RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI

Sulle localizzazioni che conservano il grado

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 49 (1973), p. 337-346

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__337_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 49 (1973)

Sulle localizzazioni che conservano il grado.

TOMASO MILLEVOI (*)

SUMMARY - Let $\mathfrak{P}$ be a prime ideal of a noetherian ring A, $\mathfrak{J}$ an ideal contained in $\mathfrak{P}$. Let $\mathfrak{J}'$ be the extension of $\mathfrak{J}$ in the local ring $A_{\mathfrak{P}}$. It is well known that $\operatorname{gr}\mathfrak{J}' \geqslant \operatorname{gr}\mathfrak{J}$. In this paper some conditions are proved to imply the equality $\operatorname{gr}\mathfrak{J}' = \operatorname{gr}\mathfrak{J}$. In particular:

i) Let $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = r$; then $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = \operatorname{gr}\mathfrak{J}' \Leftrightarrow$ for any general ideal $\mathfrak{G}$ of grade r contained in $\mathfrak{J}$ there exist a prime ideal $\mathfrak{Q}$ such that $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{J}$, $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$.

ii) Let $\operatorname{gr}\mathfrak{P} \geqslant n > 0$; then $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = \operatorname{gr}\mathfrak{J}'$ for each ideal $\mathfrak{J}$ of grade n contained in $\mathfrak{P} \Leftrightarrow \mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}(\mathfrak{G})$, with $\mathfrak{G}$ general ideal of grade n, or $\mathfrak{P}$ is a maximal ideal of A, the only one of grade $\geqslant n$.

iii) $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = \operatorname{gr}\mathfrak{J}'$ for each ideal $\mathfrak{J}$ contained in $\mathfrak{P} \Leftrightarrow \mathfrak{P}$ is the only maximal ideal of A (which is therefore a local ring), or $\mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}(0)$, or $\mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}(g)$, with g not zerodivisor, and $\mathfrak{P} \supset \bigcup \mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_i \in \operatorname{Ass}(0)$.

Sia $\mathfrak{P}$ un ideale primo di un anello noetheriano A, $\mathfrak{J}$ un ideale di A contenuto in $\mathfrak{P}$; indichiamo con $\mathfrak{J}'$ l'ideale generato in $A_{\mathfrak{P}}$ dall'immagine di $\mathfrak{J}$ nell'omomorfismo $A \to A_{\mathfrak{P}}$. Si ha allora che il grado di $\mathfrak{J}'$ è maggiore od uguale del grado di $\mathfrak{J}$, in quanto se degli elementi di $\mathfrak{P}$ $a_1, \ldots, a_r$ formano una A-successione, le loro immagini in $A_{\mathfrak{P}}$ $a_1', a_2', \ldots, a_r'$ costituiscono una $A_{\mathfrak{P}}$ successione (cfr. [2], Coroll. 1.17, pag. 8).

In questo lavoro trovo delle condizioni su $\mathfrak{P}$ affinchè valga la pro-

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

prietà inversa, cioè affinchè

(*A*) *se* $a_1', a_2', \ldots, a_r'$ *formano una* $A_{\mathfrak{P}}$*-successione, allora gli elementi* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *formino una A-successione.*

Trovo inoltre delle condizioni su $\mathfrak{P}$ affinchè, fissato $n > 0$, il grado di $\mathfrak{J}$ sia uguale al grado di $\mathfrak{J}'$ per ogni ideale $\mathfrak{J}$ di grado $\geqslant n$, contenuto in $\mathfrak{P}$.

Gli anelli considerati sono sempre anelli noetheriani; i lemmi 1, 2, 3 sono però stabiliti senza sfruttare tale ipotesi.

LEMMA 1. *Sia* $\mathfrak{J}$ *un ideale di un anello* A, *a un elemento non divisore dello zero modulo* $\mathfrak{J}$ *tale che l'ideale* $(\mathfrak{J}, a)$ *sia proprio,* $\mathfrak{P}$ *un ideale primo associato a* $(\mathfrak{J}, a)$. *Allora se* $b \in \mathfrak{P}$ *non è divisore dello zero modulo* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{P}$ *è associato anche all'ideale* $(\mathfrak{J}, b)$.

