che il reticolo dei sottogruppi d'un gruppo localmente ciclico è distributivo, dal teorema precedente si deduce subito il

3.6. COROLLARIO. *Sia G un gruppo senza torsione (non identico) soddisfacente alla* 3.4. *G è dotato di sottogruppi neutri non banali se, e solo se, è localmente ciclico.*

BIBLIOGRAFIA

[1] E. MARTINO, *Elementi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo localmente nilpotente*, Rend. del Seminario mat. dell'Università di Padova, vol. XLV, 1971.

[2] E. SCHENKMAN, *Group theory*, New York, 1965.

[3] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgrups*, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[4] G. ZAPPA, *Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito*, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat., Napoli, vol. XVIII, 1951.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 settembre 1972.