DIM. Se $\mathfrak{P}$ è associato a $(\mathfrak{J}, a)$, esiste un elemento x tale che $(\mathfrak{J}, a) : x = \mathfrak{P}$ (cfr. [1] Def. 1 pag. 131); si ha quindi, per opportuni $j \in \mathfrak{J}$, $y \in A$ $bx = ya + j$; si ha allora $(\mathfrak{J}, b) : y = \mathfrak{P}$ e dunque $\mathfrak{P}$ è associato a $(\mathfrak{J}, b)$. Infatti (con notazioni evidenti) $p \in \mathfrak{P} \Rightarrow px = ra + i \Rightarrow \Rightarrow bpx = bra + bi \Rightarrow pya = bra + bi - pj$ cioè $a(py - br) \in \mathfrak{J}$ e siccome a non è divisore dello zero modulo $\mathfrak{J}$, $py \in (\mathfrak{J}, b)$; si ha quindi $(\mathfrak{J}, b) : y \supseteq \mathfrak{P}$. Se d'altra parte $s \in (\mathfrak{J}, b) : y$, cioè $sy = i + tb$, $say = ia + + tab \Rightarrow sbx = ia - sj + tab \Rightarrow (sx - ta)b \in \mathfrak{J}$ e siccome b non è divisore dello zero modulo $\mathfrak{J}$, $sx \in (\mathfrak{J}, a)$, cioè $s \in (\mathfrak{J}, a) : x = \mathfrak{P}$.

LEMMA 2. *Sia* $a_1, a_2, \ldots, a_r, b$ *una A-successione. Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $a_1, \ldots, a_s, b, a_{s-1}, \ldots, a_r$ *sia una A-successione è che si abbia* $(a_1, \ldots, a_i) : b = (a_1, \ldots, a_i)$ *per* $s \leqslant i < r$.

Questo lemma si può dimostrare con successive applicazioni del seguente

LEMMA 3. *Se* $(\mathfrak{J}, a) : b = (\mathfrak{J}, a)$ *e* $\mathfrak{J} : a = \mathfrak{J}$, *allora* $(\mathfrak{J}, b) : a = (\mathfrak{J}, b)$.

DIM. cfr. [4], pag. 359.

Il seguente teorema è già noto (cfr. [7], pag. 181); se ne dà qui una dimostrazione diretta.

TEOREMA 4. *Se* $\mathfrak{P}$ *è un ideale primo di un anello noetheriano* A, *associato ad un ideale generale di grado* r, *allora* $\mathfrak{P}$ *è associato ad ogni ideale generale di grado* r *contenuto in* $\mathfrak{P}$.

DIM. per induzione. Sia $a_1, a_2, \ldots, a_r$ una A-successione, e sia $\mathfrak{P}$ un ideale primo associato all'idale $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$; sia $c_1, c_2, \ldots, c_r$ una

A-successione formata da elementi di $\mathfrak{P}$. Se $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}) = (c_1, c_2, \ldots, c_{r-1})$ l'asserto del teorema è vero per il lemma 1. Supponiamo allora che l'asserto sia vero quando gli ideali generati dai primi $s+1$ termini delle due A-successioni coincidono e dimostriamo che di conseguenza è vero se coincidono gli ideali generati dai primi s termini delle due A-successioni. Poichè $\mathfrak{P}$ ha grado r, non è contenuto in nessuno degli ideali primi associati agli ideali generali $(a_1, a_2, \ldots, a_s) = (c_1, c_2, \ldots, c_s)$, $(a_1, a_2, \ldots, a_s, a_{s+1}), \ldots,$ $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1})$, $(c_1, c_2, \ldots, c_s, c_{s+1}), \ldots, (c_1, c_2, \ldots, c_{r-1})$ che han tutti grado minore di r. Essendo tali ideali primi in numero finito, $\mathfrak{P}$ non è contenuto nemmeno nella loro riunione (cfr. [5] Prop. 6 pag. 12); esiste quindi un elemento $b \in \mathfrak{P}$ con b non appartenente a nessuno di questi ideali primi. Siccome $\mathfrak{I}:x = \mathfrak{I}$ se e solo se x non appartiene a nessuno degli ideali primi associati ad $\mathfrak{I}$ (cfr. [5], Th. 6, pag. 23) ne segue che

1) $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, b$ è una A-successione

2) $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, b$ è una A-successione,

inoltre, per il Lemma 2,

3) $a_1, a_2, \ldots, a_s, b, a_{s+1}, \ldots, a_{r-1}$ e $c_1, \ldots, c_s, b, c_{s+1}, \ldots, c_{r-1}$ sono A-successioni. Da 1) e dal lemma 1 segue che $\mathfrak{P}$ è associato all'ideale $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, b)$; quindi per 3) e per l'ipotesi induttiva si ha che $\mathfrak{P}$ è associato all'ideale $(c_1, \ldots, c_{r-1}, b)$; da ciò, da 2) e dal Lemma 1 segue in fine che $\mathfrak{P}$ è un ideale primo associato a $(c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, c_r)$. c.v.d.

Veniamo ora a studiare la proprietà (A) enunciata nell'introduzione.

Sia A un anello noetheriano, $\mathfrak{P}$ un ideale primo di A. Se si vuole che gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(a_i \in \mathfrak{P})$ formino una A-successione se e solo se le loro immagini in $A_{\mathfrak{P}}$ formano una $A_{\mathfrak{P}}$-successione, dovrà verificarsi, in particolare, che ogni divisore dello zero di $\mathfrak{P}$ ha per immagine in $A_{\mathfrak{P}}$ un divisore dello zero. A questo proposito sussiste il seguente

TEOREMA 5. *Dato un anello noetheriano A ed un suo ideale primo $\mathfrak{P}$, ogni divisore dello zero di $\mathfrak{P}$ ha per immagine in $A_{\mathfrak{P}}$ un divisore dello zero se e solo se $\mathfrak{P}$ contiene tutti i divisori dello zero di A oppure $\mathfrak{P}$ è uno degli ideali primi associati all'ideale* (0).

DIM. L'immagine di un elemento di A è divisore dello zero in $A_{\mathfrak{P}}$ se e solo se l'elemento stesso è divisore dello zero modulo l'ideale $\mathfrak{N}$ nucleo dell'omomorfismo canonico di A in $A_{\mathfrak{P}}$. Ora se $(0) = \mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \cap$

$\cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_m \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_n$ è una rappresentazione normale dello zero come intersezione di ideali primari ed indichiamo con $\mathfrak{P}_i$ il radicale di $\mathfrak{Q}_i$, risulta $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_m$ se $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{P}_i$ $i = 1, 2, \ldots, m$ e $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{P}_j$ $j = m+1, \ldots, n$ (cfr. [5], 2.7 e Prop. 7, pag. 17). Dunque gli elementi di A che hanno per immagine in $A_{\mathfrak{P}}$ un divisore dello zero sono gli elementi di $\mathfrak{P}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{P}_m$.

Se $m = n$, cioè se $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{P}_i$ per ogni i, $\mathfrak{P}$ contiene tutti i divisori dello zero di A ed il teorema è dimostrato; supponiamo allora che sia $m \neq n$; in questo caso, se ogni divisore dello zero di $\mathfrak{P}$ ha per immagine in $A_{\mathfrak{P}}$ un divisore dello zero, risulta $\mathfrak{P}_j \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{P}_m$ $(j = m+1, \ldots, n)$ e dunque, per almeno un indice i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ si ha $\mathfrak{P}_j \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}_i$. Ma se un ideale primo contiene l'intersezione di due ideali (e quindi il loro prodotto) contiene almeno uno dei due ideali in questione; ma $\mathfrak{P}_j \subseteq \mathfrak{P}_i$ è falso (altrimenti $\mathfrak{P}_j \subseteq \mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P}$) e dunque risulta $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}_i$ da cui $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$, c.v.d.

Viceversa, se $\mathfrak{P}$ coincide con uno dei primi associati allo zero, diciamo $\mathfrak{P}_m$, si ha: $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_m$ con $\mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P}_m$ per $i = 1, \ldots, m$ ed ovviamente $\mathfrak{P}_j \cap \mathfrak{P}_m \subseteq \mathfrak{P}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{P}_m$. L'altro caso è del tutto banale.

Seguono alcuni corollari.

Corollario 6. *Sia $\mathfrak{P}$ un ideale primo di un anello noetheriano A, ed $\mathfrak{J}$ un ideale contenuto in $\mathfrak{P}$. Indichiamo con $\mathfrak{J}'$ l'ideale generato in $A_{\mathfrak{P}}$ dall'immagine di $\mathfrak{J}$ nell'omomorfismo $A \to A_{\mathfrak{P}}$. Ogni elemento di $\mathfrak{P}$ che sia divisore dello zero modulo $\mathfrak{J}$ ha allora per immagine in $A_{\mathfrak{P}}$ un divisore dello zero modulo $\mathfrak{J}'$ se e solo se $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati ad $\mathfrak{J}$ oppure coincide con uno di questi.*

Dim. La tesi segue facilmente dal teorema precedente non appena si osservi che l'operazione di passaggio al quoziente è permutabile con quella di localizzazione.

Corollario 7. *Se $\mathfrak{J}$ è un ideale di grado 0, $\mathfrak{J}'$ è di grado 0 se e solo se $\mathfrak{J}$ è contenuto in uno degli ideali primi associati all'ideale (0) e contenuti in $\mathfrak{P}$.*

Dim. Infatti ogni elemento di $\mathfrak{J}'$ è del tipo $i'u$ con u invertibile in $A_{\mathfrak{P}}$ e i' immagine di un elemento di $\mathfrak{J}$; basta dunque che ogni elemento di $\mathfrak{J}$ abbia per immagine un divisore dello zero, cioè che $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{P}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{P}_m$, da cui la tesi.

Corollario 8. *Sia $\operatorname{gr} \mathfrak{J} = r$; allora $\operatorname{gr} \mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$ se e solo se fra gli ideali primi associati ad un (qualunque) ideale generale di grado r contenuto in $\mathfrak{J}$ ce n'è uno che contiene $\mathfrak{J}$ ed è contenuto in $\mathfrak{P}$.*

DIM. Ciò segue facilmente dai corollari 6 e 7.

COROLLARIO 9. *Se* $\mathfrak{P}$ *è un ideale primo di un anello noetheriano* A, *associato ad un ideale principale* (a), *ed inoltre* $\mathfrak{P}$ *contiene tutti i divisori dello zero di* A, *allora una successione di elementi* $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathfrak{P}$ *è una* A*-successione se e solo se le loro immagini in* $A_{\mathfrak{P}}$ $a'_1, a'_2, \dots, a'_r$ *formano una* $A_{\mathfrak{P}}$*-successione.*

DIM. Basta verificare che un elemento $a' \in A_{\mathfrak{P}}$ è un divisore dello zero se e solo se lo è $a \in A$, e che d'altra parte $A_{\mathfrak{P}}$ non contiene $A_{\mathfrak{P}}$-successioni di lunghezza due. La prima condizione è verificata, per il teorema precedente, in quanto $\mathfrak{P}$ contiene tutti i divisori dello zero; la seconda in quanto se $a_1, a_2 \in \mathfrak{P}$ e a'_1 non è divisore dello zero, non lo è neanche a_1 per il teorema precedente, e quindi $\mathfrak{P}$ è associato all'ideale (a_1) per il lemma 1; a_2 è quindi divisore dello zero modulo (a_1) e, sempre per il teorema precedente, e per il fatto che l'operazione di passaggio al quoziente è permutabile con quella di localizzazione, a'_2 è divisore dello zero modulo (a'_1).

OSSERVAZIONI

I) La condizione che $\mathfrak{P}$ contenga tutti i divisori dello zero di A è verificata automaticamente se lo zero è un ideale primario (in questo caso i divisori dello zero costituiscono l'unico ideale primo minimale di A) od anche se A è un anello locale e $\mathfrak{P}$ contiene gli altri primi associati ad (a); in un anello locale, infatti, una permutazione di una A-successione è ancora una A-successione (cfr. [8], Lemma 2, pag. 395) e quindi la riunione degli ideali primi associati ad un ideale principale (a) di grado 1 contiene tutti i divisori dello zero di A: se così non fosse se ne potrebbe scegliere uno b, tale che a, b sia una A-successione, e dunque anche b, a, il che è assurdo se b è divisore dello zero.

II) Il teorema 5 ed il corollario 9 danno degli esempi di ideali primi per i quali vale la proprietà (A) ($\mathfrak{P}$ associato allo zero; $\mathfrak{P}$ contenente tutti i divisori dello zero e associato ad un ideale principale di grado 1).

In realtà non si tratta solo di esempi, ma, come vedremo, degli unici casi non banali in cui la proprietà (A) è verificata. Si ha in proposito:

PROPOSIZIONE 10. *La proprietà* (A) *vale se e solo se* $\mathfrak{P}$ *contiene tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado minore del grado di* $\mathfrak{P}$ *e contenuti in* $\mathfrak{P}$, *ed è associato ad un ideale generale.*

DIM. Sia r il grado di $\mathfrak{P}$, $a_1, a_2, \dots, a_s$ $(s \leqslant r)$ una A-successione contenuta in $\mathfrak{P}$. Sia b un elemento di $\mathfrak{P}$ tale che $a_1, a_2, \dots, a_s, b$ non sia una A-successione. Per il corollario 6, $a'_1, a'_2, \dots, a'_s, b'$ non sarà una $A_{\mathfrak{P}}$-successione per ogni b siffatto se e solo se o $\mathfrak{P}$ è associato all'ideale $(a_1, \dots, a_s)$ o $\mathfrak{P}$ contiene tutti i divisori dello zero modulo $(a_1, \dots, a_s)$. Se $s < r$ la prima possibilità è esclusa poichè altrimenti $\mathfrak{P}$ avrebbe grado s e dunque, se vale la proprietà (A), $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado $s < r$. Se $s = r$ e vale la proprietà (A), in ogni caso $\mathfrak{P}$ è un primo associato all'ideale $(a_1, a_2, \dots, a_r)$, poichè se $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati all'ideale $(a_1, a_2, \dots, a_r)$, essendo il grado di $\mathfrak{P} = r$, $\mathfrak{P}$ è anche contenuto nello loro riunione e quindi coincide con uno di essi. Viceversa, siano $a_1, a_2, \dots, a_t$ elementi di $\mathfrak{P}$ e sia $a'_1, a'_2, \dots, a'_t$ una $A_{\mathfrak{P}}$-successione, verifichiamo che $a_1, a_2, \dots, a_t$ è una A-successione; procediamo per induzione. Siccome per ipotesi $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati all'ideale nullo (ideale generale di grado zero) e siccome a'_1 non è un divisore dello zero, segue dal teorema 5 che a_1 non è divisore dello zero. Supponiamo allora che $a_1, a_2, \dots, a_s$ $(s < t)$ sia una A-successione e dimostriamo che anche $a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}$ è una A-successione. Sia $s < r$; in questo caso $\mathfrak{P}$ contiene per ipotesi tutti gli ideali primi associati all'ideale $(a_1, \dots, a_s)$ e dunque per il coroll. 6 siccome a'_{s+1} non è divisore dello zero modulo l'ideale $(a'_1, \dots, a'_s)$ neanche a_{s+1} è divisore dello zero modulo $(a_1, \dots, a_s)$. D'altra parte non può essere $t > s \geqslant r$ poichè in tal caso, per il teorema 4, essendo $\mathfrak{P}$ per ipotesi un ideale primo associato ad un ideale generale, risulta associato ad ogni ideale generale di grado r contenuto in $\mathfrak{P}$, quindi anche all'ideale $(a_1, a_2, \dots, a_r)$. Dunque $a_{r+1} \in \mathfrak{P}$ risulta divisore dello zero modulo $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ e quindi, per il corollario 6, a'_{r+1} risulta divisore dello zero modulo $(a'_1, a'_2, \dots, a'_r)$, contro l'ipotesi.

TEOREMA 11. *Sia A un anello noetheriano e $\mathfrak{P}$ un suo ideale di grado positivo. Se $\mathfrak{P}$ contiene tutti i divisori dello zero di A e tutti gli ideali primi associati ad ideali principali generati da elementi non divisori dello zero di $\mathfrak{P}$, si ha che $\mathfrak{P}$ è l'unico ideale massimale di A* (*che risulta dunque locale*).

DIM. Se $\mathfrak{P}$ non è l'unico ideale massimale di A, esiste un elemento non invertibile $b \notin \mathfrak{P}$, che non è un divisore dello zero poichè $\mathfrak{P}$ li contiene tutti. Sia $\mathfrak{P}'$ un ideale primo associato a (b). Si ha allora $\operatorname{gr}(\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{P}) = \min(\operatorname{gr}\mathfrak{P}', \operatorname{gr}\mathfrak{P}) = 1$ (cfr. [6], Lemma 3.3, pag. 610); esiste dunque un elemento non divisore dello zero $a \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{P}$. Per il lemma 1 $\mathfrak{P}'$ risulta associato ad $(a) \subseteq \mathfrak{P}$, e d'altra parte $\mathfrak{P}' \not\subseteq \mathfrak{P}$ poichè $b \in \mathfrak{P}'$, $b \notin \mathfrak{P}$. c.v.d.

La proposizione 10 ed il teorema 11 giustificano l'osservazione II.

Con riferimento al teorema 11, l'ipotesi che $\mathfrak{P}$ contenga tutti i divisori dello zero è essenziale, come risulterà dal teorema 14, che si riferisce anzi ad un problema più generale. Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 12. *Sia $\mathfrak{P}$ un ideale di grado $\geqslant r$ che contiene tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado r contenuti in $\mathfrak{P}$. Allora $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali di grado r dell'anello.*

DIM. Dato un ideale $\mathfrak{I}$ di grado r, scelta in $\mathfrak{I}$ una A-successione $a_1, \ldots, a_r$, $\mathfrak{I}$ è contenuto nella riunione degli ideali primi associati all'ideale $(a_1, \ldots, a_r)$; basterà dunque mostrare che $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado r. Se $r = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Sia $r \geqslant 1$; consideriamo un ideale primo $\mathfrak{P}'$ associato ad un ideale generale di grado r. Risulta $(\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{P}) = \min(\operatorname{gr}\mathfrak{P}', \operatorname{gr}\mathfrak{P}) = r$ (cfr. [6], Lemma 3.3, pag. 610); esiste dunque una A-successione $b_1, \ldots, b_r \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{P}$. Per il teorema 4, $\mathfrak{P}'$ è un primo associato all'ideale $(b_1, \ldots, b_r)$ contenuto in $\mathfrak{P}$, e dunque in base all'ipotesi $\mathfrak{P}'$ è contenuto in $\mathfrak{P}$. c.v.d.

LEMMA 13: *Sia $r \geqslant 1$ e $\mathfrak{P}$ un ideale di grado $\geqslant r$ che contiene tutte le A-successioni di lunghezza r dell'anello A. Fra gli ideali massimali dell'anello, $\mathfrak{P}$ è allora l'unico di grado $\geqslant r$.*

DIM. $\mathfrak{P}$ è massimale: consideriamo infatti un elemento a dell'anello tale che $(a, \mathfrak{P})$ sia un ideale proprio; fissata in $\mathfrak{P}$ una A-successione $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$ e scelto comunque un elemento $b \in (a, \mathfrak{P})$, o $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, b$ è una A-successione, dunque di lunghezza r e quindi contenuta in $\mathfrak{P}$, oppure b è divisore dello zero modulo l'ideale $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_{r-1})$; si ha quindi $(a, \mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{P} \cup \mathfrak{Q}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{Q}_s$ se $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s$ sono gli ideali primi associati a $\mathfrak{B}$. Ne risulta (cfr. [3], Th. 81, pag. 55) che $(a, \mathfrak{P})$ è contenuto in uno degli ideali in questione, che è dunque $\mathfrak{P}$ in quanto $\operatorname{gr}\mathfrak{Q}_i = r - 1$ e $\operatorname{gr}(a, \mathfrak{P}) \geqslant r$. Ciò prova che $\mathfrak{P}$ è massimale. L'unico massimale di grado $\geqslant r$ è $\mathfrak{P}$: se consideriamo infatti un ideale $\mathfrak{I}$ di grado $\geqslant r$, scelto comunque in $\mathfrak{I}$ un elemento i_1 che non sia divisore dello zero, possiamo trovare in $\mathfrak{I}$ degli elementi $i_2, \ldots, i_r$ tali che $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sia una A-successione; ne segue che $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \mathfrak{P}$, e quindi che gli eventuali elementi di $\mathfrak{I}$ che non stanno in $\mathfrak{P}$ sono divisori dello zero, cioè che $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{P} \cup \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{P}_k$, essendo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k$

i primi associati allo zero; si ha quindi (cfr. [3], Th. 81, pag. 55) che $\mathfrak{I}$ è contenuto in uno degli ideali in questione, che deve essere $\mathfrak{P}$, in quanto $\mathfrak{I} \not\subset \mathfrak{P}_j$ poichè $\mathrm{gr}\, \mathfrak{P}_j = 0$, $\mathrm{gr}\, \mathfrak{I} \geqslant r \geqslant 1$. c.v.d.

Teorema 14. *Sia r un intero positivo, A un anello noetheriano e $\mathfrak{P}$ un suo ideale di grado $\geqslant r$. Se $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado r contenuti in $\mathfrak{P}$, allora $\mathfrak{P}$ è un ideale massimale di A, l'unico di grado $\geqslant r$.*

Dim. Per il lemma 12, $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali di grado r dell'anello, e quindi in particolare tutte le A-successioni di lunghezza r. Applicando quindi il lemma 13 si ha la tesi.

Esempio. Consideriamo, nell'anello $A = k[x, y]$ dei polinomi in due indeterminate su di un corpo k, gli ideali primi $\mathfrak{M} = (x, y)$, $\mathfrak{N} = (x-1, y-1)$, $\mathfrak{P} = (x)$, e sia S il sistema degli elementi di A che non appartengono a $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$, sistema che risulta chiuso rispetto alla moltiplicazione. L'anello $A' = A_S$ ha due soli ideali massimali $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}A_S$ e $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}A_S$. L'anello $B = A'/\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{P}'$ fornisce allora un esempio di anello non locale con un solo ideale massimale di grado positivo, poichè nell'omomorfismo canonico di A' su B gli elementi di $\mathfrak{N}'$ si trasformano in divisori dello zero, mentre ciò non succede per tutti gli elementi di $\mathfrak{M}'$ (p.e. y).

Osserviamo ora che se in un anello A fra gli ideali massimali ce n'è uno solo, $\mathfrak{M}$, di grado $\geqslant n$ allora questo contiene tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado $\geqslant n$. Consideriamo in A un ideale $\mathfrak{I}$ di grado $s \geqslant n$, certamente contenuto in $\mathfrak{M}$, ed il corrispondente ideale $\mathfrak{I}'$ in $A' = A_{\mathfrak{M}}$; se $i_1, i_2, \ldots, i_s$ è una A-successione formata da elementi di $\mathfrak{I}$, ogni altro elemento di $\mathfrak{I}$ è divisore dello zero modulo $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ ed ha dunque per immagine in A' un divisore dello zero modulo $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_s)$ in quanto $\mathfrak{M}$ contiene tutti gli ideali primi associati all'ideale $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ (cfr. corollario 6). Siccome ogni elemento di $\mathfrak{I}'$ è del tipo $i'u$ con u invertibile in A' ed i' immagine di un elemento di $\mathfrak{I}$, ne consegue che $i'_1, i'_2, \ldots, i'_s$ è una A' successione di lunghezza massima in $\mathfrak{I}'$ e dunque $\mathrm{gr}\, \mathfrak{I}' = s = \mathrm{gr}\, \mathfrak{I}$. Questa proprietà si inverte nel senso precisato dal seguente

Teorema 15. *Sia n un intero positivo, A un anello noetheriano e $\mathfrak{P}$ un suo ideale primo di grado $\geqslant n$; se $\mathfrak{I}$ è un ideale di A, indichiamo, come al solito, con $\mathfrak{I}'$ l'ideale generato in $A' = A_{\mathfrak{P}}$ dall'immagine di $\mathfrak{I}$ nell'omomorfismo $A \to A_{\mathfrak{P}}$. Affinchè, per ogni ideale $\mathfrak{I}$ di grado n contenuto in $\mathfrak{P}$, valga l'uguaglianza $\mathrm{gr}\, \mathfrak{I} = \mathrm{gr}\, \mathfrak{I}'$ è necessario e sufficiente* *che $\mathfrak{P}$ sia un ideale massimale di A, l'unico di grado $\geqslant n$, oppure $\mathfrak{P}$ sia un ideale primo associato ad un ideale generale di grado n.*

DIM. Si è già vista la sufficienza della condizione quando $\mathfrak{P}$ è massimale; se d'altra parte $\mathfrak{P}$ è associato ad un ideale generale di grado n (e quindi, per il teorema 4, ad ogni ideale generale di grado n contenuto in $\mathfrak{P}$), scelta in $\mathfrak{J}$ una A-successione $i_1, i_2, \ldots, i_n$, ogni elemento di $\mathfrak{J}$ è divisore dello zero modulo $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ e dunque ogni elemento di $\mathfrak{J}'$ è divisore dello zero modulo $(i_1', i_2', \ldots, i_n')$, per il corollario 6, in quanto $\mathfrak{P}$ è associato all'ideale $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Proviamo ora la necessità della condizione. Se $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = \operatorname{gr}\mathfrak{J}'$ per ogni ideale $\mathfrak{J}$ di grado n contenuto in $\mathfrak{P}$, si ha in particolare che, considerata in $\mathfrak{P}$ una A-successione $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ogni divisore dello zero modulo $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ha per immagine in A' un divisore dello zero modulo $(p_1', p_2', \ldots, p_n')$; ciò comporta, per il corollario 6, che o $\mathfrak{P}$ contiene tutti gli ideali primi associati all'ideale $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, o coincide con uno di questi. Se non si verifica il secondo caso, $\mathfrak{P}$, per il teorema 4, non può essere associato a nessun ideale generale di grado n e quindi deve contenere tutti gli ideali primi associati ad ideali generali di grado n contenuti in $\mathfrak{P}$. Dal teorema 14 segue allora la tesi.

OSSERVAZIONE. Se un ideale massimale $\mathfrak{M}$ ha grado n, allora è associato ad un ideale generale di grado n; infatti, scelta in $\mathfrak{M}$ una A-successione, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ di lunghezza n, ogni altro elemento di $\mathfrak{M}$ è divisore dello zero modulo l'ideale $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ e dunque $\mathfrak{M}$ è contenuto nell'unione degli ideali primi associati a tale ideale; $\mathfrak{M}$ è allora contenuto in uno di essi e quindi coincide con questo essendo massimale.

Possiamo perciò precisare, con riferimento al teorema precedente, che se $\mathfrak{P}$ ha grado n, si verifica in ogni caso la seconda alternativa, e se $\mathfrak{P}$ ha grado $> n$, la prima.

COROLLARIO 16. *Sia r un intero positivo. Se per ogni ideale $\mathfrak{J}$ di grado r contenuto in $\mathfrak{P}$ risulta* $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = \operatorname{gr}\mathfrak{J}'$, *allora* $\operatorname{gr}\mathfrak{J} = \operatorname{gr}\mathfrak{J}'$ *per ogni ideale di grado $\geqslant r$ contenuto in $\mathfrak{P}$.*

DIM. Dall'ipotesi segue, per il teorema precedente, che o $\mathfrak{P}$ è l'unico massimale di grado $> r$, o $\mathfrak{P}$ è associato ad un ideale generale di grado r. Nel primo caso lo stesso teorema 15 porge la tesi; nel secondo caso $\mathfrak{P}$ ha grado r, non contiene quindi ideali di grado maggiore di r, e la tesi è verificata banalmente.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Chap. 4, Hermann, Paris, 1961.
[2] S. Greco - P. Salmon, *Anelli di Macaulay*, Pubblicazioni dell'Ist. Mat. dell'Università di Genova, 1965.
[3] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1970.
[4] T. Millevoi, *Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **36** (1966).
[5] D. G. Northcott, *Ideal Theory*, Cambridge Univ. Press, 1960.
[6] D. Rees, *A theorem of homological algebra*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **52** (1956).
[7] D. Rees, *A note on general ideals*, J. London Math. Soc., **32** (1957).
[8] O. Zariski - P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 ottobre 1972.